

千葉大学大学院自然科学研究科

修士論文

位数 9 の基本アーベル群を不足群にもつ  
非主ブロックについてのブルエ予想

平成 18 年 2 月 提出

数学・情報数理学専攻

基礎数理学講座

相原 琢磨

## はじめに

素数  $p$  に対して,  $k$  を標数  $p$  の代数的閉体,  $G$  を有限群とする. このとき,  $k$  上  $G$  の群環  $kG$  の両側イデアルとしての直既約分解を

$$kG = B_0 \oplus B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$$

と書くことにする. このとき, 各  $B_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) をブロックと呼ぶ.  $G$  の  $k$  上の表現を考えることは,  $kG$ -加群を考えることと同値で, 任意の  $kG$ -加群  $M$  は,

$$M = M_0 \oplus M_1 \oplus \cdots \oplus M_t \quad (\text{各 } M_j \text{ は直既約})$$

と同型と順序を除いて一意に直和分解できる. すなわち,  $kG$ -加群を考えるときに重要になるのが直既約加群である. また, 任意の直既約加群  $N$  に対して, ある  $i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) がただ一つ存在して,  $NB_i \neq 0$ ,  $NB_\ell = 0$  ( $\ell \neq i$ ) を満たす (このとき,  $N$  は  $B_i$  に属するという. 特に, 自明な  $kG$ -加群  $k_G$  が属すブロックを主ブロックという). つまり,  $kG$ -加群を考えることは,  $kG$  の各ブロック  $B_i$ -加群を考えることに帰着される. さらに, ブロック  $B$  はその特性を決めると考えられる  $G$  の  $p$ -部分群  $P$  を持つ ( $(kG, kG)$ -加群としての  $B$  の vertex). これを  $B$  の不足群という. 例えば,  $P = 1$  のとき,  $B$  は単純環になることが知られている.

そこで, この  $p$ -部分群  $P$  の型によって,  $kG$  の表現を考えるわけだが, より小さい群  $H := N_G(P)$  (上でも述べたように  $P = 1$  のときは解明しているので,  $P \neq 1$  とする) の表現とはどのくらい似ているのか? M.Broué は 1988 年に次のような予想を立てた (予想 1.1 参照).

$P$  がアーベル群ならば,  $B$  と,  $B$  のブラウアー対応である  $H$  のブロック  $b$  は, 導来同値ではないか?

$P \triangleleft H$  であることで,  $kH$  の表現は,  $kG$  に比べよくわかっている. さらに, この予想は現在の有限群のモジュラー表現論における様々な予想に関係してくる. それらの点からこの『ブルエ予想』を考えることは大変意味がある.

このブルエ予想に関しては,  $G$  が  $p$ -可解群のとき, Dade[6], Harris-Linckelmann[10] によって, また,  $P$  が巡回群の場合は, Rickard[31], Linckelmann[21], Rouquier[35], [36, §10] によって解決されている. さらに,  $p = 2$  のとき,  $B$  が主ブロックの場合にはすべてのアーベル 2-群  $P$  に対して, 解決されている (奥山哲郎 [27], Rickard[31], Rouquier[35], [36], Erdmann[7]). そこで, 次に問題になるのが  $p = 3$ ,  $P = C_3 \times C_3$  の場合である. この場合,  $B$  が主ブロックについては, Puig, 奥山哲郎, 脇克志, 刃刀直子, 宮地兵衛, 越谷重夫らの結果 ([26], [30], [28], [18], [20], [14]) があり, 最終的には越谷-刃刀により解決されている ([15]). つまり, 主ブロックに対しては位数 9 の基本アーベル群  $C_3 \times C_3$  を Sylow 3-部分群に持つ (主ブロックの不足群は Sylow  $p$ -部分群であることが知られている [1]) 任意の群でブルエ予想が解決されている. ただし, 有限単純群の分類定理を用いる. では,  $B$  が不足群  $P = C_3 \times C_3$  を持つ非主ブロックではどうだろう? この場合, 特別な単純群については越谷-刃刀-脇 [16], [17] の結果がある. しかし, まだ一般的な解決はされていない. そこでここでは, 不足群が  $P = C_3 \times C_3$  となる非主ブロックを持つ群として, 位数 2 の巡回群  $C_2$  の  $\text{PSL}(3, 4)$ ,  $A_6$  それぞれによる中心拡大から得られる二つの群  $2.\text{PSL}(3, 4)$ ,  $2.A_6$  について, 『奥山の方法』[26] により, ブルエ予想が成り立つことを確かめる ( $2.\text{PSL}(3, 4)$  については,  $M_{22}$  の主ブロックでのブルエ予想に帰着されてしまい, 実質的には非主ブロックに属する単純加群の Green 対応の計算である.  $2.A_6$  については, より一般的なことが M.Holloway によって解決されている. それについては [11] を参照されたい).

ここで, 今後特に断りのない記号や定義, 定理については, Alperin[1], 永尾・津島 [24] を参照してほしい.

# 1 序論

有限群のモジュラー表現論では、ブラウアー (Brauer) が残した古くからのいくつかの重要な問題がある。それらをもとにして、ブルエ (Broué) が 1980 年代後半に次のような予想を立てた。

**予想 1.1** [4, 6.2 Question] 素数  $p$  に対して、有限群  $G$  の  $p$ -ブロック  $B$  が不足群  $P$  をもつとする。このとき、ブラウアーの第一主定理より、 $G$  における  $P$  の正規化群の  $p$ -ブロック  $b$  で、同じ不足群をもつものが、ただ一つ存在する。特に、 $P$  がアーベル群のとき、 $B$  と  $b$  は導来同値になるのではないかと？

ここでは、特別な群として、3 次射影特殊線形群および 6 次交代群の中心拡大を考え、これらの群の位数 9 の不足群をもつ非主ブロックに対して、このブルエ予想が成立することを確かめる。

## 1.1 定義と定理

この節では、この論文を通して必要となる定義と定理を述べる。

### 1.1.1 導来圏と導来同値

以下、 $\mathcal{C}$  をアーベル圏とする。また、 $A$  を環とすると、 $\text{Mod-}A$  を  $A$ -加群の圏、 $\text{mod-}A$  を有限生成  $A$ -加群の圏、 $\text{Proj-}A$  を射影  $A$ -加群の圏、 $\text{proj-}A$  を有限生成射影  $A$ -加群の圏とする。

**定義 1.2**  $\mathcal{C}$  の対象と射の列

$$X : \cdots X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots$$

に対して、すべての  $n$  で  $d^n d^{n-1} = 0$  を満たすとき、 $X$  を  $\mathcal{C}$  上の複体 という。また、二つの  $\mathcal{C}$  上の複体  $X, Y$  に対して、 $\mathcal{C}$  の射の列  $f = (f^n : X^n \rightarrow Y^n)$  が、 $f^{n+1} d_X^n = d_Y^n f^n$  を満たすとき、 $f : X \rightarrow Y$  を 複体の準同型 という。このとき、対象として  $\mathcal{C}$  上の複体、射としてその間の準同型をとったときの圏を  $\mathcal{C}$  上の複体の圏 といい、 $C(\mathcal{C})$  で表す。

$\mathcal{C}$  がアーベル圏より、 $C(\mathcal{C})$  もアーベル圏になる。また、複体  $X = (X^n)$  が有界 (下に有界, 上に有界) であるとは、 $|n| \gg 0 (n \ll 0, n \gg 0)$  に対して、 $X^n = 0$  であるときにいい、 $C^b(\mathcal{C}) (C^+(\mathcal{C}), C^-(\mathcal{C}))$  で表す。

**定義 1.3**  $X, Y$  を  $\mathcal{C}$  上の複体とし、 $f, g \in \text{Hom}_{C(\mathcal{C})}(X, Y)$  とする。このとき、 $f$  と  $g$  が ホモトープ であるとは、任意の  $n$  に対して、 $s^n \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^n, Y^{n-1})$  が存在して、 $f^n - g^n = d_Y^{n-1} s^n + s^{n+1} d_X^n$  を満たすときにいい、 $f \sim g$  で表す。また、 $\text{Ht}(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid f \sim 0\}$  は  $\text{Hom}_{C(\mathcal{C})}(X, Y)$  のイデアルで、このとき、対象は  $C(\mathcal{C})$ 、射は  $\text{Hom}_{C(\mathcal{C})}(X, Y)/\text{Ht}(X, Y)$  とする圏を ホモトピー圏 といい、 $K(\mathcal{C})$  で表す。

一般に、 $\mathcal{C}$  がアーベル圏としても  $K(\mathcal{C})$  はアーベル圏とは限らない。また、 $C^b(\mathcal{C}), C^+(\mathcal{C}), C^-(\mathcal{C})$  から得られるホモトピー圏をそれぞれ、 $K^b(\mathcal{C}), K^+(\mathcal{C}), K^-(\mathcal{C})$  で表す。

**定義 1.4**  $k \in \mathbb{Z}$  に対して、関手  $[k] : K(\mathcal{C}) \rightarrow K(\mathcal{C})$  を次のように定める。

$$\begin{aligned} \text{対象} : X = (X^n, d^n) &\longmapsto X[k] = (X^{n+k}, (-1)^k d^{n+k}) \\ \text{射} : f : X \rightarrow Y &\longmapsto f[k] : X[k] \rightarrow Y[k] \quad (f[k]^n := f^{n+k}) \end{aligned}$$

また、次のように  $K(\mathcal{C})$  での 三角形 (triangle) とその間の射を定義する.

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1] \quad , \quad \begin{array}{ccccccc} X & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z & \rightarrow & X[1] \\ f \downarrow & \circlearrowleft & g \downarrow & \circlearrowleft & h \downarrow & \circlearrowleft & f[1] \downarrow \\ X' & \rightarrow & Y' & \rightarrow & Z' & \rightarrow & X'[1] \end{array}$$

特に,  $f, g, h$  が同型るとき,  $(f, g, h)$  を 三角形の同型 という.

**定義 1.5**  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{C})}(X, Y)$  に対して,  $M(f) \in \text{Ob}(\mathcal{C}(\mathcal{C}))$  を次のように定義する.

$$\bullet M(f)^n := X^{n+1} \oplus Y^n, \quad d_{M(f)}^n := \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix}$$

このとき,  $M(f)$  を 写像錐 という. また,  $\alpha(f) : Y \rightarrow M(f), \alpha(f)^n := \begin{pmatrix} 0 \\ id_{Y^n} \end{pmatrix}, \beta(f) : M(f) \rightarrow X[1], \beta(f)^n := (id_{X^{n+1}}, 0)$  としたとき,  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[1]$  を 標準三角形 (standard triangle) といい, ある標準三角形に同型な三角形を 正規三角形 (distinguished triangle) という.

**定義 1.6** 加法的自己同型写像 (平行移動関手)  $T = [1]$  をもつアーベル圏  $\mathcal{C}$  と次の公理を満たす正規三角形の族を 三角圏 という.

(TR0) 正規三角形に同型な三角形は, 正規三角形である.

(TR1)  $X \xrightarrow{id} X \rightarrow 0 \rightarrow X[1]$  は正規三角形である.

(TR2) 任意の  $u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  に対して, 正規三角形  $X \xrightarrow{u} Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$  が存在する.

(TR3)  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$  が正規三角形であることと  $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$  が正規三角形であることは同値である.

(TR4) 二つの正規三角形  $X \xrightarrow{u} Y \rightarrow Z \rightarrow X[1], X' \xrightarrow{u'} Y' \rightarrow Z' \rightarrow X'[1]$  に対して, 任意の可換図式

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & & \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & & \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & & \end{array}$$

はある三角形の射に埋め込める.

(TR5) 次のような正規三角形  $X \xrightarrow{u} Y \rightarrow Z' \rightarrow X[1], Y \xrightarrow{v} Z \rightarrow X' \rightarrow Y[1], X \xrightarrow{vu} Z \rightarrow Y' \rightarrow X[1]$  に対して, 次の図形を可換にする正規三角形  $Z' \rightarrow Y' \rightarrow X' \rightarrow Z'[1]$  が存在する.

$$\begin{array}{ccccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & X[1] & & \\ \parallel & \circlearrowleft & v \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \parallel & & \\ X & \xrightarrow{vu} & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & X[1] & & \\ u \downarrow & \circlearrowleft & \parallel & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & & \\ Y & \xrightarrow{v} & Z & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y[1] & & \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \parallel & \circlearrowleft & \downarrow & & \\ Z' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Z'[1] & & \end{array}$$

**定理 1.7**  $K(\mathcal{C})$  は三角圏である.

$\text{Ob}(\mathcal{C}(\mathcal{C})) \ni X : \dots \rightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \dots$  に対して,  $\iota : \text{Ker}(d^n) \rightarrow X^n$  (自然な埋め込み) とする (アーベル圏  $\mathcal{C}$  より kernel と自然な埋め込みが存在する) と,  $d^n d^{n-1} = 0$  より,  $d^{n-1} = \iota a^{n-1}$  と

なる  $a^{n-1} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^{n-1}, \text{Ker}(d^n))$  が一意的に存在する. このとき,  $H^n(X) := \text{Coker}(a^{n-1}) \in \mathcal{C}$  (アーベル圏  $\mathcal{C}$  より cokernel と自然な全射が存在する) を  $X$  の コホモロジー という.

**命題 1.8**  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{C})}(X, Y)$  に対して,  $\exists! H^n(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(H^n(X), H^n(Y))$

証明)  $\iota_X : \text{Ker}(d_X^n) \rightarrow X^n$ ,  $\iota_Y : \text{Ker}(d_Y^n) \rightarrow Y^n$  を自然な埋め込み, 上のように定める  $X^{n-1} \rightarrow \text{Ker}(d_X^n)$ ,  $Y^{n-1} \rightarrow \text{Ker}(d_Y^n)$  をそれぞれ  $a^{n-1}$ ,  $b^{n-1}$  とする.  $(d_Y^n f^n)_{\iota_X} = f^{n+1}(d_X^n \iota_X) = 0$  より,  $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{Ker}(d_X^n), \text{Ker}(d_Y^n))$  が存在して,  $f^n \iota_X = \iota_Y \phi$ . よって,  $0 = f^n d_X^{n-1} - d_Y^{n-1} f^{n-1} = f^n \iota_X a^{n-1} - \iota_Y b^{n-1} f^{n-1} = \iota_Y \phi a^{n-1} - \iota_Y b^{n-1} f^{n-1} = \iota_Y (\phi a^{n-1} - b^{n-1} f^{n-1})$ . したがって,  $\text{Ker}(\iota_Y) = 0$  より,  $\phi a^{n-1} = b^{n-1} f^{n-1}$ . ここで,  $\pi_X : \text{Ker}(d_X^n) \rightarrow \text{Coker}(a^{n-1})$ ,  $\pi_Y : \text{Ker}(d_Y^n) \rightarrow \text{Coker}(b^{n-1})$  を自然な全射とすると,  $\pi_Y \phi a^{n-1} = (\pi_Y b^{n-1}) f^{n-1} = 0$ . ゆえに, cokernel の定義より,  $\pi_Y \phi = H^n(f) \pi_X$  となる  $H^n(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{Coker}(a^{n-1}), \text{Coker}(b^{n-1}))$  が一意的に存在する. ■

上の  $H^n(f)$  がすべての  $n$  で同型写像のとき,  $f$  は quasi-isomorphism (擬同型) であるという.

**定義 1.9**  $S$  を  $\mathcal{C}$  の射の類とし, 各  $s : X \rightarrow Y \in S$  に対して,  $x_s : Y \rightarrow X$  をとる.  $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$  が同値であるとは,

$$X \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{x_s} X \rightleftharpoons X \xrightarrow{id} X \quad , \quad Y \xrightarrow{x_s} X \xrightarrow{s} Y \rightleftharpoons Y \xrightarrow{id} Y$$

を使って,  $g$  を  $f$  に置き換えることができるときにいう. この関係は明らかに同値関係になる. このとき,  $\mathcal{C}[S^{-1}]$  を対象は  $\mathcal{C}$  の対象を, 射は  $\text{Hom}_{\mathcal{C}} / \sim$  としてとる. また,  $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$  ( $X \mapsto X, f \mapsto \tilde{f}$ ) (ここで,  $\tilde{f}$  は  $f$  を同値でわったもの) とする.

このとき, 次が成り立つ.

(1) 任意の  $s \in S$  に対して,  $L(s)$  は同型写像である.

(2) 関手  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  ( $\mathcal{B}$  はアーベル圏) で,  $s \in S$  ならば,  $F(s)$  は同型写像であるとすれば,  $F = EL$  となる関手  $E : \mathcal{C}[S^{-1}] \rightarrow \mathcal{B}$  が一意的に存在する.

証明) (1)  $L(s)^{-1} := L(x_s)$  とすればよい.

(2)  $E : \mathcal{C}[S^{-1}] \rightarrow \mathcal{B}$  ( $X \mapsto F(X), [X \xrightarrow{\tilde{f}} Y] \mapsto [F(X) \xrightarrow{F(\tilde{f})} F(Y)]$ ) で定義すればよい. ■

そこで,  $\mathcal{C}[S^{-1}]$  を 局所化圏,  $L$  を 局所関手 という.

**定理 1.10**  $K(\mathcal{C})$  は局所化できる. 特に,  $S$  を quasi-isomorphism の類としてとる.

**定義 1.11** 定理 1.10 で  $K(\mathcal{C})$  を局所化した圏  $K(\mathcal{C})[S^{-1}]$  を  $\mathcal{C}$  の 導来圏 といい,  $D(\mathcal{C})$  と表す.

また,  $K^b(\mathcal{C}), K^+(\mathcal{C}), K^-(\mathcal{C})$  から局所化される圏をそれぞれ  $D^b(\mathcal{C}), D^+(\mathcal{C}), D^-(\mathcal{C})$  で表す.

