Wakamatsu tilting module と derived categroy について

相原琢磨

千葉大学自然科学研究科*

概要

T_A に対して, A と $B := \mathrm{End}_A(T)$ がどのくらい似ているか？について考える. T_A が tilting module のとき, A と B は derived equivalent であることが知られている. ここでは, T_A が tilting module の拡張である, Wakamatsu tilting module のときについて考察する. しかし, この場合の結果は得られていない.

目次

* E-mail address : 04um0101@g.math.s.chiba-u.ac.jp

1 Introduction

以下, k を代数閉体[*1], A を有限次元 k-algebra とし, 考える module はすべて有限生成とする[*2]. よって, A は Artin algebra で, すべての module に対して, projective cover が存在する.

$T_A \in \text{mod-}A$, $B := \mathrm{End}_A(T)$ に対して, 次の図式が成り立つ.

$$\begin{tikzcd} T_A \arrow[r, dotted, dash] & A_A \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{progenerator} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{tilting module} \arrow[d, Rightarrow] \\ \text{Equivalent} \arrow[r, dotted, dash] & \text{Isomorphic} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Morita equivalent} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Derived equivalent} \end{tikzcd}$$

このように, T_A に対して, その endomorphism algebra B と A はよく似た構造をもつ. ここでは, T_A が tilting module の拡張である ”Wakamatsu tilting module” のとき, A と B がどのくらい似ているかを考える. つまり,

$$\begin{tikzcd} T_A \arrow[r, dotted, dash] & A_A \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{progenerator} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{tilting module} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{Wakamatsu tilting module} \arrow[d, Rightarrow] \\ \text{Equivalent} \arrow[r, dotted, dash] & \text{Isomorphic} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Morita equivalent} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Derived equivalent} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\textbf{?}} \end{tikzcd}$$

また, T_A が Wakamatsu tilting module (+ 条件) のとき, A と B を拡大した algebra Λ, Γ が stable equivalent になることが知られている. この stable equivalence が A と B のある関係からきているかどうかも今後の研究課題だろう. 例えば, この拡大が trivial な拡大の場合は, A, B 間の derived equivalence が Λ, Γ 間の derived equivalence にもちあがることが Rickard によって示されている (trivial な拡大でなくても, T_A が tilting module (+ 条件) ならば, derived equivalence はもちあがる).

そこで, category と equivalence について詳しく解説していく. category と equivalence は次のような関係になっている.

[*1] 分解体で十分である. ここに載せるほとんどの結果が体でも成り立つが, 代数閉体 (分解体) でないと不都合な点がある.

[*2] 断りがない限り. 特に, category 内で考えるときは (長さ無限の complex に対して, 直和や直積をとるため) 注意が必要である.

$$
\begin{tikzcd}
\text{Category} \arrow[r, dotted, no head] & \text{Module category} \arrow[r] \arrow[d, dashed, leftrightarrow] & \text{Derived category} \arrow[r, "\text{self-inj.}"] \arrow[d, dashed, leftrightarrow] & \text{Stable module category} \arrow[d, dashed, leftrightarrow] \\
\text{Equivalent} \arrow[r, dotted, no head] & \text{Morita equivalent} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Derived equivalent} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Stable equivalent}^{*5}
\end{tikzcd}
$$

ここで, stable module category は A が self-injective algebra でなくても, 定義することはでき, equivalence も考えることはできるが, derived category, derived equivalence との関係はわかっていない. これも今後の研究課題である.

また, Morita equivalence や (体上の) derived equivalence は標準的な functor (tensor で与えられる functor) で与えられることがわかっているが, stable equivalence は一般に標準的な functor では与えられない. そこで特に, 標準的な functor で与えられる stable equivalence (stable equivalence of Morita type) を考える.

2 Category と equivalence

ここでは, 前節で述べた equivalence について解説する.

まずは, category について簡単に復習しよう. category とは, object の集まり (集合とは限らない[*6]) と morphism の集合からできている. また, 2 つの category $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ に対して, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ が functor とは, 次を満たすときにいう.

(i) $\mathcal{C}$ の obj. X に対して, $\mathcal{D}$ の obj. $F(X)$ がただ一つ決まる.

