On skew braces: similarities with rings and groups and their representations

小境雄太氏との共同研究 (arXiv: 2405.08662, Int. J. Group Theory)

Cindy (Sin Yi) Tsang
お茶の水女子大学

環論および表現論シンポジウム
東京学芸大学

2024年9月16日

本研究はJSPS科研費24K16891の助成を受けたものである.

Skew (left) braceの定義

- Skew braceとは、2つの群演算 $\cdot$ と $\circ$ を備えた集合 $A=(A,\cdot,\circ)$ であって、かつ任意の $a,b,c\in A$ に対して、brace relationとも呼ばれる関係式

$$a\circ(b\cdot c)=(a\circ b)\cdot \underbrace{a^{-1}}_{a\text{の}(A,\cdot)\text{における逆元}}\cdot(a\circ c)$$

が成り立つような代数的構造である。このとき、

- $(A,\cdot)$ をAの加法群と呼び、 ← アーベル群とは限らない
- $(A,\circ)$ をAの乗法群と呼ぶ。
- 注：Brace relationより、$(A,\cdot)$ と $(A,\circ)$ の単位元が一致する。

Radical環と群からskew braceを作る方法

Radical環からskew braceを作る方法

- $(A, +, \cdot)$を環とする. 任意の$a, b \in A$に対して,

$$a \circ b = a + b + a \cdot b$$

とおくと、$(A, \circ)$は結合法則を満たし、単位元0_Aを持つ.

- $(A, +, \cdot)$がradicalであるとは、$(A, \circ)$が群をなすときに言う. このとき、

↳ $(A, +)$は群である. 環の定義!

↳ $(A, \circ)$は群である. radical環の定義!

↳ $\forall a, b, c \in A : a \circ (b + c) = (a \circ b) - a + (a \circ c)$. 簡単に確かめられる!

つまり, $(A, +, \circ)$がskew braceである.

群からskew braceを作る方法：その一

- $(A, \cdot)$を群とする．任意の$a, b \in A$に対して，

$$a \circ b = a \cdot b$$

とおく．つまり，$\circ$を$\cdot$そのままとする．このとき，

↳ $(A, \cdot)$は群である．　仮定から！

↳ $(A, \circ)$は群である．　自明！

↳ $\forall a, b, c \in A: a \circ (b \cdot c) = (a \circ b) \cdot a^{-1} \cdot (a \circ c)$．　両辺とも$a \cdot b \cdot c$！

- つまり，$(A, \cdot, \circ)$はskew braceである．

- $(A, \cdot, \cdot)$の形をするskew braceはtrivialであると言う．

群からskew braceを作る方法：その二

- $(A,\cdot)$を群とする。任意の$a,b\in A$に対して、

$$a\circ b = a\cdot^{op} b = b\cdot a$$

とおく。つまり、$\circ$を$\cdot$のopposite演算$\cdot^{op}$とする。このとき、

↳ $(A,\cdot)$は群である。　仮定から!

↳ $(A,\circ)$は群である。　自明!

↳ $\forall a,b,c\in A: a\circ(b\cdot c)=(a\circ b)\cdot a^{-1}\cdot(a\circ c)$。　両辺とも$b\cdot c\cdot a$!