**定義 1.12**  $A, B$  を環とする.  $A$  と  $B$  が導来同値であるとは, 三角圏としての圏同値  $D^b(\text{mod-}A) \xrightarrow{\cong} D^b(\text{mod-}B)$  が存在するときをいう.

森田同値と導来同値の関係は次の定理からわかる.

**定理 1.13** (Happel)[8, 1.6 Theorem]  $k$  を代数閉体,  $A$  を  $k$  上の有限次元自己入射的代数とする.  $T$  が  $A$  上の射影生成右加群,  $B := \text{End}_A(T)$  ならば,  $A$  と  $B$  は導来同値である.

よって,  $k$  が代数的閉体,  $A := kG$  のブロックのとき,  $A$  と  $B$  が森田同値ならば,  $A$  と  $B$  は導来同値である. しかし, 一般に逆は成り立たない (e.g. 5 次交代群  $A_5$  と 4 次交代群  $A_4$  の主ブロック).

**定義 1.14**  $R$  を環とする.  $T$  が  $R$  上の傾斜複体であるとは,  $T$  が  $R$  上の有限生成射影加群の有界な複体で, 次の条件を満たすときにいう.

- (1) 任意の整数  $i$  に対して,  $\text{Hom}_{D^b(R)}(T, T[i]) = 0$ .
- (2)  $\text{add}(T) := \{C \in K^b(P_R) \mid C|_{\oplus T}\}$  とすると,  $\text{add}(T)$  は三角圏として,  $K^b(P_R)$  を生成する. ここで,  $P_R := \text{proj-}R$ ,  $N \mid M$  で  $N$  は  $M$  の直和因子を表す.

また傾斜複体を次のように得ることができる.

**定理 1.15** (Rickard)  $A$  は対称基礎代数,  $1_A = \sum_{i \in I} e_i$  を原始べき等元への直交和とする.  $I_0 \subseteq I$ ,  $i \in I$  に対して,

$$P_i^* := \begin{cases} 0 \rightarrow P_i \rightarrow 0 \rightarrow 0 & (i \in I_0) \\ 0 \rightarrow R_i \xrightarrow{f_i} P_i \rightarrow 0 & (i \notin I_0) \end{cases}$$

ここで,  $P_i := e_i A$ ,  $f_i : R_i \xrightarrow{\text{proj.cover}} e_i A e_i \hookrightarrow P_i$  ( $e := \sum_{i \in I_0} e_i$ ). このとき,  $P^* := \bigoplus_{i \in I} P_i^*$  は傾斜複体になる (参照:[22, 4.2]).

次の二つの定理は, 導来同値を見るためにとても有効である.

**定理 1.16** (Rickard)[32, Theorem 6.4]  $k$  を体,  $A, B$  を  $k$  上の有限次元代数とする. このとき, 次は同値である.

- (1)  $K^-(\text{Proj-}A)$  と  $K^-(\text{Proj-}B)$  は三角圏として同値である.
- (2)  $D^b(\text{Mod-}A)$  と  $D^b(\text{Mod-}B)$  は三角圏として同値である.
- (3)  $K^b(\text{Proj-}A)$  と  $K^b(\text{Proj-}B)$  は三角圏として同値である.
- (4)  $K^b(P_A)$  と  $K^b(P_B)$  は三角圏として同値である.
- (5)  $A$  上の傾斜複体  $T_A$  が存在して,  $B \simeq \text{End}_{D^b(\text{Mod-}A)}(T)$ .
- (6)  $D^b(\text{mod-}A)$  と  $D^b(\text{mod-}B)$  は三角圏として同値である.

**定理 1.17** [33, Theorem 3.3] 上の条件の下で, 次は同値である.

- (1)  $A$  と  $B$  は導来同値である.
- (2) 有界な両側  $(A, B)$ -複体  ${}_A X_B$  が存在して,  $-\otimes_A X$  が同値を与える関手である.

また, 次の公式を使って, 体上の代数の Cartan 行列を求めることができる.

**定理 1.18** [9, 1.3, 1.4]  $k$  を体とし,  $A$  を  $k$  上の代数とする. また,  $Q := (Q^r)_{r \in \mathbb{Z}}$ ,  $R := (R^s)_{s \in \mathbb{Z}}$  を傾斜複体の直和因子とすると, 次が成り立つ.

$$\dim_k \text{Hom}_{D^b(\text{mod-}A)}(Q, R) = \sum_{r, s} (-1)^{r-s} \dim_k \text{Hom}_A(Q^r, R^s)$$

さらに, 導来同値と stable 同値の関係は次の定理よりわかる.

**定理 1.19** [31, Theorem 2.1]  $A$  を自己入射的代数とする. このとき,

$$\underline{\text{mod-}}A \simeq D^b(\text{mod-}A)/K^b(P_A)$$

は三角圏としての圏同値である.

よって, 圏同値の関係は次のようになる.

$$\text{森田同値} \Rightarrow \text{導来同値} \Rightarrow \text{stable 同値}$$

### 1.1.2 加群の諸定理

以下,  $k$  を体,  $G$  を有限群とする. また, 考える加群はすべて有限次元とする. この節では, 後に使う加群の諸定理を述べる.

**定理 1.20** (奥山)[25, Lemma 2.2]  $Q$  を  $G$  の  $p$ -部分群,  $Q$  に関する  $G$  と  $N_G(Q)$  の間の Green 対応を  $f := f(G, Q, N_G(Q))$  とする. このとき,  $S$  が  $vertex$   $Q$  を持ち, 自明な  $source$  加群を持つ単純  $kG$ -加群ならば,  $f(S)_{N_G(Q)}$  は単純加群である.

**定理 1.21** (Scott)[3, Corollary 3.11.4]  $X$  を自明な  $source$  加群を持つ右  $kG$ -加群とすると,  $X$  は持ち上げ可能である. また,  $Y$  も自明な  $source$  加群を持つ右  $kG$ -加群とし, 対応する指標をそれぞれ  $\chi_X, \chi_Y$  とすると,  $\dim_k \text{Hom}_{kG}(X, Y) = (\chi_X, \chi_Y)_G$  が成り立つ.

**定理 1.22** (Robinson)[34, Theorem 10]  $G$  を有限群とし,  $H$  を  $G$  の部分群とする. また,  $S$  を単純  $kG$ -加群,  $T$  を単純  $kH$ -加群とする. このとき,  $[P(S) | T \uparrow^G] = [P(T) | S \downarrow_H]$ . ここで,  $[N | M]$  は  $M$  の直和因子における  $N$  の重複度.

**定理 1.23** (Carlson-Benson)[3, Theorem 3.1.9]  $M, N$  は  $kG$ -加群とする. このとき, 次は同値である.

$$(1) k_G | M \otimes N \qquad (2) N \simeq M^*, p \nmid \dim_k M$$

**定理 1.24** (Knörr)[13, Corollary 3.7]  $B$  を不足群  $P$  を持つ  $kG$  のブロックとする. このとき,  $P$  がアーベル群ならば,  $P$  に属するすべての単純加群の  $vertex$  は  $P$  である.

## 2 Green 対応

以下,  $p$  を素数,  $k$  を標数  $p$  の代数的閉体,  $G$  を有限群,  $P$  は自明な共通部分を持つ (すなわち, 任意の  $g \in G - N_G(P)$  に対して,  $P \cap gPg^{-1} = 1$ ) Sylow  $p$ -部分群とする. また,  $H := N_G(P)$  とする. このとき,  $G$  と  $H$  の間の Green 対応は, 次のように定まる ([1, Theorem 10.1]).

$M$  を射影的でない直既約な右  $kG$ -加群として,  $(G, P, H)$  に関する  $M$  の Green 対応を  $N_{kH}$  とする. このとき,

$$M \downarrow_H \simeq N \oplus (\text{projective}) \quad , \quad N \uparrow^G \simeq M \oplus (\text{projective})$$

さらに,  $B$  を不足群  $P$  を持つ  $kG$  のブロックとすると, Brauer の第一主定理により, 不足群  $P$  を持つ  $kH$  のブロックが一意的に定まり, それを  $b$  と表すことにする. このとき, 上の Green 対応で,  $M$  が  $B$  に属することと  $N$  が  $b$  に属することは同値である (Brauer の第二主定理).

この節では,  $\text{char } k = 3$  で,  $G$  が  $2.\text{PSL}(3, 4)$ ,  $2.A_6$  のとき, 非主ブロック  $B$  に属する単純加群の  $P$  に関する  $G$  と  $H$  の間の Green 対応を求める. 以下, その Green 対応を  $f := f(G, P, H)$  とする.

### 2.1 $G := 2.\text{PSL}(3, 4)$

$G$  の通常指標表は次の通りである (ATLAS)[5].

<i>centralizer class</i>	40320 1A <sub>0</sub>	40320 1A <sub>1</sub>	128 2A <sub>0</sub>	128 2A <sub>1</sub>	18 3A <sub>0</sub>	18 3A <sub>1</sub>	32 4A <sub>0</sub>	32 4A <sub>1</sub>	16 4B	16 4C	10 5A <sub>0</sub>	10 5A <sub>1</sub>	10 5B <sub>0</sub>	10 5B <sub>1</sub>	14 7A <sub>0</sub>	14 7A <sub>1</sub>	14 7B <sub>0</sub>	14 7B <sub>1</sub>
$\chi_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_2$	20	20	4	4	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1
$\chi_3$	35	35	3	3	-1	-1	3	3	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\chi_4$	35	35	3	3	-1	-1	-1	-1	3	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\chi_5$	35	35	3	3	-1	-1	-1	-1	-1	3	0	0	0	0	0	0	0	0
$\chi_6$	45	45	-3	-3	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	$b_7$	$b_7$	$-b_7^{**}$	$-b_7^{**}$
$\chi_7$	45	45	-3	-3	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	$-b_7^{**}$	$-b_7^{**}$	$b_7$	$b_7$
$\chi_8$	63	63	-1	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	$-b_5$	$-b_5$	$-b_5^*$	$-b_5^*$	0	0	0	0
$\chi_9$	63	63	-1	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	$-b_5^*$	$-b_5^*$	$-b_5$	$-b_5$	0	0	0	0
$\chi_{10}$	64	64	0	0	1	1	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
$\chi_{11}$	10	-10	2	-2	1	-1	2	-2	0	0	0	0	0	0	$b_7$	$-b_7$	$b_7^{**}$	$-b_7^{**}$
$\chi_{12}$	10	-10	2	-2	1	-1	2	-2	0	0	0	0	0	0	$b_7^{**}$	$-b_7^{**}$	$b_7$	$-b_7$
$\chi_{13}$	28	-28	-4	4	1	-1	0	0	0	0	$-b_5$	$b_5$	$-b_5^*$	$b_5^*$	0	0	0	0
$\chi_{14}$	28	-28	-4	4	1	-1	0	0	0	0	$-b_5^*$	$b_5^*$	$-b_5$	$b_5$	0	0	0	0
$\chi_{15}$	36	-36	4	-4	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
$\chi_{16}$	64	-64	0	0	1	-1	0	0	0	0	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
$\chi_{17}$	70	-70	-2	2	-2	2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\chi_{18}$	90	-90	2	-2	0	0	-2	2	0	0	0	0	0	0	-1	1	-1	1

ここで,  $b_7 := \frac{-1 + \sqrt{-7}}{2}$ ,  $b_7^* := \frac{-1 - \sqrt{-7}}{2}$ ,  $b_5 := \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ,  $b_5^* := \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$  である.

通常指標表から簡単にわかるように, Sylow  $p$ -部分群  $P$  は基本アーベル群  $C_3 \times C_3$  で,  $\text{PSL}(3, 4)$  の Sylow  $p$ -部分群が自明な共通部分をもつことから,  $P$  も自明な共通部分を持つ. また, 非主ブロックの不足群の位数は 9 より, 非主ブロックの不足群は  $P$  である. このとき, 非主ブロックの分解行列は次のようになることがわかっていて ([12]).

	$10_1$	$10_1^*$	$6_1$	$22_1$	$22_2$
$\chi_{11}$	1	0	0	0	0
$\chi_{12}$	0	1	0	0	0
$\chi_{13}$	0	0	1	0	1
$\chi_{14}$	0	0	1	1	0
$\chi_{16}$	1	1	0	1	1
$\chi_{17}$	1	1	1	1	1

また,  $\chi_i$  ( $6 \leq i \leq 9$ ),  $\chi_{15}$ ,  $\chi_{18}$  はすべて射影単純加群である. さらに,  $P$  はアーベル群より, 定理 1.24 からすべての単純加群の vertex は  $P$  である.

**補題 2.1**  $10_1, 10_1^*$  は自明な source 加群を持つ.

証明)  $A_6 \subseteq \text{PSL}(3, 4)$  より,  $N/Z(G) \simeq A_6$  となる  $G$  の部分群  $N$  が存在する. よって,  $N \simeq 2.A_6$  または  $A_6 \times Z(G)$ . しかし,  $2.A_6$  は位数 8 の元を持つが,  $G$  に位数 8 の元はない. したがって,  $N \simeq A_6 \times Z(G)$ .  $N$  の通常指標表は次の通り.

centralizer class	$1A_0$	$2A_0$	$3A_0$	$3A_0$	$4A_0$	$5A_0$	$5B_0$	$1A_1$	$2A_1$	$3A_1$	$3A_1$	$4A_1$	$5A_1$	$5B_1$
	$\cup$ 720 1a	$\cup$ 16 2a	$\cup$ 18 3a	$\cup$ 18 3b	$\cup$ 8 4a	$\cup$ 10 5a	$\cup$ 10 $b^*$	$\cup$ 720 $1a'$	$\cup$ 16 $2a'$	$\cup$ 18 6a	$\cup$ 18 6b	$\cup$ 8 $4a'$	$\cup$ 10 $10a$	$\cup$ 10 $10b^*$
$\chi_1''$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_2''$	5	1	2	-1	-1	0	0	5	1	2	-1	-1	0	0
$\chi_3''$	5	1	-1	2	-1	0	0	5	1	-1	2	-1	0	0
$\chi_4''$	8	0	-1	-1	0	$-b_5$	*	8	0	-1	-1	0	$-b_5$	*
$\chi_5''$	8	0	-1	-1	0	*	$-b_5$	8	0	-1	-1	0	*	$-b_5$
$\chi_6''$	9	1	0	0	1	-1	-1	9	1	0	0	1	-1	-1
$\chi_7''$	10	-2	1	1	0	0	0	10	-2	1	1	0	0	0
$\chi_8''$	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
$\chi_9''$	5	1	2	-1	-1	0	0	-5	-1	-2	1	1	0	0
$\chi_{10}''$	5	1	-1	2	-1	0	0	-5	-1	1	-2	1	0	0
$\chi_{11}''$	8	0	-1	-1	0	$-b_5$	*	-8	0	1	1	0	$b_5$	*
$\chi_{12}''$	8	0	-1	-1	0	*	$-b_5$	-8	0	1	1	0	*	$b_5$
$\chi_{13}''$	9	1	0	0	1	-1	-1	-9	-1	0	0	-1	1	1
$\chi_{14}''$	10	-2	1	1	0	0	0	-10	2	-1	-1	0	0	0

また、簡単に確かめられるように、 $\chi_8'' | \chi_{k_P} \uparrow^G$  より、 $\chi_8''$  は自明な source 加群を持つ。さらに、 $\chi_8'' \uparrow^G = \chi_{11} + \chi_{12} + \chi_{15}$ 。もし、 $\begin{pmatrix} 10_1 \\ 10_1^* \end{pmatrix}$  となる自明な source 加群を持つ  $kG$ -加群が存在するならば、定理 1.21 より、 $\dim_k \text{Hom}_{kG} \left( \begin{pmatrix} 10_1 \\ 10_1^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10_1 \\ 10_1^* \end{pmatrix} \right) = (\chi_{11} + \chi_{12}, \chi_{11} + \chi_{12})_G = 2$  となり、矛盾する。ゆえに、 $\chi_8''$  に対応する単純  $kN$ -加群を  $L$  とすれば、 $10_1 \oplus 10_1^* | L \uparrow^G | k_P \uparrow^G$  となり、 $10_1, 10_1^*$  は自明な source 加群を持つことがわかる。 ■

定理 1.20 と補題 2.1 より、 $f(10_1), f(10_1^*)$  はともに単純加群で、 $f(10_1^*) = f(10_1)^*$  より、Green 対応の単射性から  $b$  に属する単純  $kH$ -加群には自己双対でないものが存在する。このことから次のように  $H$  が定まる。

**命題 2.2**  $H \simeq (C_3 \times C_3) \rtimes (C_4 \times C_4)$

証明) よく知られているように、 $H/Z(G) = N_{G/Z(G)}(PZ(G)/Z(G)) \simeq N_{\text{PSL}(3,4)}(C_3 \times C_3) \simeq (C_3 \times C_3) \rtimes Q_8$ 。よって、 $Z(G) \triangleleft X \subseteq G$  で、 $X/Z(G) \simeq Q_8$  となる部分群  $X$  が存在する。すなわち、 $H/Z(G) = PZ(G)/Z(G) \rtimes X/Z(G)$ 。したがって、 $H = P \rtimes X$ 。ここで、上の条件を満たす群は、 $C_4 \times C_4$  または  $Q_8 \times C_2$ 。しかし、 $Q_8 \times C_2$  の単純加群はすべて自己双対的であるが、補題 2.1 の後のことからこれは矛盾。ゆえに、 $X \simeq C_4 \times C_4$  となり、 $H \simeq (C_3 \times C_3) \rtimes (C_4 \times C_4)$  である。 ■