(ii) $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$: 写像

(iii) $F([\text{identity map}]) = [\text{identity map}]$, $F(gf) = F(g)F(f)$

さらに, 2 つの category が equivalent $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ であるとは, functor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ が存在し, $GF \simeq 1_{\mathcal{C}}$[*7], $FG \simeq 1_{\mathcal{D}}$ となるときにいう.

[*5] stable equivalence についてはまだまだわかっていないことが多い. stable equivalent ならば, simple module の個数は等しくなるか？ stable equivalence で保存される特徴は？

[*6] 集合の category : $\begin{cases} \text{obj.} & \text{集合} \\ \text{mor.} & \text{写像} \end{cases}$

[*7]
$$
\begin{tikzcd}
GF(X) \arrow[r, "GF(f)"] \arrow[d, "\simeq"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & GF(Y) \arrow[d, "\simeq"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

次に, category の種類について述べる. category には, 大きく分けて 2 つの種類がある.

(1) abelian cat. $\cdots\cdots$ mod-A, C^b(mod-A) など

additive cat.[*8] で, kernel[*9], cokernel[*10] が存在し, 準同型定理 ($f : X \to Y$ に対して, $X/\mathrm{Ker}\, f \simeq \mathrm{Im}\, f$[*11]) が成り立つ.

(2) triangulated cat. $\cdots\cdots$ K^b(mod-A), D^b(mod-A) など

additive cat. with auto-functor ($[1] : C \xrightarrow{\sim} C$)[*12] , triangle ($X \to Y \to Z \to X[1]$) で次の公理を満たす.

(TR1) $f : X \to Y$ に対して, triangle : $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to X[1]$ が作れる. 特に, $1_X : X \to X$ のときは $Z = 0$. このとき, f から作られる Z を mapping cone といい, $C(f)$ とかく.

(TR2) triangle : $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \Longleftrightarrow$ triangle : $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1]$

(TR3) $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, "v"'] & N \end{tikzcd}$ に対して, $h : C(u) \to C(v)$ が存在して, $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C(u) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "h"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\ M \arrow[r, "v"'] & N \arrow[r] & C(v) \arrow[r] & M[1] \end{tikzcd}$

---

*8 Hom(X, Y) が abelian gp. で, composition : Hom$(Y, Z) \times$ Hom$(X, Y) \to$ Hom(X, Z) が bilinear となる. さらに, "0" が存在し, 直和をとることができる.

*9 $K \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y$, $fi = 0$ となり, $fg = 0$ となる $Z \xrightarrow{g} X$ に対して, $\begin{tikzcd} & K \arrow[dr, "i"] & & \\ Z \arrow[ur, dotted, "\exists_1"] \arrow[rr, "g"'] \arrow[urr, phantom, "\circlearrowleft"] & & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$ を満たす K のこと. これを Ker f とかく.

*10 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\rho} C$, $\rho f = 0$ となり, $gf = 0$ となる $Y \xrightarrow{g} Z$ に対して, $\begin{tikzcd} & & C \arrow[dr, dotted, "\exists_1"] & \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[ur, "\rho"] \arrow[rr, "g"'] \arrow[urr, phantom, "\circlearrowleft"] & & Z \end{tikzcd}$ を満たす C のこと. これを Cok f とかく.

*11 $X/\mathrm{Ker}\, f$ は, f の kernel の cokernel, Im f は, f の cokernel の kernel のこと.

*12 auto-functor であることから, 逆の functor が存在し, それを $[-1]$ とかく. また, 整数 n に対して, 帰納的に $[n]$ を定義できる. $[n] := \begin{cases} \overbrace{[1]\cdots\cdots[1]}^{n\text{ 個}} & n > 0 \\ 1_C & n = 0 \\ \underbrace{[-1]\cdots[-1]}_{-n\text{ 個}} & n < 0 \end{cases}$

(TR4) (Octahedral axiom) $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ に対して,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C(f) \arrow[r] \arrow[d, "i"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X[1] \arrow[d, equal] & \text{triangle} \\
X \arrow[r, "gf"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C(gf) \arrow[r] \arrow[d, "j"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X[1] \arrow[d, "{f[1]}"] & \text{triangle} \\
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C(g) \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y[1] \arrow[d, "{u[1]}"] & \text{triangle} \\
C(f) \arrow[r, "i"'] & C(gf) \arrow[r, "j"'] & C(g) \arrow[r] & C(f)[1] & \boxed{\text{triangle}}
\end{tikzcd}$$

ここで, u, v は (TR1) により, i, j は (TR3) により与えられる.