- つまり、$(A,\cdot,\circ)$はskew braceである。

- $(A,\cdot,\cdot^{op})$の形をするskew braceはalmost trivialであると言う。

Skew braceにおける左右イデアル

Skew braceにおける左イデアルと右イデアル

- $A=(A,\cdot,\circ)$をskew braceとする．任意の$a,b\in A$に対して，

$$a*b=a^{-1}\cdot(a\circ b)\cdot b^{-1}$$

とおく．$*$は加法群の演算$\cdot$と乗法群の演算$\circ$の差を測っている．

- 実際，$a*b=1 \iff a\cdot b=a\circ b$が成り立つ．

- 加法群$(A,\cdot)$の部分群Iについて，

↳ IがAの左イデアル $\overset{\text{def}}{\iff} \forall a\in A, x\in I: a*x\in I$

↳ IがAの右イデアル $\overset{\text{def}}{\iff} \forall a\in A, x\in I: x*a\in I$

Radical環からなるskew brace、trivial skew brace,
almost trivial skew braceの場合

Radical環からなるskew braceの場合

- $(A, +, \cdot)$をradical環とする．任意の$a, b \in A$に対して，

$$a \circ b = a + b + a \cdot b$$

とおくと，$A = (A, +, \circ)$がskew braceとなる．このとき，

$$\begin{aligned} a * b &= -a + (a \circ b) - b \\ &= -a + (a + b + a \cdot b) - b \\ &= a \cdot b \end{aligned}$$

加法群$(A, \cdot)$の部分群Iについて，

↳ IがAの左イデアル $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall a \in A, x \in I : a * x \in I$

↳ IがAの右イデアル $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall a \in A, x \in I : x * a \in I$

- したがって，「Aの左イデアル」=「$(A, +, \cdot)$の左イデアル」．
「Aの右イデアル」=「$(A, +, \cdot)$の右イデアル」．

Trivial skew braceの場合

- $(A,\cdot)$を群とする. 任意の$a,b\in A$に対して,

$$a\circ b = a\cdot b$$

とおくと, $A=(A,\cdot,\circ)$はskew braceとなる. このとき,

$$\begin{aligned} a * b &= a^{-1}\cdot(a\circ b)\cdot b^{-1} \\ &= a^{-1}\cdot(a\cdot b)\cdot b^{-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

加法群$(A,\cdot)$の部分群Iについて,

↳ IがAの左イデアル $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall a\in A, x\in I : a * x\in I$

↳ IがAの右イデアル $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall a\in A, x\in I : x * a\in I$

- したがって, 「Aの左イデアル」=「$(A,\cdot)$の部分群」,
「Aの右イデアル」=「$(A,\cdot)$の部分群」.

Almost trivial skew braceの場合

- $(A,\cdot)$を群とする. 任意の$a,b\in A$に対して,

$$a\circ b = a\cdot^{op} b = b\cdot a$$

とおくと, $A=(A,\cdot,\circ)$はskew braceとなる. このとき,

$$\begin{aligned} a * b &= a^{-1}\cdot(a\circ b)\cdot b^{-1} \\ &= a^{-1}\cdot(b\cdot a)\cdot b^{-1} \\ &= [a^{-1},b] \quad \leftarrow \text{群}(A,\cdot)\text{の交換子} \end{aligned}$$

加法群$(A,\cdot)$の部分群Iについて,

↳ IがAの左イデアル $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall a\in A, x\in I : a*x\in I$

↳ IがAの右イデアル $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall a\in A, x\in I : x*a\in I$

- したがって, 「Aの左イデアル」=「$(A,\cdot)$の正規部分群」,
「Aの右イデアル」=「$(A,\cdot)$の正規部分群」.

Skew braceにおける左右イデアル(補足)

Skew braceにおける左イデアルと右イデアル(つづき)

- $A=(A,\cdot,\circ)$をskew braceとする.

- 加法群$(A,\cdot)$の部分群Iについて、

  ↳ IがAの左イデアル $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall a\in A, x\in I : a*x\in I$

  ↳ IがAの右イデアル $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall a\in A, x\in I : x*a\in I$

- 注1: Aの左イデアルも右イデアルも自動的に乗法群$(A,\circ)$の部分群となる.

$$x\circ y = x^{-1}\cdot(x*y)\cdot y^{-1}$$

$$\underbrace{\bar{x}}_{x\text{の}(A,\circ)\text{における逆元}} = ((\bar{x}*x)\cdot x)^{-1} = (x\cdot(x*\bar{x}))^{-1}$$

• 注2: Aの左イデアルIに対して、$\forall a \in A: a \bullet I = a \circ I$ が成り立つ.