$H$  の通常指標表は次のようになる。

class centralizer	$1A_0$	$3A_0$	$2A_0$	$4A_0$	$4B$	$4C$	$1A_1$	$3A_1$	$2A_1$	$4A_1$	$4B$	$4C$
	$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cup$
	$1a_0$	$3a_0$	$2a_0$	$4a_0$	$4b_0$	$4c_0$	$2a_1$	$6a_1$	$2a_1$	$4a_1$	$4b_1$	$4c_1$
	144	18	16	8	8	8	144	18	16	8	8	8
$\chi'_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi'_2$	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
$\chi'_3$	1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1
$\chi'_4$	1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1
$\chi'_5$	2	2	-2	0	0	0	2	2	-2	0	0	0
$\chi'_6$	8	-1	0	0	0	0	8	-1	0	0	0	0
$\chi'_7$	1	1	1	1	$i$	$i$	-1	-1	-1	-1	$-i$	$-i$
$\chi'_8$	1	1	1	1	$-i$	$-i$	-1	-1	-1	-1	$i$	$i$
$\chi'_9$	1	1	1	-1	$i$	$-i$	-1	-1	-1	1	$-i$	$i$
$\chi'_{10}$	1	1	1	-1	$-i$	$i$	-1	-1	-1	1	$i$	$-i$
$\chi'_{11}$	2	2	-2	0	0	0	-2	-2	2	0	0	0
$\chi'_{12}$	8	-1	0	0	0	0	-8	1	0	0	0	0

ここで、 $\text{mod } Z(G)$  として、 $1a_0 = 2a_1, 3a_0 = 6a_1, 2a_0 = 2a_1, 4a_0 = 4a_1, 4b_0 = 4b_1, 4c_0 = 4c_1$  として書いた。さらに、 $H$  での共役類が上のように  $G$  の共役類のそれぞれに含まれている。なぜなら、 $\mathbb{N} \ni (\chi_{11} \downarrow_H, \chi'_7)$  より、 $4B \supseteq 4b_0, 4b_1, 4C \supseteq 4c_0, 4c_1$ 。さらに、 $C_4 \times C_4 := \langle b \rangle \rtimes \langle a \rangle$  とすると、 $a^i b^j \mapsto a^{i+2j} b^{2i+j}$  は自己同型写像で、 $b \mapsto a^2 b$  に移す。したがって、 $4a_0 := (b), 4a_1 := (a^2 b)$  を含む  $G$  の共役類は  $4A_0, 4A_1$  のどちらでもよく、 $4A_0 \supseteq 4a_0, 4A_1 \supseteq 4a_1$  とする。このとき、 $\mathbb{N} \ni (\chi_{17} \downarrow_H, \chi'_7)$  より、 $2A_0 \supseteq 2a_0$  でなければならない。

さらに、このことから  $H$  は二つのブロックを持ち、非主ブロック  $b$  の分解行列は次のようになる (特に、 $H$  は可解群より、簡単に求めることができる)。

	$1_x$	$1_x^*$	$1_y$	$1_y^*$	$2_2$
$\chi'_7$	1				
$\chi'_8$		1			
$\chi'_9$			1		
$\chi'_{10}$				1	
$\chi'_{11}$					1
$\chi'_{12}$	1	1	1	1	2

また、 $G$  と  $H$  の通常指標表から、 $(\chi_i, \chi'_j \uparrow^G)_G = (\chi_i \downarrow_H, \chi'_j)$  を計算することができ、次のようになる。

	$\chi_1$	$\chi_2$	$\chi_3$	$\chi_4$	$\chi_5$	$\chi_6$	$\chi_7$	$\chi_8$	$\chi_9$	$\chi_{10}$	$\chi_{11}$	$\chi_{12}$	$\chi_{13}$	$\chi_{14}$	$\chi_{15}$	$\chi_{16}$	$\chi_{17}$	$\chi_{18}$	
$\chi'_1 \uparrow^G$	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1									
$\chi'_2 \uparrow^G$	0	1	2	0	0	0	0	1	1	1									
$\chi'_3 \uparrow^G$	0	1	0	2	0	0	0	1	1	1									
$\chi'_4 \uparrow^G$	0	1	0	0	2	0	0	1	1	1									
$\chi'_5 \uparrow^G$	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2									
$\chi'_6 \uparrow^G$	0	2	4	4	4	5	5	7	7	7									
$\chi'_7 \uparrow^G$											1	1	0	0	1	1	1	1	
$\chi'_8 \uparrow^G$											1	1	0	0	1	1	1	1	
$\chi'_9 \uparrow^G$											0	0	0	0	1	1	0	2	
$\chi'_{10} \uparrow^G$											0	0	0	0	1	1	0	2	
$\chi'_{11} \uparrow^G$											0	0	2	2	0	2	2	2	
$\chi'_{12} \uparrow^G$											1	1	3	3	4	7	8	10	

**命題 2.3**  $b$  上の直既約な射影加群の Loewy 列と Socle 列は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1_x \\ 2_2 \\ 1_y 1_y^* 1_x^* \\ 2_2 \\ 1_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_x^* \\ 2_2 \\ 1_y 1_y^* 1_x \\ 2_2 \\ 1_x^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_y \\ 2_2 \\ 1_x 1_x^* 1_y^* \\ 2_2 \\ 1_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_y^* \\ 2_2 \\ 1_x 1_x^* 1_y \\ 2_2 \\ 1_y^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2_2 \\ 1_x 1_x^* 1_y 1_y^* \\ 2_2 2_2 2_2 \\ 1_x 1_x^* 1_y 1_y^* \\ 2_2 \end{pmatrix}$$

証明)  $P$  は  $H$  の正規 Sylow  $p$ -部分群より、 $kH$ -加群  $U$  は  $\text{rad}(U) = \text{rad}(U \downarrow_P)$  を満たす。さらに、よく知られているように、直既約な射影  $kP$ -加群はただひとつで、Loewy 列と Socle 列は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} k_P \\ k_P k_P \\ k_P k_P k_P \\ k_P k_P \\ k_P \end{pmatrix}$$

さらに,  $b$  の Cartan 行列は,

	$1_x$	$1_x^*$	$1_y$	$1_y^*$	$2_2$
$P'_{1_x}$	2	1	1	1	2
$P'_{1_x^*}$	1	2	1	1	2
$P'_{1_y}$	1	1	2	1	2
$P'_{1_y^*}$	1	1	1	2	2
$P'_{2_2}$	2	2	2	2	5

より, 主張が成り立つ. ■

#### 定理 2.4

$$f(10_1) = 1_x, f(10_1^*) = 1_x^*$$

証明) 補題 2.1 と定理 1.20 より,  $f(10_1), f(10_1^*)$  は単純加群. さらに, p.9 の表から,  $\chi_{11}\downarrow_H = \chi'_7 + \chi'_8 + \chi'_{12}$ ,  $\chi_{12}\downarrow_H = \chi'_7 + \chi'_8 + \chi'_{12}$ . よって,  $f(10_1) = 1_x$  または  $1_x^*$ . これは共役類の取り方で変わるから,  $f(10_1) = 1_x$  としてよい. したがって,  $f(10_1^*) = 1_x^*$ . ■

定理 2.4 から  $10_1\downarrow_H = 1_x \oplus P(1_x^*), 10_1^*\downarrow_H = 1_x^* \oplus P(1_x)$ . また, p.9 表と定理 1.22 より,  $1_x\uparrow^G = 10_1 \oplus P(10_1^*) \oplus \chi_{15} \oplus \chi_{18}$ ,  $1_x^*\uparrow^G = 10_1^* \oplus P(10_1) \oplus \chi_{15} \oplus \chi_{18}$ .

#### 定理 2.5

$$f(6_1) = \begin{pmatrix} 2_2 \\ 1_x 1_x^* \\ 2_2 \end{pmatrix}$$

証明) p.9 の表と  $B$  の分解行列より,  $6_1\downarrow_H = \chi_{17}\downarrow_H - \chi_{16}\downarrow_H = -\chi'_9 - \chi'_{10} + \chi'_{12} = [1_x, 1_x^*, 2_2, 2_2]$ . ただし,  $[ ]$  は組成剰余群列. さらに,  $\text{Hom}_{k_H}(6_1\downarrow_H, 1_x) = \text{Hom}_{k_G}(6_1, 1_x\uparrow^G) = 0$ ,  $\text{Hom}_{k_H}(6_1\downarrow_H, 1_x^*) = \text{Hom}_{k_G}(6_1, 1_x^*\uparrow^G) = 0$ ,  $\text{Hom}_{k_H}(1_x, 6_1\downarrow_H) = \text{Hom}_{k_G}(1_x\uparrow^G, 6_1) = 0$ ,  $\text{Hom}_{k_H}(1_x^*, 6_1\downarrow_H) = \text{Hom}_{k_G}(1_x^*\uparrow^G, 6_1) = 0$ . したがって, 定理の主張を得る. ■

また, 主ブロックに属する単純加群について次のことがわかっている. ([12])

$[B_0(G)$ の分解行列]						,	$[B_0(H)$ の分解行列]					
	$k_G$	19	$15_a$	$15_b$	$15_c$		$k_H$	$1_a$	$1_b$	$1_c$	$2_1$	
$\chi_1$	1	0	0	0	0	$\chi'_1$	1					
$\chi_2$	1	1	0	0	0	$\chi'_2$		1				
$\chi_3$	1	1	1	0	0	$\chi'_3$			1			
$\chi_4$	1	1	0	1	0	$\chi'_4$				1		
$\chi_5$	1	1	0	0	1	$\chi'_5$					1	
$\chi_{10}$	0	1	1	1	1	$\chi'_6$	1	1	1	1	2	

さらに, 直既約な射影  $k_G$ -加群の Loewy 列と Socle 列は次の通り [37, Theorem 2.2].

$$\begin{pmatrix} k_G \\ 1919 \\ k_G k_G k_G 15_a 15_b 15_c \\ 1919 \\ k_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15_i \\ 19 \\ k_G 15_j 15_k \\ 19 \\ 15_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ k_G k_G 15_a 15_b 15_c \\ 191919 \\ k_G k_G 15_a 15_b 15_c \\ 19 \end{pmatrix} (\{i, j, k\} = \{a, b, c\})$$

**補題 2.6** 次が成り立つ.

$$(1) 10_1 \otimes 10_1^* \simeq k_G \oplus P(15_a)$$

$$(2) 6_1 \otimes 10_1 \simeq 15_a \oplus \chi_7$$

証明) (1) 定理 1.23 より,  $10_1 \otimes 10_1^* = \chi_1 + \chi_3 + \chi_{10} = k_G \oplus P(15_a)$ . ここで,  $P(15_a) \mid 10_1 \otimes 10_1^*$  であることは次を計算すればよい.

$$1_x \uparrow^G \otimes 10_1^* = 10_1 \otimes 10_1^* \oplus (\text{proj.})$$

$$\begin{aligned} 1_x \uparrow^G \otimes 10_1^* &= (1_x \otimes 10_1^* \downarrow_H) \uparrow^G \\ &= 1_x \otimes 1_x^* \oplus (\text{proj.}) \end{aligned}$$

$$(2) 6_1 \otimes 10_1 = -\chi_2 + \chi_3 + \chi_6 = 15_a \oplus \chi_7.$$

**補題 2.7**  $(10_1 \otimes 22_1) \cdot 1_{B_0(G)} \simeq \begin{pmatrix} 15_b \\ 19 \\ 15_c \end{pmatrix}$  または  $\begin{pmatrix} 15_c \\ 19 \\ 15_b \end{pmatrix}$ .

証明)  $10_1^* \otimes 15_b = -\chi_{11} + \chi_{17} + \chi_{18} = [6_1, 10_1^*, 22_1, 22_2] \oplus \chi_{18}$ . さらに, 補題 2.6 より,  $\text{Hom}_{k_G}(10_1^* \otimes 15_b, 6_1) = \text{Hom}_{k_G}(15_b, 10_1 \otimes 6_1) = 0$ ,  $\text{Hom}_{k_G}(10_1^* \otimes 15_b, 10_1^*) = \text{Hom}_{k_G}(15_b, 10_1 \otimes 10_1^*) = 0$ .  $\text{Hom}_{k_G}(6_1, 10_1^* \otimes 15_b) = \text{Hom}_{k_G}(10_1 \otimes 6_1, 15_b) = 0$ ,  $\text{Hom}_{k_G}(10_1^*, 10_1^* \otimes 15_b) = \text{Hom}_{k_G}(10_1 \otimes 10_1^*, 15_b) = 0$ . よって,  $\text{top}((10_1^* \otimes 15_b) \cdot 1_{B_0(G)}) = 22_1$  かつ  $\text{soc}((10_1^* \otimes 15_b) \cdot 1_{B_0(G)}) = 22_2$  または  $\text{top}((10_1^* \otimes 15_b) \cdot 1_{B_0(G)}) = 22_2$  かつ  $\text{soc}((10_1^* \otimes 15_b) \cdot 1_{B_0(G)}) = 22_1$ . 同様に,  $\text{top}((10_1^* \otimes 15_c) \cdot 1_{B_0(G)}) = 22_1$  かつ  $\text{soc}((10_1^* \otimes 15_c) \cdot 1_{B_0(G)}) = 22_2$  または  $\text{top}((10_1^* \otimes 15_c) \cdot 1_{B_0(G)}) = 22_2$  かつ  $\text{soc}((10_1^* \otimes 15_c) \cdot 1_{B_0(G)}) = 22_1$ . さらに, 補題 2.6 より,  $10_1^* \otimes 15_b \not\simeq 10_1^* \otimes 15_c$ .  $15_b \otimes 15_c = [k_G, 19, 19, 15_a, 15_a, 15_b, 15_c]$  より,  $\text{Hom}_{k_G}(10_1^* \otimes 15_b, 10_1^* \otimes 15_c) = \text{Hom}_{k_G}(15_b, 10_1 \otimes 10_1^* \otimes 15_c) = \text{Hom}_{k_G}(15_b, 15_c \otimes P(15_a)) = \text{Hom}_{k_G}(15_b \otimes 15_c, P(15_a)) \neq 0$ . ゆえに, 次のどちらか一方が成り立つ.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad (10_1^* \otimes 15_b) \cdot 1_{B_0(G)} &= \begin{pmatrix} 22_1 \\ 6_1 10_1^* \\ 22_2 \end{pmatrix}, & (10_1^* \otimes 15_c) \cdot 1_{B_0(G)} &= \begin{pmatrix} 22_2 \\ 6_1 10_1^* \\ 22_1 \end{pmatrix} \\ \text{(ii)} \quad (10_1^* \otimes 15_b) \cdot 1_{B_0(G)} &= \begin{pmatrix} 22_2 \\ 6_1 10_1^* \\ 22_1 \end{pmatrix}, & (10_1^* \otimes 15_c) \cdot 1_{B_0(G)} &= \begin{pmatrix} 22_1 \\ 6_1 10_1^* \\ 22_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで,  $B$  と  $b$  は stable 同値より,  $\text{Ext}_B^1(6_1, 10_1^*) = \text{Ext}_b^1(f(6_1), 1_x^*) = \text{Hom}_{k_H}(\Omega(f(6_1)), 1_x^*) = 0$  より,  $\text{rad/soc}$  がわかる.

さらに,  $10_1 \otimes 22_1 = \chi_2 - \chi_3 + \chi_{10} + \chi_6 + \chi_8 + \chi_9 = [15_b, 15_c, 19] \oplus \chi_6 \oplus \chi_8 \oplus \chi_9$ .

(i) のとき:  $\text{Hom}_{k_G}(10_1 \otimes 22_1, 15_b) = \text{Hom}_{k_G}(22_1, 10_1^* \otimes 15_b) = 0$ ,  $\dim_k \text{Hom}_{k_G}(10_1 \otimes 22_1, 15_c) = \dim_k \text{Hom}_{k_G}(22_1, 10_1^* \otimes 15_c) = 1$ . また,  $\text{Ext}_{k_G}^1(15_i, 15_j) = 0$  ( $\{i, j\} = \{b, c\}$ ) より,

$$(10_1 \otimes 22_1) \cdot 1_{B_0(G)} = \begin{pmatrix} 15_c \\ 19 \\ 15_b \end{pmatrix}.$$

(ii) のとき:  $\text{Hom}_{k_G}(10_1 \otimes 22_1, 15_c) = \text{Hom}_{k_G}(22_1, 10_1^* \otimes 15_c) = 0$ ,  $\dim_k \text{Hom}_{k_G}(10_1 \otimes 22_1, 15_b) = \dim_k \text{Hom}_{k_G}(22_1, 10_1^* \otimes 15_b) = 1$ . また,  $\text{Ext}_{k_G}^1(15_i, 15_j) = 0$  ( $\{i, j\} = \{b, c\}$ ) より,

$$(10_1 \otimes 22_1) \cdot 1_{B_0(G)} = \begin{pmatrix} 15_b \\ 19 \\ 15_c \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

また,  $kG$  の主ブロックに属する単純加群の Green 対応は次のように知られている.

$$\text{定理 2.8 } f(k_G) = k_H, \quad 15_i \downarrow_H = \begin{pmatrix} 2_1 \\ k_H 1_i \\ 2_1 \end{pmatrix} \oplus P(1_i), \quad 19 \downarrow_H = \begin{pmatrix} 1_a 1_b 1_c \\ 2_1 2_1 \\ 1_a 1_b 1_c \end{pmatrix} \oplus P(k_H)$$

ここで,  $i \in \{a, b, c\}$ .