これにより, f, g から新しい triangle : $C(f) \to C(gf) \to C(g) \to C(f)[1]$ が得られる.

以下 (断りがない限り) , category (cat.) は additive category, functor は additive functor[*13] を考える.

群や環で準同型写像 (群や環の構造を保つ写像) を考えるように, cat. でも functor を考えるときは構造を保つものを扱いたい. 上で見たように, (1) の cat. は kernel, cokernel (つまり, exact sequence) が, (2) の cat. は triangle が構造上大切なものになっている. よって, abelian cat. から abelian cat. への functor は exact sequence を保つものを, triangulated cat. から triangulated cat. への functor は triangle を保つものを考える. このような functor を <u>exact functor</u> とよぶ.

次に, equivalence について述べる. cat. は, object, morphism の 2 つの要素を持っているため, equivalent であることを調べるときもこの 2 つの要素が保たれているかを考えなければいけない (*7 で, 縦の morphism が同型であること ⇔object を保つ, 四角形が可換であること ⇔morphism を保つ) . 基本的には逆の functor を探すわけだが, 群や環の同型を調べるのに準同型定理を使うように, cat. でも逆の functor を作らないで equivalent であることを調べる方法がある.

<u>**Def**</u> **2.0.1** cat. $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ と functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対して,

[*13] $F : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$ は gp. homo.

(1) F : full $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ が全射.

(2) F : faithful $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ が単射.

(3) F : fully faithful $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ F は full かつ faithful.

Lemma 2.0.2 cat. $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ と functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対して, 次は同値である.

(1) $\mathcal{C} \overset{F}{\simeq} \mathcal{D}$

(2) F は fully faithful で, object 間では全射である (すなわち, 任意の $M \in \mathcal{D}$ に対して, $X \in \mathcal{C}$ が存在して, $F(X) \simeq M$ となる) .

proof. (1) $\Rightarrow$ (2) は明らか. (2) $\Rightarrow$ (1) を示す. F の逆の functor G を次のように定義する. $M \in \mathcal{D}$ に対して, $F(X) \simeq M$ となる $X \in \mathcal{C}$ を対応させる. これは, F が fully faithful であることから well-defined である. さらに, これは $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ の逆写像になっている. ■

2.0.1 Triangulated category と quotient category

triangulated cat. について詳しく述べておく. 特に, 以下の 3 つについて詳しく解説する.

(1) triangle (2) épaisse subcategory[*14] (3) quotient category

ここでは, $\mathcal{A}$ を abelian cat., $\mathcal{K}, \mathcal{H}$ を triangulated cat. とする.

まずは, triangle について. triangle は, mod-A の exact sequence に対応している. 例えば, triangle : $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ に対して, $gf = 0, hg = 0$ が成り立つ[*15].

Def 2.0.3 functor : $\mathcal{K} \to \mathcal{A}$ が cohomological functor とは, triangle : $X \to Y \to Z \to X[1]$ に対して, H によって導かれる列 : $\cdots \to H(Z[n-1]) \to H(X[n]) \to H(Y[n]) \to H(Z[n]) \to H(X[n+1]) \to \cdots$ が exact になるときにいう. また, $H^n := H \cdot [n]$ とおく.

Prop 2.0.4 $W \in \mathcal{K}$ に対して, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(W, -) : \mathcal{K} \to \text{Mod-}\mathbb{Z}$ は cohomological functor である.

---

*14 subcategory $\mathcal{D}$ of $\mathcal{C}$ とは, faithful functor : $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が存在するときにいう. 特に, その functor が fully faithful のとき, full subcategory という.