$(\supseteq)$ $a \circ x = a \bullet ((a * x) \bullet x)$

$(\subseteq)$ $a \bullet x = a \circ ((\bar{a} * x) \bullet x)$ —— $\boxed{左}$

• 注3: Aの右イデアルIに対して、$\forall a \in A: I \bullet a \supseteq I \circ a$ が成り立つ.

$(\supseteq)$ $x \circ a = (x \bullet (x * a)) \bullet a$

$(\subseteq)$ $x \bullet a = (????????) \circ a$ —— $\boxed{右}$

$\boxed{左}$では、$\bar{a} \circ (a \bullet x) = (\bar{a} \circ a) \bullet \bar{a}^{-1} \bullet (\bar{a} \circ x)$ ← brace relation

$= \bar{a}^{-1} \bullet (\bar{a} \circ x) \bullet x^{-1} \bullet x$

$= (\bar{a} * x) \bullet x$ と計算できるが…

$\bar{a}$: aの$(A, \circ)$における逆元

右では、$(x\cdot a)\circ \bar{a} \overset{?}{=} (x\circ\bar{a})\cdot\bar{a}^{-1}\cdot(a\circ\bar{a})$ ← brace relation の右バージョン

$$= x\cdot x^{-1}\cdot(x\circ\bar{a})\cdot\bar{a}^{-1}$$

$$= x\cdot(x*\bar{a})$$ と計算できるとは限らない.

$I\cdot a \neq I\circ a$ を満たす右イデアルの具体例が欲しかったが、無限 skew brace を考えないといけなくて見つけられなかった.

- 注4: Skew brace の研究において、左イデアルは非常に重要であり、よく出てくるけれど、右イデアルに関しては、私が一回使ったことがあるだけで、他の論文では見たことがない気がする…

↳ C. Tsang, A generalization of Ito's theorem to skew braces, J. Algebra 642 (2024), 367-399.

Skew braceにおけるイデアル

Skew braceにおけるイデアル

- 環において、イデアルは商環を作るために必要な部分構造である。

- Skew braceにおいて、商skew braceを作るために必要な部分構造は?

- $A=(A,\cdot,\circ)$をskew braceとする。

- Aの部分集合Iがイデアルであるとは、

  (i) Iは加法群$(A,\cdot)$の正規部分群である。

  (ii) Iは乗法群$(A,\circ)$の正規部分群である。

  (iii) $\forall a\in A: a\cdot I = a\circ I$.

が成り立つときに言う。このとき、

$$A/I = \{a \cdot I : a \in A\} = \{a \circ I : a \in A\}$$

に対して、自然な群演算 $\cdot$ と $\circ$ を

$$(a \cdot I) \cdot (b \cdot I) = (a \cdot b) \cdot I$$
$$(a \circ I) \circ (b \circ I) = (a \circ b) \circ I$$

$a \cdot I = a \circ I$ は重要!!

とおくことができ、$(A/I, \cdot, \circ)$ は skew brace となる。

- 注：Skew brace において、「イデアル」$\neq$「左イデアル＋右イデアル」である。例えば、trivial skew brace $A = (A, \cdot, \cdot)$ において、

「Aの左イデアル」＝「Aの右イデアル」＝「$(A, \cdot)$ の部分群」だったが、
「Aのイデアル」＝「$(A, \cdot)$ の正規部分群」である。

Skew braceの表現について

$$\text{Radical環} \longrightarrow \text{Skew brace} \longleftarrow \text{群}$$

- 環論或いは群論における研究手法、概念、定理などをskew braceに拡張する研究が多々ある.

- 最近、skew braceの表現がLetourmy-Vendraminによって定義された. その定義はZhuに基づいている.

↳ T. Letourmy, L. Vendramin, Schur covers of finite skew braces. J. Algebra 644 (2024), 609-654.

↳ H. Zhu, The construction of braided tensor categories from Hopf brace, Linear Multilinear Algebra 70 (2022), no. 16, 3171-3188.