このことから,  $V_{kG} := \begin{pmatrix} 15_a 15_b 15_c \\ 19 \ 19 \\ 15_a 15_b 15_c \end{pmatrix}$  とすると,  $f(V) = 2_1$  であることがわかる. なぜなら, p.9 の表より,  $2_1 \uparrow^G = \chi'_5 \uparrow^G = 2\chi_{10} + 2(\chi_6 + \chi_7 + \chi_8 + \chi_9)$ . さらに,  $\dim_k \text{Hom}_{kG}(2_1 \uparrow^G, 15_i) = \dim_k \text{Hom}_{kH}(2_1, 15_i \downarrow_H) = 1$ ,  $\text{Hom}_{kG}(2_1 \uparrow^G, 19) = \text{Hom}_{kH}(2_1, 19 \downarrow_H) = 0$ . ここで,  $i \in \{a, b, c\}$ . したがって,  $\text{top}(2_1 \uparrow^G \cdot 1_{B_0(G)}) = 15_a \oplus 15_b \oplus 15_c$ . また,  $\dim_k \text{Hom}_{kG}(15_i, 2_1 \uparrow^G) = \dim_k \text{Hom}_{kH}(15_i \downarrow_H, 2_1) = 1$ ,  $\text{Hom}_{kG}(19, 2_1 \uparrow^G) = \text{Hom}_{kH}(19 \downarrow_H, 2_1) = 0$ . ここで,  $i \in \{a, b, c\}$ . したがって,  $\text{soc}(2_1 \uparrow^G \cdot 1_{B_0(G)}) = 15_a \oplus 15_b \oplus 15_c$ . ゆえに,  $\text{Ext}_{kG}^1(19, 19) = 0$  より,  $2_1$  の Green 対応は  $V$  であることがわかる.

$$\text{補題 2.9 } N = \begin{pmatrix} 15_i \\ 19 \\ 15_k \oplus 15_j \end{pmatrix} \text{ となる } V \text{ の部分加群が存在する. } (\{i, j, k\} = \{a, b, c\})$$

証明)  $15_i \mid \text{top}(V)$  より,  $\text{top}(N) = 15_i$  となる  $V$  の単純でない部分加群  $N$  が存在する. また,  $\text{soc}(V) = 15_a \oplus 15_b \oplus 15_c$  より,  $N$  の可能性としては

$$\begin{pmatrix} 15_i \\ 19 \\ 15_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15_i \\ 19 \\ 15_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15_i \\ 19 \\ 15_k \oplus 15_j \end{pmatrix}$$

の三通り. もし,  $N = \begin{pmatrix} 15_i \\ 19 \\ 15_k \end{pmatrix}$  ならば,  $15_i \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V/N$  は 0 でない単射より,  $V' := (V/N)/15_i$  とする.  $V \twoheadrightarrow V'$  より, 中山の補題で  $\text{top}(V')$  の直和因子は  $15_k$  か  $15_j$  で重複はない. また,  $15_j \subseteq V$  は  $15_j \not\subseteq N$  より,  $15_j \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V'$  は 0 でない単射. したがって,  $15_j \mid \text{soc}(V')$ . しかし,  $P(15_k), P(15_j)$  より,  $V' = \begin{pmatrix} 15_k \\ 19 \\ 15_j \end{pmatrix} \oplus 15_j$  にならなければならない. しかし,  $\dim_k \text{Ext}_{kG}^1(15_i, 15_j) = 0$  より,  $15_j \oplus 15_j \subseteq V/N$ . ゆえに,  $N \subseteq N' \subseteq V$  で,  $N'/N = 15_j \oplus 15_j$  となるものが存在する. したがって,  $\text{rad}(N) \subseteq \text{rad}(N') \subseteq N$  だが,  $\dim_k \text{Ext}_{kG}^1(15_i, 15_j) = 0$  より,  $\text{rad}(N') = \begin{pmatrix} 19 \\ 15_k \end{pmatrix}$  しかない. よって,  $N'/\text{rad}(N') = 15_i \oplus 15_j \oplus 15_j$ ,  $\text{soc}(V) = 15_a \oplus 15_b \oplus 15_c$  より,  $N' = \begin{pmatrix} 15_i 15_j \\ 19 \\ 15_k \end{pmatrix} \oplus 15_j$ .

$U := \begin{pmatrix} 15_i 15_j \\ 19 \\ 15_k \end{pmatrix}$  とする. また,  $15_k \mid \text{top}(V)$  より,  $\text{top}(M) = 15_k$  となる  $V$  の単純でない部分加群

$M$  が存在する. この場合, 上と同様に,  $M' = \begin{pmatrix} 15_k 15_i \\ 19 \\ 15_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15_k 15_j \\ 19 \\ 15_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15_k \\ 19 \\ 15_i 15_j \end{pmatrix}$  のいずれかは存在する. しかし, いずれの場合も,  $\text{soc}(U \cap M') \subseteq \text{soc}(U) \cap \text{soc}(M') = 0$  より,  $U \cap M' = 0$ . よって,  $U \oplus M' \subseteq V$ . したがって, 次元を比べて  $U \oplus M' = V$  となり,  $V$  が直既約であることに矛盾する.

したがって、 $V$  の部分加群  $U$  は存在しない。ゆえに、 $N$  も存在しない。同様に、 $N = \begin{pmatrix} 15_i \\ 19 \\ 15_j \end{pmatrix}$  の場合

も矛盾するので、 $N = \begin{pmatrix} 15_i \\ 19 \\ 15_k \oplus 15_j \end{pmatrix}$  でしかない。 ■

ここで、 $P(15_i)$  より、上の  $N$  のような加群は同型を除いて一意に定まることに注意する。

定理 2.10  $f$  の逆写像を  $g$  とすると、

$$g(1_y) = \begin{pmatrix} 22_1 \\ 10_1 10_1^* \\ 22_2 \end{pmatrix}, \quad g(1_y^*) = \begin{pmatrix} 22_2 \\ 10_1 10_1^* \\ 22_1 \end{pmatrix}$$

証明) 定理 2.4 より、 $1_y \uparrow^G, 1_y^* \uparrow^G$  は  $\text{top}, \text{soc}$  に  $10_1, 10_1^*$  を持たない。また、 $B$  と  $b$  は  $\text{stable}$  同値より、 $\text{Ext}_B^1(10_1, 10_1^*) = \text{Ext}_b^1(1_x, 1_x^*) = 0$ 。したがって、題意が成り立つ。ここで、 $\text{top}(g(1_y))$  は共役類の取り方で変わる。 ■

定理 2.11

$$f(22_1) = \begin{pmatrix} 1_y^* \\ 2_2 \\ 1_y \end{pmatrix}$$

証明)  $M := (10_1 \otimes 22_1) \cdot 1_{B_0(G)}$  とすると、補題 2.7 より、 $M = \begin{pmatrix} 15_i \\ 19 \\ 15_j \end{pmatrix}$  ( $\{i, j\} = \{b, c\}$ )。また、定

理 2.8 より、 $P(1_b) \oplus P(1_c) \oplus P(k_H) \mid M \downarrow_H$ 。ここで、補題 2.9 より、 $N := \begin{pmatrix} 15_j \\ 19 \\ 15_a 15_i \end{pmatrix} \subseteq V$  とす

ると、 $M \xrightarrow{\text{inj.hull}} P(15_j) \xrightarrow{\text{proj.cover}} N \hookrightarrow V$  は 0 でない射影準同型。よって、 $\text{Hom}_{kG}(M, 2_1 \uparrow^G) \simeq \text{Hom}_{kH}(M \downarrow_H, 2_1)$  より、 $\text{Hom}_{kH}(M \downarrow_H, 2_1)$  は 0 でない射影準同型を持つ。したがって、 $P(2_1) \mid M \downarrow_H$ 。ゆえに、 $M$  の Green 対応  $f(M)$  の組成因子はちょうど 3 つであることがわかる。ここで、 $f(22_1) =: U$  とおくと、

$$\begin{aligned} 1_x \uparrow^G \otimes 22_1 &= 10_1 \otimes 22_1 \oplus (\text{proj.}) \\ &= M \oplus (\text{proj.}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1_x \uparrow^G \otimes 22_1 &= (1_x \otimes 22_1 \downarrow_H) \uparrow^G \\ &= (1_x \otimes U) \uparrow^G \oplus (\text{proj.}) \end{aligned}$$

$U$  は直既約より、 $1_x \otimes U$  も直既約だから、 $f(M) = 1_x \otimes U$ 。ゆえに、 $U$  の組成因子はちょうど 3 つより、

$$U = \begin{pmatrix} 1_y^* \\ 2_2 \\ 1_y \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

同様に、 $f(22_2)$  について次のことがわかる。

定理 2.12

$$f(22_2) = \begin{pmatrix} 1_y \\ 2_2 \\ 1_y^* \end{pmatrix}$$

証明)  $(10_1 \otimes 22_2) \cdot 1_{B_0(G)} = \chi_2 - \chi_3 + \chi_{10}$  より, 補題 2.7 と同様に,  $(10_1 \otimes 22_2) \cdot 1_{B_0(G)} = \begin{pmatrix} 15_b \\ 19 \\ 15_c \end{pmatrix}$

または  $\begin{pmatrix} 15_c \\ 19 \\ 15_b \end{pmatrix}$ . さらに,  $M := (10_1 \otimes 22_2) \cdot 1_{B_0(G)} = \begin{pmatrix} 15_i \\ 19 \\ 15_j \end{pmatrix}$  とすると, 定理 2.10 と同

様に,  $\text{Hom}_{kG}(M, 2_1 \uparrow^G)$  は 0 でない射影準同型を持つ. したがって,  $\text{Hom}_{kG}(M, 2_1 \uparrow^G) \simeq \text{Hom}_{kH}(M \downarrow_H, 2_1)$  より,  $\text{Hom}_{kH}(M \downarrow_H, 2_1)$  は 0 でない射影準同型を持つ. ゆえに,  $P(1_b) \oplus P(1_c) \oplus P(k_H) \oplus P(2_1) | M \downarrow_H$  より,  $M$  の Green 対応の組成因子はちょうど 3 つ. ここで,  $f(22_2) =: U$  とおくと,

$$\begin{aligned} 1_x \uparrow^G \otimes 22_2 &= 10_1 \otimes 22_2 \oplus (\text{proj.}) \\ &= M \oplus (\text{proj.}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1_x \uparrow^G \otimes 22_2 &= (1_x \otimes 22_2 \downarrow_H) \uparrow^G \\ &= (1_x \otimes U) \oplus (\text{proj.}) \end{aligned}$$

$U$  は直既約より,  $1_x \otimes U$  もまた直既約. よって,  $f(M) = 1_x \otimes U$  で,  $U$  はちょうど 3 つの組成因子を持つ. したがって, 題意が成り立つ. ■

## 2.2 $G := 2.A_6$

$G$  の通常指標表は次の通りである (ATLAS)[5].

<i>centralizer class</i>	720 1A	720 2A	8 4A	18 3A	18 6A	18 3B	18 6B	8 8A <sub>0</sub>	8 8A <sub>1</sub>	10 5A	10 10A	10 5B	10 10B
$\chi_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_2$	5	5	1	2	2	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0
$\chi_3$	5	5	1	-1	-1	2	2	-1	-1	0	0	0	0
$\chi_4$	8	8	0	-1	-1	-1	-1	0	0	$-b_5$	$-b_5$	$-b_5^*$	$-b_5^*$
$\chi_5$	8	8	0	-1	-1	-1	-1	0	0	$-b_5^*$	$-b_5^*$	$-b_5$	$-b_5$
$\chi_6$	9	9	1	0	0	0	0	1	1	-1	-1	-1	-1
$\chi_7$	10	10	-2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
$\chi_8$	4	-4	0	-2	2	1	-1	0	0	-1	1	-1	1
$\chi_9$	4	-4	0	1	-1	-2	2	0	0	-1	1	-1	1
$\chi_{10}$	8	-8	0	-1	1	-1	1	0	0	$-b_5$	$b_5$	$-b_5^*$	$b_5^*$
$\chi_{11}$	8	-8	0	-1	1	-1	1	0	0	$-b_5^*$	$b_5^*$	$-b_5$	$b_5$
$\chi_{12}$	10	-10	0	1	-1	1	-1	$r_2$	$-r_2$	0	0	0	0
$\chi_{13}$	10	-10	0	1	-1	1	-1	$-r_2$	$r_2$	0	0	0	0

通常指標表から簡単にわかるように,  $G$  の Sylow 3-部分群  $P$  は基本アーベル群  $C_3 \times C_3$  であることがわかる. また, よく知られているように,  $A_6$  の Sylow 3-部分群は自明な共通部分を持つから,  $P$  も自明な共通部分を持つ. また, 非主ブロックの不足群の位数は 9 より,  $P$  を不足群に持つことがわかる. このとき,  $G$  の非主ブロック  $B$  の分解行列は次のようになることがわかっている ([12]).

	$2_1$	$2_2$	$6_1$	$6_2$
$\chi_8$	1	1	0	0
$\chi_9$	1	1	0	0
$\chi_{10}$	0	1	1	0
$\chi_{11}$	1	0	0	1
$\chi_{12}$	1	1	1	0
$\chi_{13}$	1	1	0	1

さらに,  $P$  はアーベル群より, 定理 1.24 からすべての単純加群の vertex は  $P$  である.

**命題 2.13**  $H \simeq (C_3 \times C_3) \rtimes C_8$

証明) よく知られているように,  $H/Z(G) = N_{A_6}(PZ(G)/Z(G)) \simeq (C_3 \times C_3) \times C_4$ . よって,  $Z(G) \triangleleft X$  で  $X/Z(G) \simeq C_4$  となる  $H$  の部分群  $X$  が存在し,  $H = P \rtimes X$ . また,  $|X| = 8$  より,  $X$  の可能性としては次の 5 通り.

(i)  $X$  がアーベル群のとき

①  $C_8$

②  $C_4 \times C_2$

③  $C_2 \times C_2 \times C_2$

(ii)  $X$  が非アーベル群のとき

①  $D_8$

②  $Q_8$

しかし, (i)②, ③ は  $G$  が位数 2 の元を唯一つ持つことに, (ii) は  $Z(X) = Z(G)$  となり  $X/Z(G) = C_4$  となることに矛盾する. したがって,  $X = C_8$  となり,  $H \simeq (C_3 \times C_3) \rtimes C_8$  である. ■

$H$  の通常指標表は次のようになる.

	1A  U	3A  U	3B  U	8A <sub>0</sub>  U	4A  U	8A <sub>1</sub>  U	2A  U	6A  U	6B  U	8A <sub>1</sub>  U	4A  U	8A <sub>0</sub>
centralizer	72	18	18	8	8	8	72	18	18	8	8	8
class	1a	3a	3b	8a <sub>0</sub>	4a	8a <sub>1</sub>	2a	6a	6b	8b <sub>0</sub>	4b	8b <sub>1</sub>
$\chi'_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi'_2$	1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1
$\chi'_3$	1	1	1	$i$	-1	$-i$	1	1	1	$i$	-1	$-i$
$\chi'_4$	1	1	1	$-i$	-1	$i$	1	1	1	$-i$	-1	$i$
$\chi'_5$	4	1	-2	0	0	0	4	1	-2	0	0	0
$\chi'_6$	4	-2	1	0	0	0	4	-2	1	0	0	0
$\chi'_7$	1	1	1	$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$	$i$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$	-1	-1	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$	$-i$	$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$
$\chi'_8$	1	1	1	$-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$	$i$	$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$	-1	-1	-1	$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$	$-i$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$
$\chi'_9$	1	1	1	$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$	$-i$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$	-1	-1	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$	$i$	$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$
$\chi'_{10}$	1	1	1	$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$	$-i$	$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$	-1	-1	-1	$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$	$i$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$
$\chi'_{11}$	4	1	-2	0	0	0	-4	-1	2	0	0	0
$\chi'_{12}$	4	-2	1	0	0	0	-4	2	-1	0	0	0

ここで,  $i := \sqrt{-1}$  である. また,  $\text{mod } Z(G)$  として,  $1a = 2a$ ,  $3a = 6a$ ,  $3b = 6b$ ,  $8a_0 = 8b_0$ ,  $4a = 4b$ ,  $8a_1 = 8b_1$  として書いた. さらに,  $8a_i \subseteq 8A_i$ ,  $8b_i \subseteq 8A_j$  ( $\{i, j\} = \{0, 1\}$ ) であることは,  $(\chi'_7, \chi'_{12} \downarrow_H)_H \in \mathbb{N}$  であることよりわかる. また,  $H$  は二つのブロックを持ち, 非主ブロック  $b$  の分解行列は次のようになる (特に  $H$  は可解群より, 簡単に求めることができる).

	$1_x$	$1_y$	$1_x^*$	$1_y^*$
$\chi'_7$	1			
$\chi'_8$		1		
$\chi'_9$			1	
$\chi'_{10}$				1
$\chi'_{11}$	1	1	1	1
$\chi'_{12}$	1	1	1	1

また  $G$  と  $H$  の通常指標表より,  $(\chi \downarrow_H, \chi')_H = (\chi, \chi' \uparrow^G)$  を計算することができ, 次のようになる.