*15 (TR1) (TR3) より,
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X[1] \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r, "h"'] & X[1] \end{tikzcd}$$
となるから, $gf = 0$. $hg = 0$ は (TR2) で triangle をずらしてから同様.

proof. triangle : $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ とする. このとき,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(W,X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(W,f)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(W,Y) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(W,g)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(W,Z)$$

が exact であることを示せば, あとは (TR2) によりずらしてから同様にすればよい. $gf = 0$ より, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(W,g)\cdot\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(W,f) = 0$. 逆に, $v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(W,Y)$ で, $gv = 0$ とする. ((TR2) でずらしてから) (TR3) より,

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "1"] \arrow[d, dotted, "{}^{\exists}u"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W \arrow[r] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W[1] \arrow[d] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r, "h"'] & Z[1]
\end{tikzcd}$$

■

Remark 2.0.5 Def 2.0.3, Prop 2.0.4 に対して, その dual を考えることができる. contravariant functor[*16] $H : \mathcal{K} \to \mathcal{A}$ に対して, H によって導かれる列 : $\cdots \to H(X[n+1]) \to H(Z[n]) \to H(Y[n]) \to H(X[n]) \to H(Z[n-1]) \to \cdots$ が exact になるとき, H を contravariant cohomological functor という. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,W) : \mathcal{K} \to \text{Mod-}\mathbb{Z}$ は contravariant cohomological functor である.

Prop 2.0.6 2 つの triangle とその間の morphism

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X[1] \arrow[d, "{u[1]}"] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Z' \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

に対して, $\{u,v,w\}$ のうち, 2 つが iso. ならば, 残りの 1 つも iso. である.

proof. (TR2) により, u, v が iso. のときを示せばよい. Prop 2.0.4 より,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,X) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,Y) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,Z) \arrow[r] \arrow[d, "{\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,w)}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,X[1]) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,Y[1]) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,X') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,Y') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,Z') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,X'[1]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,Y'[1])
\end{tikzcd}$$

[*16] $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が contravariant functor とは, F が導く morphism 間の写像が $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y),F(X))$ となるときにいう.

2 行はともに exact になるから, 5-Lemma より, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-, w)$ は iso. $-$ に Z', Z を代入して,

$$\begin{array}{llcl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(Z', w): & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(Z', Z) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(Z', Z') \quad \text{iso.} \\ & \quad\Psi & & \quad\Psi \\ & {}^{\exists}w' & \longmapsto & ww' = 1_{Z'} \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(Z, w): & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(Z, Z) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(Z, Z') \quad \text{iso.} \\ & \quad\Psi & & \quad\Psi \\ & w'w & \longmapsto & ww'w \\ & \quad\| & & \quad\| \\ & 1_Z & \longmapsto & w \end{array}$$

したがって, w は iso. である. ■

ここで, 上の証明で使ったことをまとめておく.

Prop 2.0.7 [Yoneda's Lemma]
$f: X \to Y$ に対して, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-, f)$ が iso. ならば, f は iso. である.

Cor 2.0.8 $f: X \to Y$ に対して, triangle : $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to X[1]$ は同型を除いて一意的である.

Lemma 2.0.9 triangle : $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ に対して, 次は同値である.

(1) f は section. つまり, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(f, X)$ は全射.
(2) g は retraction. つまり, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(Z, g)$ は全射.
(3) $h = 0$.

proof. (1) $\Rightarrow$ (3). $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(u, X)$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(Y, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, X)$: 全射とする. このとき, $uf = 1_X$ となる $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(Y, X)$ が存在する. したがって, (TR3) より, 次の commutative diagram を作ることができる.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X[1] \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "1_X"'] & X \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X[1] \end{tikzcd}$$

よって, $h = 0$. (2) $\Rightarrow$ (3). (1) $\Rightarrow$ (3) の dual. (3) $\Rightarrow$ (2). Prop 2.0.4 より. (3) $\Rightarrow$ (1). Remark 2.0.5 より. ■

Prop 2.0.10 triangle : $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ に対して, 次は同値である.

(1) f は iso. (2) $Z = 0$.

proof. (1) $\Rightarrow$ (2). (TR3) より,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r, "h"'] & X[1]
\end{tikzcd}$$

Prop 2.0.6 より, $Z \simeq 0$. (2) $\Rightarrow$ (1). Lemma 2.0.9 より, f は section. (TR2) でずらしてから Lemma 2.0.9 で, f は retraction. したがって, f は iso. ■

Prop 2.0.11 object と morphism の組 : $X_i \xrightarrow{f_i} Y_i \xrightarrow{g_i} Z_i \xrightarrow{h_i} X_i[1]$ $(1 \leq i \leq n)$ と有限直和 $\oplus$ に対して, 次は同値である.