Skew braceの表現（係数体Kを固定しておく）

- $A=(A,\cdot,\circ)$をskew braceとする．このとき、Aの加法群$(A,\cdot)$と乗法群$(A,\circ)$、2つの群がある．

- Letourmy-Vendraminによると、Aの表現とは、

(i) 加法群の表現 $\beta:(A,\cdot)\to GL(V)$

(ii) 乗法群の表現 $\rho:(A,\circ)\to GL(V)$

作用されるベクトル空間は同じものとする．

の組(β,ρ)であって、かつ

(iii) $\forall a,b\in A:\ \beta((a\circ b)\cdot a^{-1})=\rho(a)\beta(b)\rho(a)^{-1}$ ← 何じゃこりゃ??

を満たすものである．

Skew braceのlambda写像

- $A=(A,\cdot,\circ)$をskew braceとする．Aのlambda写像とは，

$$\lambda : (A,\circ) \longrightarrow \mathrm{Aut}(A,\cdot)\ ;\ a \longmapsto \lambda_a\ ,\quad \lambda_a(b) = a^{-1}\cdot(a\circ b)$$

のことを指す．λが群準同型であるのはよく知られている．

- Skew braceの研究においてλを使うのが一般的であるが，ここではLetourmy-Vendraminに従って，以下の写像を使う．

$$\lambda^{op} : (A,\circ) \longrightarrow \mathrm{Aut}(A,\cdot)\ ;\ a \longmapsto \lambda^{op}_a\ ,\quad \lambda^{op}_a(b) = (a\circ b)\cdot a^{-1}$$

同様に，λ^{op}も群準同型である．左右の選択の違いだけであって，λを使ってもλ^{op}を使っても本質は変わらないはず．

Skew braceの表現（つづき）

• $A=(A,\cdot,\circ)$ をskew braceとする．Aの表現とは，

(i) 加法群の表現 $\beta:(A,\cdot)\longrightarrow GL(V)$

(ii) 乗法群の表現 $\rho:(A,\circ)\longrightarrow GL(V)$

作用されるベクトル空間は同じものとする．

の組 (β,ρ) であって，かつ

$\lambda^{op}:(A,\circ)\longrightarrow Aut(A,\cdot)$ は群準同型である．

(iii) $\forall a,b\in A:\ \beta(\lambda^{op}_a(b))=\rho(a)\beta(b)\rho(a)^{-1}$

を満たすものである．

この共役作用を反映している

$\underset{\substack{\uplus\\ b}}{(A,\cdot)}\rtimes_{\lambda^{op}}\underset{\substack{\uplus\\ a}}{(A,\circ)}$ において $\lambda^{op}_a(b)=aba^{-1}$ が成り立つ．

半直積群の定義

• ということは、Aの表現とは、

(i) 加法群の表現 $\beta : (A, \cdot) \to GL(V)$
(ii) 乗法群の表現 $\rho : (A, \circ) \to GL(V)$

作用されるベクトル空間は同じものとする。

のなすペア (β, ρ) であって、かつ

(iii) $\varphi_{(\beta,\rho)} : (A, \cdot) \rtimes_{\lambda^{op}} (A, \circ) \to GL(V)$; $\varphi_{(\beta,\rho)}(b, a) = \beta(b)\rho(a)$ が準同型

を満たすものとして定義することもできる。

• したがって、Letourmy-Vendramin ではこのようには記述されていないが、

$$\text{skew brace } (A, \cdot, \circ) \text{ の表現} \equiv \text{群 } (A, \cdot) \rtimes_{\lambda^{op}} (A, \circ) \text{ の表現}$$

$$(\beta, \rho) \longleftrightarrow \varphi_{(\beta,\rho)}$$

- この対応を鑑みて、既約、直既約、完全可約などの性質に対して、

$$(\beta,\rho)\text{が}\underline{\qquad\quad}\text{である} \overset{\text{def}}{\iff} \varphi_{(\beta,\rho)}\text{が}\underline{\qquad\quad}\text{である}$$