	$\chi_1$	$\chi_2$	$\chi_3$	$\chi_4$	$\chi_5$	$\chi_6$	$\chi_7$	$\chi_8$	$\chi_9$	$\chi_{10}$	$\chi_{11}$	$\chi_{12}$	$\chi_{13}$
$\chi'_1 \uparrow^G$	1	0	0	0	0	1	0						
$\chi'_2 \uparrow^G$	0	1	1	0	0	0	0						
$\chi'_3 \uparrow^G$	0	0	0	0	0	0	1						
$\chi'_4 \uparrow^G$	0	0	0	0	0	0	1						
$\chi'_5 \uparrow^G$	0	1	0	1	1	1	1						
$\chi'_6 \uparrow^G$	0	0	1	1	1	1	1						
$\chi'_7 \uparrow^G$								0	0	0	0	1	0
$\chi'_8 \uparrow^G$								0	0	0	0	0	1
$\chi'_9 \uparrow^G$								0	0	0	0	1	0
$\chi'_{10} \uparrow^G$								0	0	0	0	0	1
$\chi'_{11} \uparrow^G$								0	1	1	1	1	1
$\chi'_{12} \uparrow^G$								1	0	1	1	1	1

**定理 2.14**

$$f(2_1) = \begin{pmatrix} 1_x \\ 1_x^* \end{pmatrix}, \quad f(2_2) = \begin{pmatrix} 1_y \\ 1_y^* \end{pmatrix}$$

証明) 上の表より,  $2_1 \downarrow_H = \chi_8 \downarrow_H + \chi_{11} \downarrow_H - \chi_{13} \downarrow_H = -\chi'_8 - \chi'_{10} + \chi'_{12} = [1_x, 1_x^*]$ . この組成列は共役類の

取り方によって変わるから,  $f(2_1) = \begin{pmatrix} 1_x \\ 1_x^* \end{pmatrix}$  としてよい.

同様に,  $2_2 \downarrow_H = \chi_{13} \downarrow_H - \chi_{11} \downarrow_H = \chi'_8 + \chi'_{10} = [1_y, 1_y^*]$ . この組成列も共役類の取り方で変わるから,

$f(2_2) = \begin{pmatrix} 1_y \\ 1_y^* \end{pmatrix}$  としてよい. ■

また, 上の表と定理 2.14 より,  $f$  の逆写像を  $g$  とすると,

$$g(1_x) = \begin{pmatrix} 6_1 \\ 2_2 \\ 2_1 \end{pmatrix}, \quad g(1_x^*) = \begin{pmatrix} 2_1 \\ 2_2 \\ 6_1 \end{pmatrix}, \quad g(1_y) = \begin{pmatrix} 6_2 \\ 2_1 \\ 2_2 \end{pmatrix}, \quad g(1_y^*) = \begin{pmatrix} 2_2 \\ 2_1 \\ 6_2 \end{pmatrix}$$

であることがわかる.

**命題 2.15**  $b$  上の直規約な射影加群の *Loewy* 列と *Socle* 列は次のようになる.

$$\begin{pmatrix} 1_x \\ 1_x^* 1_y \\ 1_y^* 1_x 1_y^* \\ 1_x^* 1_y \\ 1_x \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1_x^* \\ 1_x 1_y^* \\ 1_y^* 1_x 1_y^* \\ 1_x 1_y^* \\ 1_x^* \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1_y \\ 1_y^* 1_x \\ 1_x^* 1_y 1_x^* \\ 1_y^* 1_x \\ 1_y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1_y^* \\ 1_y 1_x^* \\ 1_x 1_y^* 1_x \\ 1_y 1_x^* \\ 1_y^* \end{pmatrix}$$

証明)  $b$  の Cartan 行列は次の通り.

	$1_x$	$1_y$	$1_x^*$	$1_y^*$
$P(1_x)$	3	2	2	2
$P(1_y)$	2	3	2	2
$P(1_x^*)$	2	2	3	2
$P(1_y^*)$	2	2	2	3

また,  $f(2_1)$  から  $P(1_x)$  について次のことがわかる.

$$\begin{pmatrix} 1_x \\ 1_x^* m \\ n 1_x n \\ 1_x^* m \\ 1_x \end{pmatrix}$$

ここで,  $\{m, n\} = \{1_y, 1_y^*\}$  また, p.17 の表と定理 2.14 の後のことより,  $\dim_k(f(6_1)) = 6$ ,  $\text{top}(f(6_1)) = 1_x^*$ ,  $\text{soc}(f(6_1)) = 1_x$ . さらに,  $\text{Hom}_{kG}(P(6_1), P(6_2)) = 0$  で,  $B$  と  $b$  は stable 同値より,  $0 = \text{Ext}_B^1(g(1_y), 6_1) = \text{Ext}_b^1(1_y, f(6_1)) = \text{Hom}_{kH}(1_y, \Omega^{-1}(f(6_1)))$ . したがって,  $n = 1_y^*$ .  
 また同じように,  $P(1_y)$  もわかる. ■

よって, 命題 2.15 より,  $6_1$  と  $6_2$  の Green 対応が次のように求まる.

定理 2.16

$$f(6_1) = \begin{pmatrix} 1_x^* \\ 1_x 1_y^* \\ 1_y 1_x^* \\ 1_x \end{pmatrix}, \quad f(6_2) = \begin{pmatrix} 1_y^* \\ 1_y 1_x^* \\ 1_x 1_y^* \\ 1_y \end{pmatrix}$$

### 3 ブルエ予想

この節では、『奥山の方法』[26]に従って、 $2.\text{PSL}(3, 4)$ ,  $2.A_6$  の非主ブロックについてブルエ予想が成り立つことを確かめる。以下、記号の取り方は節 2 と同じとする。

**定義 3.1**  $B$  と  $b$  が  $M$  と  $N$  で森田型の *stable* 同値であるとは、両側  $(B, b)$ -加群  $M$  と両側  $(b, B)$ -加群  $N$  が存在して、

$$\begin{aligned} M \otimes_b N &= B \oplus \text{proj.}(B, B)\text{-mods} \quad (\text{as } (B, B)\text{-mods}) \\ N \otimes_B M &= b \oplus \text{proj.}(b, b)\text{-mods} \quad (\text{as } (b, b)\text{-mods}) \end{aligned}$$

を満たすときにいう。またこのとき、

$$\begin{aligned} - \otimes_B M &: \underline{\text{mod}}\text{-}B \rightarrow \underline{\text{mod}}\text{-}b \\ - \otimes_b N &: \underline{\text{mod}}\text{-}b \rightarrow \underline{\text{mod}}\text{-}B \end{aligned}$$

は互いに逆の *stable* 加群圏としての圏同値を与える。

さらに、上の仮定で、次のことが成り立つ。

**定理 3.2** (*Linckelmann*)[23, Theorem 2.1]  $M$  が直既約射影自由ならば、

- (i) 任意の単純  $B$ -加群  $S$  に対して、 $S \otimes_B M$  は直既約加群
- (ii) 任意の単純  $B$ -加群  $S$  に対して、 $S \otimes_B M$  が単純  $b$ -加群ならば、 $B$  と  $b$  は森田同値。

『奥山の方法』とは次のような段階でブルエ予想の成立を確かめる方法である。

**方法 3.3** [奥山の方法]

- ① 単純  $B$ -加群  $S$  の *Green* 対応  $X_b$  をとる。
- ② ”上手に”  $I_0 \subseteq I$  をとり、定理 1.15 のように傾斜複体  $P_1^*$  を作ると、定理 1.16 より、 $B_{I_1} := \text{End}_{D^b(\text{mod-}b)}(P_1^*) \stackrel{\text{derived equiv.}}{\sim} b$ 。そこで、定義 3.1, 定理 3.2 のように  ${}_b M_{I_1 B_1}$  をとり、 $X \otimes_b M_{I_1} = Y \oplus (\text{proj.})$  となる  $Y_{B_1}$  を計算する。
- ③ 上のとき、任意の単純  $B$ -加群  $S$  に対して、 $Y_{B_1}$  が単純加群ならば、定理 3.2 より、 $B \stackrel{\text{Morita equiv.}}{\sim} B_{I_1}$ 。よって、 $B \stackrel{\text{derived equiv.}}{\sim} b$  を得る。
- ④ もし、③において  $Y_{B_1}$  が単純加群でないものが存在したら、②のことを続ければよい。
- ⑤ 最終的に任意の  $S_B$  に対して、対応する  $B_i$ -加群がすべて単純加群ならば、ブルエ予想が成立することが確かめられる。

しかし、実際には” $M$ ”を見つけるのが困難である。そこで、次の定理を適用する。

**定理 3.4** [26, Lemma 2.1]  $A$  を対称基礎代数とし、 $1_A := \sum_{i \in I} e_i$  を原始べき等元の直交和とする。また、定理 1.15 のように得られる  $A$  の傾斜複体を  $P^*$  とし、 $a := \text{End}_{D^b(\text{mod-}A)}(P^*)$  とする。また、 $a$  のべき等元も  $e_i$  を使って表すことにする。

このとき、 $X$  を射影的でない直既約  $A$ -加群とし、 $X \otimes_A M = Y \oplus (\text{proj.})$  ( $Y$  は直既約  $a$ -加群、 $M$  は森田型の *stable* 同値を導く両側  $(A, a)$ -加群) ならば、

- (i)  $X(1 - e) = X$  のとき、 $Y(1 - e) = Y$ 。実際には、同型  $A/AeA \simeq a/aea$  を通して、 $X = Y$ 。

(ii)  $\text{soc}(X)e = \text{soc}(X)$ ,  $i \in I_0$  が存在して,  $\text{top}(X) = S_i$ ,  $\Omega(X)e = S_i$  ならば,  $Y = S_i$ .

ここで,  $e := \sum_{i \in I_0} e_i$ .

さらに,  $B$  は対称代数より, 今までの議論を双対的に実行できる.

**定理 3.5** [定理 1.15]'  $A$  は対称基礎代数,  $1_A = \sum_{i \in I} e_i$  を原始べき等元への直交和とする.  $I_0 \subseteq I$ ,  $i \in I$  に対して,

$$P_i^* := \begin{cases} \begin{array}{ccccccc} & & -1th & & 0th & & \\ & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_i & \rightarrow & 0 & (i \in I_0) \\ & 0 & \rightarrow & P_i & \xrightarrow{f_i} & Q_i & \rightarrow & 0 & (i \notin I_0) \end{array} \end{cases}$$

ここで,  $P_i := e_i A$ ,  $U_i \subseteq P_i$  を組成因子  $S_k$  ( $k \notin I_0$ ) となる最大の部分加群とし,  $f_i : P_i \rightarrow P_i/U_i \xrightarrow{\text{inj.hull}} Q_i$ . このとき,  $P^* := \bigoplus_{i \in I} P_i^*$  は傾斜複体になる.

**定理 3.6** [定理 3.4]' [26, Lemma 2.1]'  $A$  を対称基礎代数とし,  $1_A := \sum_{i \in I} e_i$  を原始べき等元の直交和とする. また, 定理 3.5 のように得られる  $A$  の傾斜複体を  $P^*$  とし,  $a := \text{End}_{D^b(\text{mod-}A)}(P^*)$  とする. また,  $a$  のべき等元も  $e_i$  を使って表すことにする.

このとき,  $X$  を射影的でない直既約  $A$ -加群とし,  $X \otimes_A M = Y \oplus (\text{proj.})$  ( $Y$  は直既約  $a$ -加群,  $M$  は森田型の *stable* 同値を導く両側  $(A, a)$ -加群) ならば,

- (i)  $X(1-e) = X$  のとき,  $Y(1-e) = Y$ . 実際には, 同型  $A/AeA \simeq a/aea$  を通して,  $X = Y$ .
- (ii)  $\text{top}(X)e = \text{top}(X)$ ,  $i \in I_0$  が存在して,  $\text{soc}(X) = S_i$ ,  $\Omega^{-1}(X)e = S_i$  ならば,  $Y = S_i$ .

ここで,  $e := \sum_{i \in I_0} e_i$ .

また, 次の定理も有効である.

**定理 3.7** (Külshammer, Puig)[19, A. Theorem], [29, Proposition 14.6], [2]  $A$  を不足群  $P$  を持つ  $kG$  のブロックとする. また,  $A$  の根  $a$  の惰性群を  $E := N_G(P, e)/PC_G(P)$  とする. このとき,  $P \triangleleft G$  ならば,  $n \in \mathbb{N}$  と因子団  $\alpha \in H^2(E, k^\times)$  が存在して,  $B \simeq \text{Mat}_n(k^\alpha[P \rtimes E])$  (*as k-algebras*).

以下の記号については上のようにとることにする. また, 定理 1.15 のように  $I_0$  をとるときは,  $\{ \}$  と書き, 定理 3.5 のようにとるときは,  $\{ \}'$  と書くことにする.

### 3.1 $G := 2.\text{PSL}(3, 4)$

この節では,  $G := 2.\text{PSL}(3, 4)$  についてブルエ予想の成立を確かめる. 節 2.1 より,  $G$  の非主ブロックに属する単純加群の,  $H$  との間の Green 対応は次の通り.

$$\begin{aligned} \text{simples in } B : & \quad 6_1, \quad 10_1, \quad 10_1^*, \quad 22_1, \quad 22_2 \\ \text{Green corresp. in } b : & \quad \begin{pmatrix} 2_2 \\ 1_x 1_x^* \\ 2_2 \end{pmatrix}, \quad 1_x, \quad 1_x^*, \quad \begin{pmatrix} 1_y^* \\ 2_2 \\ 1_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1_y \\ 2_2 \\ 1_y^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

さらに,  $C_G(P) = P \times C_2$  (ちょうど 2 つのブロックを持つ) より,  $b$  の根  $\beta$  の惰性群は  $N_G(P, e) = N_G(P)$  である. したがって,  $E := N_G(P, e)/C_G(P) \simeq Q_8$ . また,  $H^2(Q_8, k^\times) = 0$ . よって, 定理 3.7 より,

$$b \simeq k[(C_3 \times C_3) \rtimes Q_8] \text{ (as } k\text{-algebras)}$$

ここで,  $G' := M_{22}$  とすると,  $G'$  の Sylow 3-部分群  $P$  は  $C_3 \times C_3$  と同型で,  $H' := N_{G'}(P) \simeq (C_3 \times C_3) \rtimes Q_8$ . さらに,  $G'$  と  $H'$  の間の Green 対応は次のようになることがわかっている.

$$\begin{aligned} \text{simples in } B_0(G') : & \quad k_{G'}, \quad 55, \quad 49, \quad 49^*, \quad 231 \\ \text{Green corresp. in } B_0(H') : & \quad 0, \quad 1, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで,  $B_0(H')$  の単純加群の次元は番号と関係なく,  $0 := k_{H'}$ ,  $1, 2, 3$  は 1 次元,  $4$  は 2 次元である. さらに,  $G'$  においてはブルエ予想が成り立つことが確かめられている.

よって, 上の同型の対応で,

$$\begin{aligned} \text{In } b : & \quad \begin{pmatrix} 2_2 \\ 1_x 1_x^* \\ 2_2 \end{pmatrix}, \quad 1_x, \quad 1_x^*, \quad \begin{pmatrix} 1_y^* \\ 2_2 \\ 1_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1_y \\ 2_2 \\ 1_y^* \end{pmatrix} \\ \text{In } B_0(H') : & \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad 0, \quad 1, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より,  $G$  に対して, ブルエ予想が成り立つことが確かめられた. ■

### 3.2 $G := 2.A_6$

この節では、 $G := 2.A_6$  についてブルエ予想の成立を確かめる。節 2.1 より、 $G$  の非主ブロックに属する単純加群の、 $H$  との間の Green 対応は次の通り。

$$\begin{aligned} \text{simples in } B : & \quad 2_1, \quad 2_2, \quad 6_1, \quad 6_2 \\ \text{Green corresp. in } b : & \quad \begin{pmatrix} 1_x \\ 1_x^* \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1_y \\ 1_y^* \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1_x^* \\ 1_x 1_y^* \\ 1_y 1_x^* \\ 1_x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1_y^* \\ 1_y 1_x^* \\ 1_x 1_y^* \\ 1_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

さらに、 $C_G(P) = P \times C_2$  より、 $b$  の根  $\beta$  の惰性群は  $N_G(P, e) = N_G(P)$  である。したがって、 $E := N_G(P, e)/C_G(P) = C_4$ 。また、 $H^2(C_4, k^\times) = 0$ 。よって、定理 3.7 より、

$$b \simeq k[(C_3 \times C_3) \times C_4] \text{ (as } k\text{-algebras)}$$

そこで、 $A := k[(C_3 \times C_3) \times C_4]$  とすると、この同型で上の直既約  $b$ -加群との対応は次の通り。

$$\begin{aligned} \text{In } b : & \quad \begin{pmatrix} 1_x \\ 1_x^* \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1_y \\ 1_y^* \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1_x^* \\ 1_x 1_y^* \\ 1_y 1_x^* \\ 1_x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1_y^* \\ 1_y 1_x^* \\ 1_x 1_y^* \\ 1_y \end{pmatrix} \\ \text{In } A : & \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \ 0 \\ 3 \ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \ 2 \\ 1 \ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで、単純  $A$ -加群の番号は次元とは関係ない。  $N_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \ 0 \\ 3 \ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $N_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \ 2 \\ 1 \ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  とおく。

また、この同型で対応する直既約射影  $A$ -加群は、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \ 3 \\ 0 \ 1 \ 0 \\ 2 \ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \ 0 \\ 3 \ 2 \ 3 \\ 1 \ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \ 1 \\ 2 \ 3 \ 2 \\ 0 \ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \ 2 \\ 1 \ 0 \ 1 \\ 3 \ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

さらに、 $A$  の quiver とその relation は次のようになることがわかっている。

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{y_4} & 3 \\ & \xleftarrow{x_4} & \\ y_1 \uparrow & & \uparrow y_3 \\ & x_1 & x_3 \\ & \downarrow & \downarrow \\ 2 & \xrightarrow{x_2} & 4 \\ & \xleftarrow{y_2} & \end{array} \quad \begin{cases} x^3 = y^3 = 0 \\ yx = xy \end{cases}$$

一回目:  $I_0 = \{1\}$  として傾斜複体をとると, 互いの単純加群の対応は次の通り.