(1) $X_i \xrightarrow{f_i} Y_i \xrightarrow{g_i} Z_i \xrightarrow{h_i} X_i[1]$ $(1 \leq i \leq n)$ は triangle である.

(2) $\oplus X_i \xrightarrow{\oplus f_i} \oplus Y_i \xrightarrow{\oplus g_i} \oplus Z_i \xrightarrow{\oplus h_i} \oplus X_i[1]$ は triangle である.

proof. $X := \oplus X_i$, $f := \oplus f_i$ とおき, Y, Z, g, h も同様におく. また, projection $p_i^X : X \to X_i$, inclusion $q_i^X : X_i \to X$ とする.

(1) $\Rightarrow$ (2). $Z' := C(f)$ とすると, (TR3) より次のような commutative diagram を作れる.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_i^X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "p_i^Y"] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "r_i"] & X[1] \arrow[d] \\
X_i \arrow[r, "f_i"'] & Y_i \arrow[r, "g_i"'] & Z_i \arrow[r, "h_i"'] & X_i[1]
\end{tikzcd}$$

よって, 次の commutative diagram を得る.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "r"] & X[1] \arrow[d] \\
X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & X[1]
\end{tikzcd}$$

(今の段階では, 下の行は triangle とは限らない) そこで, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,?)$ を apply して, commutative diagram を作る.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,Y) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,Z') \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,r)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,X[1]) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,Y[1]) \arrow[d, equal] & \text{exact} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,X) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,Y) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,Z) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,X[1]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,Y[1]) & \\
\wr| & \wr| & \wr| & \wr| & \wr| & \\
\oplus\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,X_i) \arrow[r] & \oplus\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,Y_i) \arrow[r] & \oplus\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,Z_i) \arrow[r] & \oplus\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,X_i[1]) \arrow[r] & \oplus\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,Y_i[1]) & \text{exact}
\end{tikzcd}$$

ここで, 上行と下行は Prop 2.0.4 より, exact である. よって, 中段も exact となり, 5-Lemma より $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,r)$ は iso. したがって, Yoneda's Lemma より, r は iso となる.

(2) $\Rightarrow$ (1). $Z'_i := C(f_i)$, $Z' := \oplus Z_i$ とおくと, (1) $\Rightarrow$ (2) より, $X \to Y \to Z' \to X[1]$ は triangle. (TR3) より,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "r"] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & X[1]
\end{tikzcd}$$

$r_i : Z_i \xrightarrow{q_i^Z} Z \xrightarrow{r} Z' \xrightarrow{p_i^{Z'}} Z'_i$ とすると, 次の commutative diagram を得る.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\oplus r_i"] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & X[1]
\end{tikzcd}$$

Prop 2.0.6 より, $\oplus r_i$ は iso. だから, r_i は iso. となる. ■

Prop 2.0.12 triangle : $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{0} X[1]$ は次のように分解される.

$$X \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} Z \oplus X \xrightarrow{[1\ \ 0]} Z \xrightarrow{0} X[1]$$

proof. $X \xrightarrow{1} X \to 0 \to X[1]$, $Z \xrightarrow{1} Z \to 0 \to Z[1]$ は triangle だから, Prop 2.0.11 より, $X \xrightarrow{f'} Z \oplus X \xrightarrow{g'} Z \xrightarrow{0} X[1]$ は triangle である. ここで, $f' := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $g' := [1\ \ 0]$ である. また,

Prop 2.0.9 より, g は retraction だから, $g'' : Z \to Y$ で, $gg'' = 1_Z$ となるものが存在する. したがって, 次の commutative diagram を得る.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, equal] & Z \oplus X \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "{[g''\ f]}"] & Z \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r, "0"'] & X[1]
\end{tikzcd}$$

Prop 2.0.6 より, $[g''\ f]$ は iso. になる. ■

Lemma 2.0.13 triangle とその間の morphism

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X[1] \arrow[d] & \text{(triangle 1)} \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & X'[1] & \text{(triangle 2)}
\end{tikzcd}$$

に対して, w が iso. ならば, $v' : Y \to Y'$ が存在して, 次を満たす.

(1) $X \xrightarrow{{}^t[f\ u]} Y \oplus X' \xrightarrow{[v'\ -f']} Y' \xrightarrow{hw^{-1}g'} X[1]$ は triangle である.