と定義するのが自然である。

- 問：群の表現論をどこまでskew braceの表現論に展開できるか？

- 私たちの論文では、以下の定理のskew brace版を考えた。

  ↳ Maschkeの定理とその逆

  ↳ Cliffordの定理（weak ver. と strong ver.）

  ↳ 定理：char(k) = pが正であるとき、有限群Gに対して、

$$|G| = p^* \iff G\text{の既約表現は自明な表現のみ}.$$

Cliffordの定理(weak ver.)のskew brace版

- **群の場合**

  Gが有限群であり、NがGの正規部分群であるとき、
  Gの任意の既約表現ρについて、$\rho|_N$は完全可約である。

- **skew braceの場合**

  (I,・,∘)もskew braceとなる

  $A=(A,\cdot,\circ)$が有限skew braceであり、IがAのイデアルであるとき、
  Aの任意の既約表現(β,ρ)について、$(\beta|_I,\rho|_I)$は完全可約である。

- **証明** skew brace $(A,\cdot,\circ)$の表現 $\overset{1:1}{\Longleftrightarrow}$ 群$(A,\cdot)\rtimes_{\lambda^{op}}(A,\circ)$の表現

$$(\beta,\rho) \longleftrightarrow \varphi_{(\beta,\rho)}$$

この対応より、(β,ρ)がskew brace $A=(A,\cdot,\circ)$の既約表現

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\varphi_{(\beta,\rho)}$ が群 $(A,\cdot)\rtimes_{\lambda^{op}}(A,\circ)$ の既約表現

$\overset{\text{Clifford}}{\implies}$ $\varphi_{(\beta,\rho)}|_{(I,\cdot)\rtimes(I,\circ)}$ が群 $(I,\cdot)\rtimes_{\lambda^{op}}(I,\circ)$ の完全可約表現

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $(\beta|_I,\rho|_I)$ が skew brace $I=(I,\cdot,\circ)$ の完全可約表現

$\to$ $(I,\cdot)\rtimes_{\lambda^{op}}(I,\circ)$ は $(A,\cdot)\rtimes_{\lambda^{op}}(A,\circ)$ の正規部分群だから使える.

For any $(a,b)\in\Lambda_A$ and $(x,y)\in\Lambda_I$, we first observe that

$$\lambda_b(x),\ b\lambda_b(x)b^{-1},\ z,\ \overline{a}\circ z\circ a,\ \lambda_a(\overline{a}\circ z\circ a)\in I \tag{3.3}$$

because I is an ideal of A, where $z=b\circ y\circ\overline{b}$. Now, we have

$$\begin{aligned}(a,b)\cdot(x,y)\cdot(a,b)^{-1} &= (a\lambda_b^{\mathrm{op}}(x),b\circ y)\cdot(\lambda_{\overline{b}}^{\mathrm{op}}(a)^{-1},\overline{b})\\ &= (a\lambda_b^{\mathrm{op}}(x)\lambda_{b\circ y\circ\overline{b}}^{\mathrm{op}}(a)^{-1},b\circ y\circ\overline{b})\\ &= (a\cdot b\lambda_b(x)b^{-1}\cdot z\lambda_z(a)^{-1}z^{-1},z)\end{aligned}\tag{3.4}$$

in the group Λ_A. By (3.3), modulo the normal subgroup $(I,\cdot)$, we have

$$\begin{aligned}a\cdot b\lambda_b(x)b^{-1}\cdot z\lambda_z(a)^{-1}z^{-1} &\equiv a\lambda_z(a)^{-1}\\ &\equiv a(z\circ a)^{-1}z\\ &\equiv a(a\circ\overline{a}\circ z\circ a)^{-1}\\ &\equiv a(a\lambda_a(\overline{a}\circ z\circ a))^{-1}\\ &\equiv aa^{-1}\\ &\equiv 1\end{aligned}$$

今後の展望

- 他の定理のskew brace版?
- Skew braceの表現の応用?
- Skew braceの表現の定義の見直し?

本日ご紹介したのはLetourmy-VendraminとZhuによる定義ですが、もっと相応しい定義の仕方があるかもしれない??