$$\begin{aligned} \text{In } A &: 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{In } B_1 &: 0, \quad N', \quad 2, \quad 3, \quad 1 \end{aligned}$$

ここで,  $N := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  とおく. さらに, 導来同値は stable 同値だから,

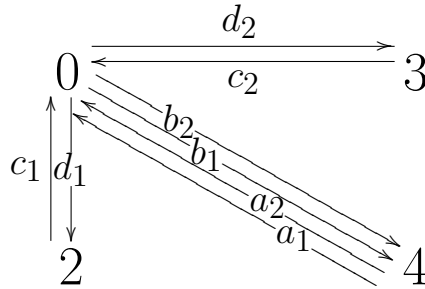
$$\begin{aligned} \dim \text{Ext}_{B_1}^1(0, 0) &= \dim \text{Ext}_A^1(0, 0) = 0 \\ \dim \text{Ext}_{B_1}^1(0, 1) &= \dim \text{Ext}_A^1(0, N) = \dim \text{Hom}_A(0, \Omega^{-1}(N)) = 2 \\ \dim \text{Ext}_{B_1}^1(0, 2) &= \dim \text{Ext}_A^1(0, 2) = 1 \\ \dim \text{Ext}_{B_1}^1(0, 3) &= \dim \text{Ext}_A^1(0, 3) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dim \text{Ext}_{B_1}^1(1, 0) &= \dim \text{Ext}_A^1(N, 0) = \dim \text{Hom}_A(\Omega(N), 0) = 2 \\ \dim \text{Ext}_{B_1}^1(1, 1) &= \dim \text{Ext}_A^1(N, N) = 0 \\ \dim \text{Ext}_{B_1}^1(1, 2) &= \dim \text{Ext}_A^1(N, 2) = \dim \text{Hom}_A(\Omega(N), 2) = 0 \\ \dim \text{Ext}_{B_1}^1(1, 3) &= \dim \text{Ext}_A^1(N, 3) = \dim \text{Hom}_A(\Omega(N), 3) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dim \text{Ext}_{B_1}^1(2, 0) &= \dim \text{Ext}_A^1(2, 0) = 1 \\ \dim \text{Ext}_{B_1}^1(2, 1) &= \dim \text{Ext}_A^1(2, N) = \dim \text{Hom}_A(2, \Omega^{-1}(N)) = 0 \\ \dim \text{Ext}_{B_1}^1(2, 2) &= \dim \text{Ext}_A^1(2, 2) = 0 \\ \dim \text{Ext}_{B_1}^1(2, 3) &= \dim \text{Ext}_A^1(2, 3) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dim \text{Ext}_{B_1}^1(3, 0) &= \dim \text{Ext}_A^1(3, 0) = 1 \\ \dim \text{Ext}_{B_1}^1(3, 1) &= \dim \text{Ext}_A^1(3, N) = \dim \text{Hom}_A(3, \Omega^{-1}(N)) = 0 \\ \dim \text{Ext}_{B_1}^1(3, 2) &= \dim \text{Ext}_A^1(3, 2) = 0 \\ \dim \text{Ext}_{B_1}^1(3, 3) &= \dim \text{Ext}_A^1(3, 3) = 0 \end{aligned}$$

したがって,  $B_1$  の quiver は次の通り.



ここで, 定理 1.15 より次のように各複体を作る.

$$P_0^* : \quad 0 \longrightarrow \begin{array}{c} P_1 \\ \oplus \\ P_1 \end{array} \xrightarrow{(x_1 x_2, y_4 y_3)} P_0 \longrightarrow 0$$

$$P_1^* : \quad 0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

$$P_2^* : \quad 0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{x_2} P_2 \longrightarrow 0$$

$$P_3^* : \quad 0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{y_3} P_3 \longrightarrow 0$$

また, quiver の矢印に対応する写像は次のように定める.

①

$$\begin{array}{ccc} P_0^* : & \begin{array}{c} P_1 \\ \oplus \\ P_1 \end{array} \xrightarrow{(x_1 x_2, y_4 y_3)} P_0 & \\ \downarrow a_1 & \downarrow (e_1, 0) & \downarrow 0 \\ P_1^* : & P_1 \xrightarrow{0} 0 & \end{array}$$

②

$$\begin{array}{ccc} P_0^* : & \begin{array}{c} P_1 \\ \oplus \\ P_1 \end{array} \xrightarrow{(x_1 x_2, y_4 y_3)} P_0 & \\ \downarrow a_2 & \downarrow (0, e_1) & \downarrow 0 \\ P_1^* : & P_1 \xrightarrow{0} 0 & \end{array}$$

③

$$\begin{array}{ccc} P_1^* : & P_1 \xrightarrow{0} 0 & \\ \downarrow b_1 & \downarrow \begin{pmatrix} x_3 y_3 \\ 0 \end{pmatrix} & \downarrow 0 \\ P_0^* : & \begin{array}{c} P_1 \\ \oplus \\ P_1 \end{array} \xrightarrow{(x_1 x_2, y_4 y_3)} P_0 & \end{array}$$

④

$$\begin{array}{ccc} P_1^* : & P_1 \xrightarrow{0} 0 & \\ \downarrow b_2 & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 y_3 \end{pmatrix} & \downarrow 0 \\ P_0^* : & \begin{array}{c} P_1 \\ \oplus \\ P_1 \end{array} \xrightarrow{(x_1 x_2, y_4 y_3)} P_0 & \end{array}$$

⑤

$$\begin{array}{ccc} P_0^* : & \begin{array}{c} P_1 \\ \oplus \\ P_1 \end{array} \xrightarrow{(x_1 x_2, y_4 y_3)} P_0 & \\ \downarrow c_1 & \downarrow (y_2 x_2, 0) & \downarrow y_1 \\ P_2^* : & P_1 \xrightarrow{x_2} P_2 & \end{array}$$

⑥

$$\begin{array}{ccc} P_2^* : & P_1 \xrightarrow{x_2} P_2 & \\ \downarrow d_1 & \downarrow \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix} & \downarrow x_1 \\ P_0^* : & \begin{array}{c} P_1 \\ \oplus \\ P_1 \end{array} \xrightarrow{(x_1 x_2, y_4 y_3)} P_0 & \end{array}$$

⑦

$$\begin{array}{ccc} P_0^* : & \begin{array}{c} P_1 \\ \oplus \\ P_1 \end{array} \xrightarrow{(x_1 x_2, y_4 y_3)} P_0 & \\ \downarrow c_2 & \downarrow (0, x_3 y_3) & \downarrow x_4 \\ P_3^* : & P_1 \xrightarrow{y_3} P_3 & \end{array}$$

⑧

$$\begin{array}{ccc} P_3^* : & P_1 \xrightarrow{y_3} P_3 & \\ \downarrow d_2 & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ e_1 \end{pmatrix} & \downarrow y_4 \\ P_0^* : & \begin{array}{c} P_1 \\ \oplus \\ P_1 \end{array} \xrightarrow{(x_1 x_2, y_4 y_3)} P_0 & \end{array}$$

よって,  $B_1$  の quiver の relation は次のようになる.

(長さ 2)  $a_i b_j = a_i d_j = 0, c_i b_j = c_i d_i = 0$  ( $\{i, j\} = \{1, 2\}$ ),  $a_1 b_1 = a_2 b_2, d_1 c_1 - d_2 c_2 = b_1 a_1 - b_2 a_2$

(長さ 3)  $b_2 a_1 d_1 = 0, b_1 a_2 d_2 = 0, c_1 b_1 a_2 = 0, c_2 b_2 a_1 = 0$

証明) (長さ 2) 明らかに,  $a_1 b_2 = a_1 d_2 = a_2 b_1 = a_2 d_1 = c_1 b_2 = c_2 b_1 = 0$ . また,

$$\begin{array}{ccc}
 P_2^* : & P_1 \xrightarrow{x_2} P_2 & \\
 c_1 d_1 \downarrow & \begin{array}{ccc} y_2 x_2 \downarrow & y_2 \swarrow & \downarrow y_1 x_1 \\ P_1 & & P_2 \end{array} & \\
 P_2^* : & P_1 \xrightarrow{x_2} P_2 & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 P_3^* : & P_1 \xrightarrow{y_3} P_3 & \\
 c_2 d_2 \downarrow & \begin{array}{ccc} x_3 y_3 \downarrow & x_3 \swarrow & \downarrow x_4 y_4 \\ P_1 & & P_3 \end{array} & \\
 P_3^* : & P_1 \xrightarrow{y_3} P_3 & 
 \end{array}$$

それぞれで可換になるから,  $c_1 d_1 = c_2 d_2 = 0$ . さらに, 明らかに,  $a_1 b_1 = a_2 b_2, d_1 c_1 - d_2 c_2 = b_1 a_1 - b_2 a_2$  がわかる.

(長さ 3) 次のように可換図式を得る.

$b_2 a_1 d_1$  について

$b_1 a_2 d_2$  について

$$\begin{array}{ccc}
 P_2^* : & P_1 \xrightarrow{x_2} P_2 & \\
 b_2 a_1 d_1 \downarrow & \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 x_2 \end{pmatrix} \downarrow & \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix} \swarrow & \downarrow 0 \\ P_1 & & P_2 \end{array} & \\
 P_0^* : & \begin{array}{ccc} \oplus & \longrightarrow & P_0 \\ P_1(x_1 x_2, y_4 y_3) & & \end{array} & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 P_3^* : & P_1 \xrightarrow{y_3} P_3 & \\
 b_1 a_2 d_2 \downarrow & \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} x_3 y_3 \\ 0 \end{pmatrix} \downarrow & \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \swarrow & \downarrow 0 \\ P_1 & & P_3 \end{array} & \\
 P_0^* : & \begin{array}{ccc} \oplus & \longrightarrow & P_0 \\ P_1(x_1 x_2, y_4 y_3) & & \end{array} & 
 \end{array}$$

$c_1 b_1 a_2$  について

$c_2 b_2 a_1$  について

$$\begin{array}{ccc}
 P_0^* : & \begin{array}{ccc} P_1(x_1 x_2, y_4 y_3) & \longrightarrow & P_0 \\ \oplus & & \end{array} & \\
 c_1 b_1 a_2 \downarrow & \begin{array}{ccc} (0, (y_2 x_2)^2) \downarrow & x_3 x_4 \swarrow & \downarrow 0 \\ P_1 & & P_2 \end{array} & \\
 P_2^* : & P_1 \xrightarrow{x_2} P_2 & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 P_0^* : & \begin{array}{ccc} P_1(x_1 x_2, y_4 y_3) & \longrightarrow & P_0 \\ \oplus & & \end{array} & \\
 c_2 b_2 a_1 \downarrow & \begin{array}{ccc} ((y_2 x_2)^2, 0) \downarrow & y_2 y_1 \swarrow & \downarrow 0 \\ P_1 & & P_3 \end{array} & \\
 P_3^* : & P_1 \xrightarrow{y_3} P_3 & 
 \end{array}$$

■

次に, 定理 1.18 より,  $B_1$  の Cartan 行列が次のようにわかる.

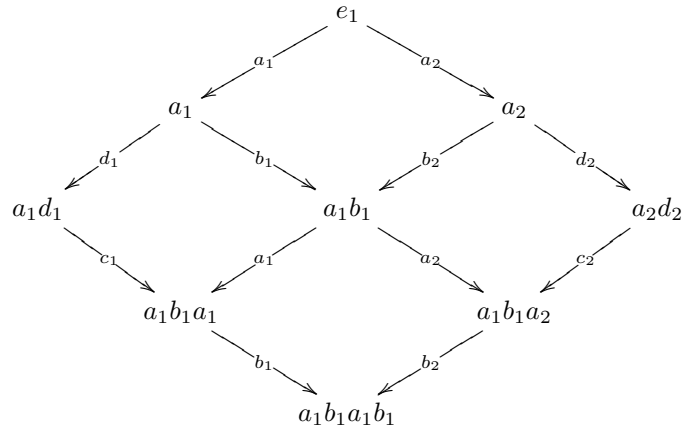
	0	1	2	3
$P_0^*$	7	4	2	2
$P_1^*$	4	3	1	1
$P_2^*$	2	1	2	1
$P_3^*$	2	1	1	2

したがって,  $P_1^*, P_2^*, P_3^*$  の Loewy 列と Socle 列について次のことがわかる.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

証明)  $B_1$  の quiver とその relation より,

(1)



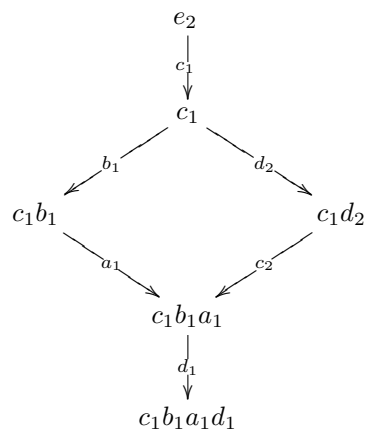
三段目:  $a_1b_1 = a_2b_2$ .

四段目:  $a_1(d_1c_1 - d_2c_2) = a_1(b_1a_1 - b_2a_2)$  より,  $a_1d_1c_1 = a_1b_1a_1$ .

$a_2(d_1c_1 - d_2c_2) = a_2(b_1a_1 - b_2a_2)$  より,  $a_2d_2c_2 = a_2b_2a_2 = a_1b_1a_2$ .

五段目:  $(a_1b_1a_1)d_1 = a_1d_1c_1d_1 = 0$ .  $(a_1b_1a_2)d_2 = 0$ .

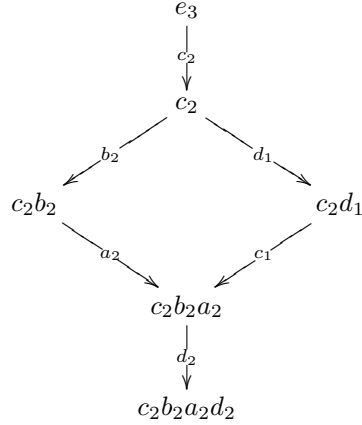
(2)



四段目:  $d_1c_1 - d_2c_2 = b_1a_1 - b_2a_2$  より,  $c_1d_2c_2 = -c_1b_1a_1$ .

五段目:  $(c_1b_1a_1)b_1 = c_1d_1c_1b_1 = 0$ .

(3)



四段目:  $d_1c_1 - d_2c_2 = b_1a_1 - b_2a_2$  より,  $c_2d_1c_1 = -c_2b_2a_2$ .

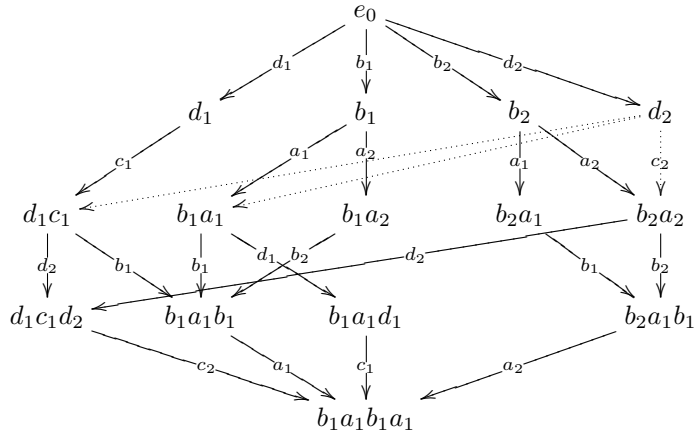
五段目:  $(c_2b_2a_2)b_2 = c_2b_2a_1b_1 = 0$ .

■

さらに,  $P_0^*$  の Loewy 列は次の通り.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

証明)  $B_1$  の quiver とその relation より,



四段目:  $d_1c_1 - d_2c_2 = b_1a_1 - b_2a_2$  より,  $d_1c_1d_2 = b_2a_2d_2$ .  $d_1c_1b_1 = b_1a_1b_1 = b_1a_2b_2$ . また,  $b_2a_1b_1 = b_2a_2b_2$

五段目:  $d_1c_1d_2c_2 = -d_1c_1b_1a_1 = -b_1a_1b_1a_1$ .  $b_1a_1d_1c_1 = b_1a_1b_1a_1$ .  $b_2a_1b_1a_2 = b_2a_2b_2a_2 = b_2a_2d_2c_2 = -d_1c_1d_2c_2 = d_1c_1b_1a_1 = b_1a_1b_1a_1$ .  $b_1a_1b_1a_2 = b_1a_2d_2c_2 = 0$ .  $b_2a_1b_1a_1 = b_2a_1d_1c_1 = 0$ .