(2) 下の図式は commutative である.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X[1] \arrow[d] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

proof. 下のような commutative diagram を作る.

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, equal] & Z' \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "w^{-1}"] & X' \arrow[r, "-f'[1]"] \arrow[d, "-1"] & Y'[1] \arrow[d, equal] \\
Y' \arrow[r, "w^{-1}g'"'] & Z \arrow[r, "-h'w"'] & X'[1] \arrow[r, "f'[1]"'] & Y'
\end{tikzcd}$$

(TR2)[(triangle 2) に適用] により, 上行は triangle で, 縦の morphism は iso. だから, 下行も triangle [:= (triangle 3)] である. (TR2)[(triangle 1) に適用], (TR4)[(triangle 1)(triangle 3) に

適用] により, 次の commutative diagram ($*$) を得る.

$$
\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r, "w^{-1}g'"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "-h'w"] \arrow[d, "h"] & X' \arrow[r, "f'[1]"] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "(*1)"] & Y'[1] \arrow[d, equal] \\
Y' \arrow[r, "hw^{-1}g'"'] \arrow[d, "w^{-1}g'"'] & X[1] \arrow[r, "\phi"'] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(*2)"] & C(hw^{-1}g') \arrow[r, "\psi"'] \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, phantom, "(*3)"] & Y'[1] \arrow[d, "(w^{-1}g')[1]"] \\
Z \arrow[r, "h"'] \arrow[d, "-h'w"'] \arrow[dr, phantom, "(*4)"] & X[1] \arrow[r, "-f[1]"'] \arrow[d, "\phi"] & Y[1] \arrow[r, "-g[1]"'] \arrow[d, equal] & Z[1] \arrow[d, "-(h'w)[1]"] \\
X'[1] \arrow[r, "\gamma"'] & C(hw^{-1}g') \arrow[r, "\delta"'] & Y[1] \arrow[r, "0"'] & X'[2]
\end{tikzcd}
$$

一番下の行は triangle である. よって, Prop 2.0.12 より, 次の triangle の同型を得る.

$$
\begin{tikzcd}
X'[1] \arrow[r, "{}^t[0\ 1]"] \arrow[d, equal] & Y[1] \oplus X'[1] \arrow[r, "{[1\ 0]}"] \arrow[d, "{[\eta\ \gamma]}"] & Y[1] \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & X'[2] \arrow[d, equal] \\
X'[1] \arrow[r, "\gamma"'] & C(hw^{-1}g') \arrow[r, "\delta"'] & Y[1] \arrow[r, "0"'] & X'[2]
\end{tikzcd}
$$

ここで, ${}^t[\delta\ \theta] := [\eta\ \gamma]^{-1}$ とおき, 次のことを確認しておく.

$$
\begin{aligned}
1_{C(hw^{-1}g')} &= [\eta\ \gamma] \cdot {}^t[\delta\ \theta] \\
&= \eta\delta + \gamma\theta
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1_{Y[1]} & 0 \\ 0 & 1_{X'[1]} \end{bmatrix} &= {}^t[\delta\ \theta] \cdot [\eta\ \gamma] \\
&= \begin{bmatrix} \delta\eta & \delta\gamma \\ \theta\eta & \theta\gamma \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

さらに, ($*1$), ($*2$) より, 次の commutative diagram を得る.

$$
\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r, "hw^{-1}g'"] \arrow[d, equal] & X[1] \arrow[r, "{}^t[-f[1]\ \ \theta\phi]"] \arrow[d, equal] & Y[1] \oplus X'[1] \arrow[r, "{[\psi\eta\ \ f'[1]]}"] \arrow[d, "{[\eta\ \ \gamma]}"] & Y'[1] \arrow[d, equal] \\
Y' \arrow[r, "hw^{-1}g'"'] & X[1] \arrow[r, "\phi"'] & C(hw^{-1}g') \arrow[r, "\psi"'] & Y'[1]
\end{tikzcd}
$$

下行は ($*$) の 2 行目で triangle である. また縦の morphism は iso. だから, 上行も triangle になる. この triangle に (TR2) を適用して,

$$
X \xrightarrow{{}^t[f\ \ -(\theta\phi)[-1]]} Y \oplus X' \xrightarrow{[-(\psi\eta)[-1]\ \ -f']} Y' \xrightarrow{hw^{-1}g'} X[1]
$$