■

p.23 の  $N'$  について次がわかる.

$$N' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

証明)  $i = 0, 2, 3$  に対して,

$$\begin{aligned} \dim \text{Hom}_{B_1}(N', i) &= \dim \underline{\text{Hom}}_{B_1}(N', i) = \dim \underline{\text{Hom}}_A(1, i) = 0 \\ \dim \text{Hom}_{B_1}(i, N') &= \dim \underline{\text{Hom}}_{B_1}(i, N') = \dim \underline{\text{Hom}}_A(i, 1) = 0 \end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned} \dim \text{Hom}_{B_1}(N', 1) &= \dim \underline{\text{Hom}}_A(1, N) = 1 \\ \dim \text{Hom}_{B_1}(1, N') &= \dim \underline{\text{Hom}}_A(N, 1) = 1 \end{aligned}$$

したがって,  $P_1^*$  より題意が成り立つ. ■

そこで, 次の対応を考える.

$$\text{In } A: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{In } B_1: Y_1, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, Y_2, Y_3$$

$$(i) Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{証明) } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 2 \end{array} \right) \text{ より, } Y_1 = \left( \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 0 & 0 \\ & 2 \\ 1 & \end{array} \right). \text{ また,}$$

$$\begin{aligned} \dim \text{Hom}_{B_1}(Y_1, 1) &= \dim \underline{\text{Hom}}_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, N\right) = 1 \\ \dim \text{Hom}_{B_1}(Y_1, i) &= \dim \underline{\text{Hom}}_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, i\right) = 0 \quad (i = 0, 2, 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dim \text{Hom}_{B_1}(1, Y_1) &= \dim \underline{\text{Hom}}_A\left(N, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 1 \\ \dim \text{Hom}_{B_1}(2, Y_1) &= \dim \underline{\text{Hom}}_A\left(2, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 1 \\ \dim \text{Hom}_{B_1}(i, Y_1) &= \dim \underline{\text{Hom}}_A\left(i, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 0 \quad (i = 0, 3) \end{aligned}$$

よって,  $P_1^*$  から題意が成り立つ. ■

$$(ii) Y_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

証明)  $N_1 = \left( \begin{array}{c|cc} & & 1 \\ 2 & & 3 \\ 0 & & 1 \end{array} \right)$  より,  $Y_2 = \left( \begin{array}{c|c} 2 & \\ 0 & 1 \end{array} \right)$ . また,

$$\dim \text{Hom}_{B_1}(Y_2, 0) = \dim \underline{\text{Hom}}_A(N_1, 0) = 0$$

$$\dim \text{Hom}_{B_1}(Y_2, 2) = \dim \underline{\text{Hom}}_A(N_1, 2) = 1$$

$$\dim \text{Hom}_{B_1}(0, Y_2) = \dim \underline{\text{Hom}}_A(0, N_1) = 0$$

$$\dim \text{Hom}_{B_1}(2, Y_2) = \dim \underline{\text{Hom}}_A(2, N_1) = 0$$

よって,  $P_2^*$  から題意が成り立つ. ■

(iii)  $Y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

証明)  $N_2 = \left( \begin{array}{c|c|c} 0 & & \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & & 3 \end{array} \right)$  より,  $Y_3 = \left( \begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$ . また,

$$\dim \text{Hom}_{B_1}(Y_3, 0) = \dim \underline{\text{Hom}}_A(N_2, 0) = 1$$

$$\dim \text{Hom}_{B_1}(Y_3, 1) = \dim \underline{\text{Hom}}_A(N_2, N) = 0$$

$$\dim \text{Hom}_{B_1}(Y_3, i) = \dim \underline{\text{Hom}}_A(N_2, i) = 0 \quad (i = 2, 3)$$

$$\dim \text{Hom}_{B_1}(3, Y_3) = \dim \underline{\text{Hom}}_A(3, N_2) = 1$$

$$\dim \text{Hom}_{B_1}(1, Y_3) = \dim \underline{\text{Hom}}_A(N, N_2) = 1$$

$$\dim \text{Hom}_{B_1}(i, Y_3) = \dim \underline{\text{Hom}}_A(i, N_2) = 0 \quad (i = 0, 2)$$

よって,  $P_0^*$  から題意が成り立つ. ■

2回目:  $I_0 := \{1, 2\}$  として, 傾斜複体をとると, 互いの単純加群の対応は次の通り.

$$\text{In } B_1 : 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{In } B_2 : 0, \quad X_1, \quad X_2, \quad 3, \quad 1, \quad 2$$

また,

$$\dim \text{Ext}_{B_2}^1(0, 0) = \dim \text{Ext}_{B_1}^1(0, 0) = 0$$

$$\begin{aligned} \dim \text{Ext}_{B_2}^1(0, 1) &= \dim \text{Ext}_{B_1}^1(0, Y_1) = \dim \text{Ext}_A^1\left(0, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \dim \text{Hom}_A\left(0, \Omega^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)\right) = 1 \end{aligned}$$

$$\dim \text{Ext}_{B_2}^1(0, 2) = \dim \text{Ext}_{B_1}^1(0, Y_2) = \dim \text{Hom}_{B_1}(0, \Omega^{-1}(Y_2)) = 1$$

$$\dim \text{Ext}_{B_2}^1(0, 3) = \dim \text{Ext}_{B_1}^1(0, 3) = 1$$

$$\dim \text{Ext}_{B_2}^1(1, 0) = \dim \text{Ext}_{B_1}^1(Y_1, 0) = \dim \text{Hom}_{B_1}(\Omega(Y_1), 0) = 1$$

$$\dim \text{Ext}_{B_2}^1(1, 1) = \dim \text{Ext}_{B_1}^1(Y_1, Y_1) = \dim \text{Ext}_A^1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\dim \text{Ext}_{B_2}^1(1, 2) = \dim \text{Ext}_{B_1}^1(Y_1, Y_2) = \dim \text{Ext}_A^1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, N_1\right) = 0$$

$$\dim \text{Ext}_{B_2}^1(1, 3) = \dim \text{Ext}_{B_1}^1(Y_1, 3) = \dim \text{Hom}_{B_1}(\Omega(Y_1), 3) = 1$$

$$\dim \text{Ext}_{B_2}^1(2, 0) = \dim \text{Ext}_{B_1}^1(Y_2, 0) = \dim \text{Hom}_{B_1}(\Omega(Y_2), 0) = 0$$

$$\dim \text{Ext}_{B_2}^1(2, 1) = \dim \text{Ext}_{B_1}^1(Y_2, Y_1) = \dim \text{Ext}_A^1\left(N_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\dim \text{Ext}_{B_2}^1(2, 2) = \dim \text{Ext}_{B_1}^1(Y_2, Y_2) = 0$$

$$\dim \text{Ext}_{B_2}^1(2, 3) = \dim \text{Ext}_{B_1}^1(Y_2, 3) = \dim \text{Hom}_{B_1}(\Omega(Y_2), 3) = 1$$

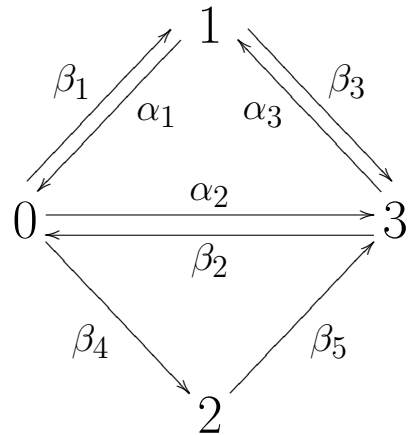
$$\dim \text{Ext}_{B_2}^1(3, 0) = \dim \text{Ext}_{B_1}^1(3, 0) = 1$$

$$\begin{aligned} \dim \text{Ext}_{B_2}^1(3, 1) &= \dim \text{Ext}_{B_1}^1(3, Y_1) = \dim \text{Ext}_A^1\left(3, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \dim \text{Hom}_A\left(3, \Omega^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)\right) = 1 \end{aligned}$$

$$\dim \text{Ext}_{B_2}^1(3, 2) = \dim \text{Ext}_{B_1}^1(3, Y_2) = \dim \text{Hom}_{B_1}(3, \Omega^{-1}(Y_2)) = 0$$

$$\dim \text{Ext}_{B_2}^1(3, 3) = \dim \text{Ext}_{B_1}^1(3, 3) = 0$$

したがって,  $B_2$  の quiver は次の通り.



ここで, 定理 1.15 より次のように各複体を作る.

$$P_0^* : 0 \longrightarrow \begin{array}{c} P_1 \\ \oplus \\ P_1 \\ \oplus \\ P_2 \end{array} \xrightarrow{(b_1, b_2, d_1)} P_0 \longrightarrow 0$$

$$P_1^* : 0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

$$P_2^* : 0 \longrightarrow P_2 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

$$P_3^* : 0 \longrightarrow \begin{array}{c} P_1 \\ \oplus \\ P_2 \end{array} \xrightarrow{(c_2 b_2, c_2 d_1)} P_3 \longrightarrow 0$$

また, quiver の矢印に対応する写像は次のように定める.

①

$$\begin{array}{ccc} P_0^* : & \begin{array}{c} P_1 \\ \oplus \\ P_1 \\ \oplus \\ P_2 \end{array} & \longrightarrow P_0 \\ \alpha_1 \downarrow & (e_1, 0, 0) \downarrow & \downarrow \\ P_1^* : & P_1 & \longrightarrow 0 \end{array}$$

②

$$\begin{array}{ccc} P_1^* : & P_1 & \longrightarrow 0 \\ \beta_1 \downarrow & \left( \begin{array}{c} a_1 b_1 \\ 0 \\ -c_1 b_1 \end{array} \right) \downarrow & \downarrow \\ P_0^* : & \begin{array}{c} P_1 \\ \oplus \\ P_1 \\ \oplus \\ P_2 \end{array} & \xrightarrow{(b_1, b_2, d_1)} P_0 \end{array}$$

③

$$\begin{array}{ccc}
P_3^* : & & P_1 \oplus P_2 \xrightarrow{(c_2 b_2, c_2 d_1)} P_3 \\
\downarrow \alpha_2 & \left( \begin{array}{cc} 0 & -a_1 d_1 \\ a_2 b_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) & \downarrow \\
P_0^* : & & P_1 \oplus P_2 \xrightarrow{(b_1, b_2, d_1)} P_0
\end{array}$$

④

$$\begin{array}{ccc}
P_0^* : & & P_1 \oplus P_2 \xrightarrow{(b_1, b_2, d_1)} P_0 \\
\downarrow \beta_2 & \left( \begin{array}{ccc} 0 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 \end{array} \right) & \downarrow \\
P_3^* : & & P_1 \oplus P_2 \xrightarrow{(c_2 b_2, c_2 d_1)} P_3
\end{array}$$

⑤

$$\begin{array}{ccc}
P_1^* : & P_1 & \longrightarrow 0 \\
\downarrow \alpha_3 & \left( \begin{array}{c} a_1 b_1 \\ 0 \end{array} \right) \downarrow & \downarrow \\
P_3^* : & P_1 \oplus P_2 & \xrightarrow{(c_2 b_2, c_2 d_1)} P_3
\end{array}$$

⑥

$$\begin{array}{ccc}
P_3^* : & P_1 \oplus P_2 & \xrightarrow{(c_2 b_2, c_2 d_1)} P_3 \\
\downarrow \beta_3 & (e_1, 0) \downarrow & \downarrow \\
P_1^* : & P_1 & \longrightarrow 0
\end{array}$$

⑦

$$\begin{array}{ccc}
P_2^* : & P_2 & \longrightarrow 0 \\
\downarrow \beta_4 & \left( \begin{array}{c} 0 \\ a_1 d_1 \\ 0 \end{array} \right) \downarrow & \downarrow \\
P_0^* : & P_1 \oplus P_2 & \xrightarrow{(b_1, b_2, d_1)} P_0
\end{array}$$

⑧

$$\begin{array}{ccc}
P_3^* : & P_1 \oplus P_2 & \longrightarrow P_3 \\
\downarrow \beta_5 & (0, e_2) \downarrow & \downarrow \\
P_2^* : & P_2 & \longrightarrow 0
\end{array}$$

よって、 $B_2$  の quiver の relation は次のようになる。

(長さ 2)  $\alpha_1 \beta_4 = 0, \alpha_2 \beta_2 = \beta_1 \alpha_1, \alpha_3 \beta_3 = \beta_2 \alpha_2, \beta_3 \alpha_3 = \alpha_1 \beta_1, \beta_5 \alpha_3 = 0$

(長さ 3)  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 0, \alpha_2 \alpha_3 \alpha_1 = 0, \alpha_3 \alpha_1 \alpha_2 = 0, \beta_3 \beta_2 \beta_1 = 0, \beta_5 \beta_2 \beta_4 = 0$

(長さ 4)  $\beta_3 \beta_2 \beta_4 \beta_5 = -\alpha_1 \alpha_2, \beta_4 \beta_5 \beta_2 \beta_1 = -\alpha_2 \alpha_3, \beta_1 \beta_3 \beta_2 \alpha_2 = 0, \beta_2 \beta_4 \beta_5 \beta_2 = -\alpha_3 \alpha_1$

証明) (長さ 2) 明らかに、 $\alpha_1 \beta_4 = 0, \alpha_3 \beta_3 = \beta_2 \alpha_2, \beta_3 \alpha_3 = \alpha_1 \beta_1, \beta_5 \alpha_3 = 0$  を得る。また、 $\beta_1 \alpha_1 - \alpha_2 \beta_2$  については次のように可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc}
P_0^* : & & P_1 \oplus P_1 \oplus P_2 \xrightarrow{(b_1, b_2, d_1)} P_0 \\
\downarrow \beta_1 \alpha_1 - \alpha_2 \beta_2 & \left( \begin{array}{ccc} a_1 b_1 & 0 & a_1 d_1 \\ 0 & -a_1 b_1 & 0 \\ -c_1 b_1 & 0 & 0 \end{array} \right) \downarrow & \downarrow \\
P_0^* : & & P_1 \oplus P_1 \oplus P_2 \xrightarrow{(b_1, b_2, d_1)} P_0
\end{array}$$

(Note: The diagram above is a simplified representation of the commutative diagram shown in the image, which includes a dashed arrow from the top-right node to the bottom-left node.)

(長さ 3) 明らかに,  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0$ ,  $\alpha_3\alpha_1\alpha_2 = 0$ ,  $\beta_3\beta_2\beta_1 = 0$ ,  $\beta_5\beta_2\beta_4 = 0$  を得る. また,  $\alpha_2\alpha_3\alpha_1$  については次のように可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccc}
 P_0^* : & & P_1 \oplus P_1 \oplus P_2 \\
 \downarrow \alpha_2\alpha_3\alpha_1 & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ (a_1b_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \downarrow & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ a_1b_1a_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 P_0^* : & & P_1 \oplus P_1 \oplus P_2 \\
 & & \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{(b_1, b_2, d_1)} & P_0 \\
 & \swarrow \text{---} & \downarrow 0 \\
 & & P_0 \\
 & \xrightarrow{(b_1, b_2, d_1)} & P_0
 \end{array}
 \end{array}$$

(長さ 4) 明らかに,  $\beta_3\beta_2\beta_4\beta_5 = -\alpha_1\alpha_2$ ,  $\beta_4\beta_5\beta_2\beta_1 = -\alpha_2\alpha_3$  を得る. また, 次のように可換図式を得る.

$\beta_1\beta_3\beta_2\alpha_2$  について

$\beta_2\beta_4\beta_5\beta_2 + \alpha_3\alpha_1$  について

$$\begin{array}{ccc}
 P_3^* : & & P_1 \oplus P_2 \\
 \downarrow \beta_1\beta_3\beta_2\alpha_2 & \left( \begin{array}{cc} (a_1b_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \downarrow & \downarrow \begin{pmatrix} a_2d_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 P_0^* : & & P_1 \oplus P_1 \oplus P_2 \\
 & & \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{(c_2b_2, c_2d_1)} & P_3 \\
 & \swarrow \text{---} & \downarrow 0 \\
 & & P_0 \\
 & \xrightarrow{(b_1, b_2, d_1)} & P_0
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 P_0^* : & & P_1 \oplus P_1 \oplus P_2 \\
 \downarrow \beta_2\beta_4\beta_5\beta_2 + \alpha_3\alpha_1 & \left( \begin{array}{ccc} a_1b_1 & 0 & a_1d_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \downarrow & \downarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 P_3^* : & & P_1 \oplus P_2 \\
 & & \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{(b_1, b_2, d_1)} & P_0 \\
 & \swarrow \text{---} & \downarrow 0 \\
 & & P_3 \\
 & \xrightarrow{(c_2b_2, c_2d_1)} & P_3
 \end{array}
 \end{array}$$

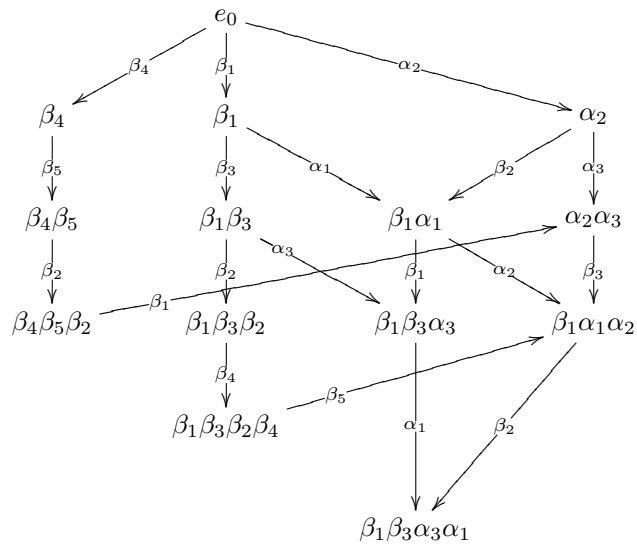
■

次に, 定理 1.18 より,  $B_2$  の Cartan 行列が次のようにわかる.

	0	1	2	3
$P_0^*$	5	3	2	4
$P_1^*$	3	3	1	3
$P_2^*$	2	1	2	2
$P_3^*$	4	3	2	5

よって, このことから,  $B_2$  の直既約射影加群の Loewy 列がわかる.