は triangle [:= (triangle 4)] である. したがって, $[-(\psi\eta)[-1] \;\; -f'] \cdot {}^t[f \;\; -(\theta\phi)[-1]] = 0$ より, $-(\psi\eta)[-1] \cdot f = f' \cdot (-(\theta\psi)[-1])$. さらに, $(*3)$ より,

$$
\begin{aligned}
g' \cdot (-(\psi\eta)[-1]) \quad &= -g' \cdot \psi[-1] \cdot \eta[-1] \\
&= w \cdot g \cdot \delta[-1] \cdot \eta[-1] \\
&= w \cdot g
\end{aligned}
$$

また, $(*4)$ より,

$$
\begin{aligned}
-(\theta\phi) \cdot h \quad &= \theta \cdot \gamma \cdot h'w \\
&= h' \cdot w
\end{aligned}
$$

よって, 次の commutative diagram $(**)$ を得る.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "-(\theta\phi)[-1]"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "-(\psi\eta)[-1]"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"] & X[1] \arrow[d, "-\theta\phi"] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & X'[1]
\end{tikzcd}
$$

したがって, 次も commutative diagram である.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "-(\theta\phi)[-1]-u"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "-(\psi\eta)[-1]-v"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "0"] & X[1] \arrow[d, "-\theta\phi-u[1]"] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & X'[1]
\end{tikzcd}
$$

上行に $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-, X')$ を適用して,

$$
\text{exact} \qquad
\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(Y, X') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, X') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(Z[-1], X') \\
\Cup & & \Cup & & \Cup \\
{}^{\exists}\varphi & \longmapsto & -(\theta\phi)[-1] - u & \longmapsto & 0
\end{array}
$$

よって, 次の commutative diagram を得る.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "{}^t[f \;\; u]"] \arrow[d, equal] & Y \oplus X' \arrow[r, "{[v' \;\; -f']}"] \arrow[d, "\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix}"] & Y' \arrow[r, "hw^{-1}g'"] \arrow[d, equal] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "{}^t[f \;\; -(\theta\phi)[-1]]"'] & Y \oplus X' \arrow[r, "{[-(\psi\eta)[-1] \;\; -f']}"'] & Y' \arrow[r, "hw^{-1}g'"'] & X[1]
\end{tikzcd}
$$

ここで, $v' := -(\psi\eta)[-1] - f'\varphi$ とする. 下行は (triangle 4) で, 縦の morphism は iso. だから上行も triangle である. さらに, $(**)$ より, 次の図式も commutative であることがわかる.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X[1] \arrow[d] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & X'[1]
\end{tikzcd}
$$

■

次に, épaisse subcategory について. épaisse subcategory は, triangulated cat. をわって (quotient cat.) また triangulated cat. にするための subcategory である.

Def 2.0.14 $\mathcal{U}$ が $\mathcal{K}$ の épaisse subcategory とは, 次を満たすときにいう.

(1) $\mathcal{U}$ は $\mathcal{K}$ の full triangulated subcat.

(2) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y)$ に対して,

(i) f が $\mathcal{U}$ の object を通過する. (ii) $C(f) \in \mathcal{U}$

ならば, $X, Y \in \mathcal{U}$ となる.

full subcat. が épaisse subcategory である判定条件を用意しておく.

Prop 2.0.15 $\mathcal{U}$ を $\mathcal{K}$ の full triangulated subcategory とする. このとき, 次は同値である.

(1) $\mathcal{U}$ は $\mathcal{K}$ の épaisse subcategory である.

(2) $\mathcal{U}$ は同型と直和因子で閉じている.

proof. (1) $\Rightarrow$ (2). (同型で閉じていること) $f : X \to Y$, $Y \in \mathcal{U}$ とすると, Prop 2.0.10 より, $X \xrightarrow{f} Y \to 0 \to X[1]$ は triangle である. よって, $X \in \mathcal{U}$. (直和因子で閉じていること) $X, Y \in \mathcal{K}$ とする. Prop 2.0.12 より, $X[-1] \xrightarrow{0} Y \to X \oplus Y \to X$ は triangle. よって, $X \oplus Y \in \mathcal{U}$ ならば, 0 は $\mathcal{U}$ を通過するから, $X[-1], Y \in \mathcal{U}$. (2) $\Rightarrow$ (1). triangle : $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to X[1]$,
$$
\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dr, "f''"] & \\
X \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "f"'] \arrow[rr, phantom, shift left=3, "\circlearrowleft"] & & Y
\end{tikzcd}
$$
, $W, Z \in \mathcal{U}$ とすると, (TR3) より以下の commutative

diagram をもつ.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, equal] & W \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & C(f') \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & X[1]
\end{tikzcd}$$