(1)

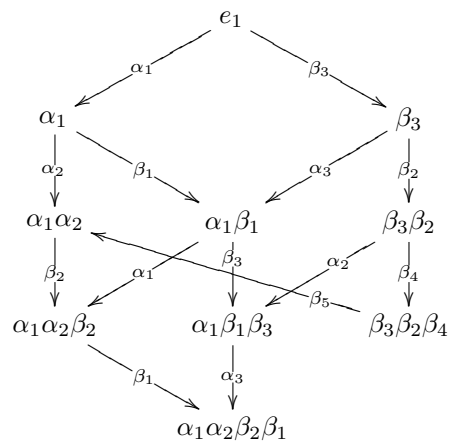


五段目:  $\beta_4\beta_5\beta_2\alpha_2 = \beta_4\beta_5\alpha_3\beta_3 = 0$ .  $\beta_1\beta_3\alpha_3\beta_3 = \beta_1\beta_3\beta_2\alpha_2 = 0$

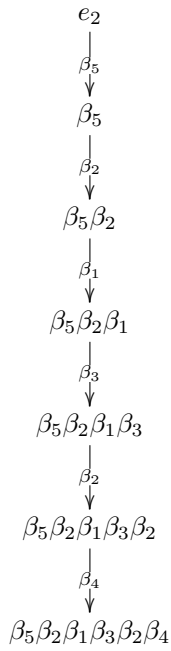
六段目:  $\beta_1\beta_3\beta_2\beta_4\beta_5 = -\beta_1\alpha_1\alpha_2$



(2)



(3)



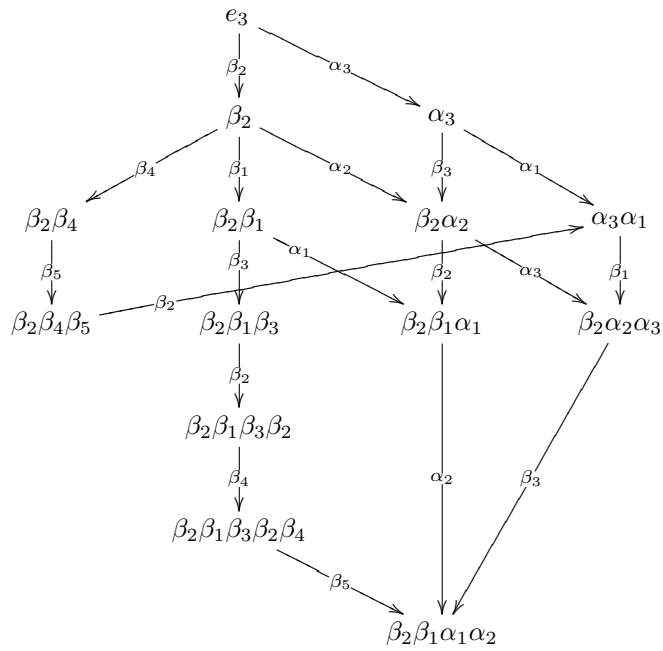
四段目:  $\beta_5 \beta_2 \alpha_2 = \beta_5 \alpha_3 \alpha_3 = 0$

五段目:  $\beta_5 \beta_2 \beta_1 \alpha_1 = \beta_5 \beta_2 \alpha_2 \beta_2 = \beta_5 \alpha_3 \beta_3 \beta_2 = 0$

六段目:  $\beta_5 \beta_2 \beta_1 \beta_3 \alpha_3 = \beta_5 \beta_2 \beta_1 \alpha_1 \beta_1 = \beta_5 \beta_2 \alpha_2 \beta_2 \beta_1 = \beta_5 \alpha_3 \beta_3 \beta_2 \beta_1 = 0$



(4)



五段目:  $\beta_2 \beta_1 \beta_3 \alpha_3 = \beta_2 \beta_1 \alpha_1 \beta_1 = \beta_2 \alpha_2 \beta_2 \beta_1 = \alpha_3 \beta_3 \beta_2 \beta_1 = 0$

$\beta_2 \beta_1 \alpha_1 \beta_1 = \beta_2 \alpha_2 \beta_2 \beta_1 = \alpha_3 \beta_3 \beta_2 \beta_1 = 0$

六段目:  $\beta_2 \beta_1 \beta_3 \beta_2 \beta_4 \beta_5 = -\beta_2 \beta_1 \alpha_1 \alpha_2$



特に,  $P(2)$  は単列加群で他に単列加群がないことより,  $3 = 0^*$  であることがわかる.

このことから, p.30 の  $X_1, X_2$  について, 次が従う.

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 0 & 3 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

証明) ( $X_1$  について)

$$\dim \text{Hom}_{B_2}(X_1, i) = \dim \underline{\text{Hom}}_{B_1}(1, i) = 0 \quad (i = 0, 3)$$

$$\dim \text{Hom}_{B_2}(X_1, 1) = \dim \underline{\text{Hom}}_{B_1}(1, Y_1) = 1$$

$$\dim \text{Hom}_{B_2}(X_1, 2) = \dim \underline{\text{Hom}}_{B_1}(1, Y_2) = 1$$

$$\dim \text{Hom}_{B_2}(i, X_1) = \dim \underline{\text{Hom}}_{B_1}(i, 1) = 0 \quad (i = 0, 3)$$

$$\dim \text{Hom}_{B_2}(1, X_1) = \dim \underline{\text{Hom}}_{B_1}(Y_1, 1) = 1$$

$$\dim \text{Hom}_{B_2}(2, X_1) = \dim \underline{\text{Hom}}_{B_1}(Y_2, 1) = 0$$

よって,  $I(1) = P(1)^*$  を見て題意が成り立つ.

( $X_2$  について)

$$\dim \text{Hom}_{B_2}(X_2, i) = \dim \underline{\text{Hom}}_{B_1}(2, i) = 0 \quad (i = 0, 3)$$

$$\dim \text{Hom}_{B_2}(X_2, 1) = \dim \underline{\text{Hom}}_{B_1}(2, Y_1) = 1$$

$$\dim \text{Hom}_{B_2}(X_2, 2) = \dim \underline{\text{Hom}}_{B_1}(2, Y_2) = 0$$

$$\dim \text{Hom}_{B_2}(i, X_2) = \dim \underline{\text{Hom}}_{B_1}(i, 2) = 0 \quad (i = 0, 3)$$

$$\dim \text{Hom}_{B_2}(1, X_2) = \dim \underline{\text{Hom}}_{B_1}(Y_1, 2) = 0$$

$$\dim \text{Hom}_{B_2}(2, X_2) = \dim \underline{\text{Hom}}_{B_1}(Y_2, 2) = 1$$

よって,  $I(2) = P(2)^*$  を見て題意が成り立つ. ■

そこで, 次の対応を考える.

$$\text{In } B_1 : Y_1, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, Y_2, Y_3$$

$$\text{In } B_2 : 1, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, 2, Y$$

(i)  $Y = P(0)/\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$

証明)  $Y_3 = \left( \begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right)$  より,  $Y \left\| \left( \begin{array}{c|c|c|c|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) =: Y' .$

このとき, 組成因子の数は次の通り.

$$\frac{\text{simlpe}}{\left\| \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \end{array} \right.}$$

さらに,

$$\dim \text{Hom}_{B_2}(Y, 0) = \dim \underline{\text{Hom}}_{B_1}(Y_3, 0) = 1$$

$$\begin{aligned} \dim \text{Hom}_{B_2}(Y, 1) &= \dim \underline{\text{Hom}}_{B_1}(Y_3, Y_1) = \dim \underline{\text{Hom}}_A\left(N_2, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \dim \underline{\text{Hom}}_B(6_2, 2_1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dim \text{Hom}_{B_2}(Y, 2) &= \dim \underline{\text{Hom}}_{B_1}(Y_3, Y_1) = \dim \underline{\text{Hom}}_A(N_2, N_1) \\ &= \dim \underline{\text{Hom}}_B(6_2, 6_1) = 0 \end{aligned}$$

$$\dim \text{Hom}_{B_2}(Y, 3) = \dim \underline{\text{Hom}}_{B_1}(Y_3, 3) = 0$$

よって,  $\text{top}(Y) = 0$  で単純より,  $Y'$  は射影加群を直和因子に持つ. また,

$$\dim \text{Hom}_{B_2}(0, Y) = \dim \underline{\text{Hom}}_{B_1}(0, Y_3) = 0$$

$$\dim \text{Hom}_{B_2}(1, Y) = 0$$

$$\dim \text{Hom}_{B_2}(2, Y) = 0$$

$$\dim \text{Hom}_{B_2}(3, Y) = \dim \underline{\text{Hom}}_{B_1}(3, Y_3) = 1$$

よって,  $P(0)$  をみてこの条件を満たす加群は次の 4 通り.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, P(0)/\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

しかし,  $Y'$  の直和因子としてどの射影加群の場合を考えても,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  はない. ゆえに, 題意が成り立つ. ■

3回目:  $I_0 := \{0, 3\}$  として、傾斜複体をとると、次の対応が得られる.

$$\text{In } B_2 : 1, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, 2, Y$$

$$\text{In } B_3 : 1, X, 2, 0$$

さらにこのとき,

$$P_3^* : 0 \longrightarrow P_3 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

より、定理 1.18 から  $\dim \text{Hom}_{B_3}(P_3^*, P_3^*) = 5 \cdots \textcircled{1}$  が従う.

また、 $P(3)_{B_2}$  より,

$$B_2 \ni X' := P(3) / \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 3 \end{pmatrix} \longleftarrow 3 \in B_3$$

このとき、 $X$  について次のことがわかる.

$$\text{top}(X) = 3 \oplus 3 \oplus 3 \quad , \quad \text{soc}(X) = 3$$

証明)

$$\begin{aligned} \dim \text{Hom}_{B_3}(X, 0) &= \dim \underline{\text{Hom}}_{B_2} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, Y \right) = \dim \underline{\text{Hom}}_{B_1} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, Y_3 \right) \\ &= \dim \underline{\text{Hom}}_A \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, N_2 \right) = \dim \underline{\text{Hom}}_B(2_2, 6_2) = 0 \\ \dim \text{Hom}_{B_3}(X, 1) &= \dim \underline{\text{Hom}}_{B_2} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, 1 \right) = 0 \\ \dim \text{Hom}_{B_3}(X, 2) &= \dim \underline{\text{Hom}}_{B_2} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, 2 \right) = 0 \\ \dim \text{Hom}_{B_3}(X, 3) &= \dim \underline{\text{Hom}}_{B_2} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, X' \right) \end{aligned}$$

ここで、 $\text{soc}(X') = 0 \oplus 0 \oplus 0$  より、 $\underline{\text{Hom}}_{B_2} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, X' \right) = \text{Hom}_{B_2} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, X' \right)$ . さらに、 $\dim \text{Hom}_{B_2}(3, X'/\text{soc}(X')) = 3$  で、 $\dim \text{Ext}_{B_2}^1(3, 0) = 1$  より、 $X'$  は  $3 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  と同型な部分加群を持ち、 $4 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  と同型な部分加群を持たない. ゆえに、 $\dim \text{Hom}_{B_2} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, X' \right) = 3$ . したがって、 $\dim \text{Hom}_{B_3}(X, 3) = 3$ . よって、主張の前半が成り立つ.

$$\begin{aligned} \dim \text{Hom}_{B_3}(0, X) &= \dim \underline{\text{Hom}}_{B_2} \left( Y, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \dim \underline{\text{Hom}}_{B_1} \left( Y_3, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \dim \underline{\text{Hom}}_A \left( N_2, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \dim \underline{\text{Hom}}_B(6_2, 2_2) = 0 \\ \dim \text{Hom}_{B_3}(1, X) &= \dim \underline{\text{Hom}}_{B_2} \left( 1, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \\ \dim \text{Hom}_{B_3}(2, X) &= \dim \underline{\text{Hom}}_{B_2} \left( 2, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \\ \dim \text{Hom}_{B_3}(3, X) &= \dim \underline{\text{Hom}}_{B_2} \left( X', \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 1 \end{aligned}$$

よって、後半の主張が成り立つ. ■

さらに、このことと①より、 $\Omega^{-1}(X)_{e_3} = 3$ である。よって、 $I_0 := \{3\}'$ としてとれば、定理 3.6 より、次のことが言える。(4回目)

$$\text{In } B_3 : 1, X, 2, 0$$

$$\text{In } B_4 : 1, 3, 2, 0$$

したがって、 $G := 2.A_6$  の非主ブロックに対して、ブルエ予想が成り立つことが確かめられた。



## 謝辞

この論文を書くにあたり、越谷重夫先生、刃刀直子先生にたくさんのご助言とご教授をいただきました。ありがとうございました。

## 参考文献

- [1] J. L. Alperin. *Local Representation Theory*. Cambridge University Press, 1986.
- [2] J. L. Alperin, M. Linckelmann, and R. Rouquier. *Source algebras and source modules*. J. Alg. **239**, 262-271, 2001.
- [3] D. J. Benson. *Representation and Cohomology I*. Cambridge University Press, 1995.
- [4] M. Broué. *Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées*. Astérisque, **181-182**, 61-91, 1990.
- [5] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, and R.A. Wilson. *Atlas of finite groups*. Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [6] E.C. Dade. *A correspondence of characters*. in "The Santa Cruz Conference on Finite Groups" edited by G. Mason, Proc. Symposia in Pure Math. Vol.37, Amer. Math. Soc. pp.401-403, 1980.
- [7] K. Erdmann. *Blocks of tame representation type and related algebras*. Lecture Note in Mathematics, Vol.1428, Springer, 1990.
- [8] D. Happel. *On the derived category of a finite-dimensional algebra*. Comm. Math. Helv. **62**, 339-456, 1987.
- [9] D. Happel. *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebra*. (LMS Lecture Note Series 119) Cambridge University Press, 1988.
- [10] M.E. Harris and M. Linckelmann. *Splendid derived equivalences for blocks of finite  $p$ -solvable groups*. J. London Math. Soc. (2) **62**, 85-96, 2000.
- [11] M. Holloway. *Derived equivalences for group algebras*. Ph. D Thesis, University of Bristol, 2001.
- [12] C. Jansen, K. Lux, R. Parker, and R. Wilson. *An atlas of Brauer characters*. Oxford Univ. Press, Oxford, 1995.
- [13] R. Knörr. *On the vertices of irreducible modules*. Ann. of Math. **110**, 487-499, 1979.
- [14] S. Koshitani and N. Kunugi. *The principal 3-blocks of the 3-dimensional projective special unitary groups in non-defining characteristic*. J. reine angew. Math. **539**, 1-27, 2001.
- [15] S. Koshitani and N. Kunugi. *Broué's conjecture holds for principal 3-blocks with elementary abelian defect group of order 9*. J. Alg. **248**, 575-604, 2002.
- [16] S. Koshitani, N. Kunugi, and K. Waki. *Broué's conjecture for non-principal 3-blocks of finite groups*. J. Pure App. Alg. **173**, 177-211, 2002.
- [17] S. Koshitani, N. Kunugi, and K. Waki. *Broué's abelian defect group conjecture for the Held group and the sporadic Suzuki group*. J. Alg. **279**, 638-666, 2004.
- [18] S. Koshitani and H. Miyachi. *The principal 3-blocks of four- and five-dimensional projective special linear groups in non-defining characteristic*. J. Alg. **226**, 788-806, 2000.
- [19] B. Külshammer. *Crossed products and blocks with normal defect groups*. Comm. Alg. **13**, 147-168, 1985.
- [20] N. Kunugi. *Morita equivalent 3-blocks of the 3-dimensional projective special linear groups*. Proc. London Math. Soc. (3) **80**, 575-589, 2000.
- [21] M. Linckelmann. *Derived equivalence for cyclic blocks over a  $P$ -adic ring*. Math. Z. **207**, 293-301,

- 1991.
- [22] M. Linckelmann. *A derived equivalence for blocks with dihedral defect groups*. J. Alg. **164**, 244-255, 1994.
- [23] M. Linckelmann. *Stable equivalences of Morita type for self-injective algebras and  $p$ -groups*. Math. Z. **223**, 87-100, 1996.
- [24] 永尾汎・津島行男. *有限群の表現*. 裳華房, 1987.
- [25] T. Okuyama. *Module correspondence in finite groups*. Hokkaido Math. J. **10**, 299-318, 1981.
- [26] T. Okuyama. *Some examples of derived equivalent blocks of finite groups*. preprint, 1998.
- [27] T. Okuyama. *Remarks on splendid tilting complexes*. in "Proceedings of Representation of Finite and Algebraic Groups", Osaka Univ. edited by N. Kawanaka, G. Michler and K. Uno, pp.171-179, 2000.
- [28] T. Okuyama and K. Waki. *Decomposition number of  $\text{Sp}(4, q)$* . J. Alg. **199**, 544-555, 1998.
- [29] L. Puig. *Pointed groups, construction of modules*. J. Alg. **116**, 7-129, 1988.
- [30] L. Puig. *Algèbres de source de certains blocs des groupes de Chevalley*. Astérisque **181-182**, 221-236, 1990.
- [31] J. Rickard. *Derived categories and stable equivalence*. J. Pure. Appl. **61**, 303-317, 1989.
- [32] J. Rickard. *Morita theory for derived categories*. J. London Math. Soc. **39**, 436-456, 1989.
- [33] J. Rickard. *Derived equivalences as derived functors*. J. London Math. Soc. **43**, 37-48, 1991.
- [34] G. Robinson. *On projective summands of induced modules*. J. Alg. **122**, 106-111, 1989.
- [35] R. Rouquier. *From stable equivalences to Rickard equivalences for blocks with cyclic defect*. in "Groups '93 Galway / St. Andrews Vol.2", edited by C. M. Campbell et al. London Math. Soc. Lecture Note Series, Vol.212, pp.512-523, 1995.
- [36] R. Rouquier. *The derived category of blocks with cyclic defect groups*. in "Derived Equivalences for Group Rings", by S. König and A. Zimmermann, Springer Lecture Note in Mathematics, Vol.1685 pp.199-220, 1998.
- [37] K. Waki. *The Loewy structure of the projective indecomposable modules for the Mathieu groups in characteristic 3*. Comm. Alg. **21**, 1457-1485, 1993.