(TR2) でずらしてから Lemma 2.0.13 より, triangle : $W \to C(f') \oplus Y \to Z \to W[1]$ を得る. $W, Z \in \mathcal{U}$ より, $C(f') \oplus Y \in \mathcal{U}$ だから, $Y \in \mathcal{U}$. したがって, $X \in \mathcal{U}$ となる. ■

Example 2.0.16 $H : \mathcal{K} \to \mathcal{A}$: cohomological functor, $\mathcal{U} := \left\{ X \in \mathcal{K} \,\middle|\, H^n(X) = 0 \ ({}^\forall n \in \mathbb{Z}) \right\}$: full subcat. of $\mathcal{K}$ とする. このとき,

(1) $\mathcal{U}$ は $\mathcal{K}$ の épaisse subcategory である.
(2) f : morphism $\in \mathcal{K}$ に対して, 次は同値である.

(i) $C(f) \in \mathcal{U}$ (ii) $H^n(f)$: iso. (${}^\forall n$)

以下, $\mathcal{U}$ を $\mathcal{K}$ の épaisse subcategory とし, $S := \left\{ f : \text{morphism} \in \mathcal{K} \,\middle|\, C(f) \in \mathcal{U} \right\}$ とおく. また, $f : X \to Y$ に対して, $f \in S$ であることを $X \Rightarrow Y$ で表すことにする.

Prop 2.0.17 次が成り立つ.

(FR0) $W \xrightarrow{f} X \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{g} Z$, $sf,\ gs \in S$ ならば, $s \in S$.

(FR1) (1) $1_X \in S$ (2) $X \overset{s}{\Rightarrow} Y \overset{t}{\Rightarrow} Z$ ならば, $ts \in S$.

(FR2) (1)
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, Rightarrow, "s"] \arrow[d, "f"'] & Y \\
Z &
\end{tikzcd}
\text{ ならば, }
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, Rightarrow, "s"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d, "\exists"] \\
Z \arrow[r, Rightarrow, "\exists"'] & {}^\exists W
\end{tikzcd}$$

(2)
$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, "g"] \\
Z \arrow[r, Rightarrow, "t"'] & W
\end{tikzcd}
\text{ ならば, }
\begin{tikzcd}
{}^\exists X \arrow[r, Rightarrow, "\exists"] \arrow[d, "\exists"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d, "g"] \\
Z \arrow[r, Rightarrow, "t"'] & W
\end{tikzcd}$$

(FR3) 次は同値である.

(1) $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \overset{{}^\exists s}{\Rightarrow} Z$, $sf = sg$ (2) $W \overset{{}^\exists t}{\Rightarrow} X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$, $ft = gt$

(FR4) $f \in S \iff f[1] \in S$

(FR5)
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, Rightarrow, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d, Rightarrow, "v"] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y'
\end{tikzcd}
\text{ ならば, }
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, Rightarrow, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "v"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C(f) \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "\exists"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X[1] \arrow[d, Rightarrow] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r] & C(f') \arrow[r] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

<u>**proof.**</u> (FR0) (TR3) より, 以下の commutative diagram ($*1$) を得る.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "s"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C(s) \arrow[r, "h"] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, Rightarrow, "gs"'] & Z \arrow[r] & C(gs) \arrow[r] & X[1]
\end{tikzcd}
$$

さらに, (TR4) より, 以下の commutative diagram ($*2$) を得る.

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d, "s"] & C(f) \arrow[r] \arrow[d] & W[1] \arrow[d, equal] \\
W \arrow[r, Rightarrow, "sf"'] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & C(sf) \arrow[r] \arrow[d] & W[1] \arrow[d] \\
X \arrow[r, "s"'] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & C(s) \arrow[r, "h"'] \arrow[d, equal] & X[1] \arrow[d] \\
C(f) \arrow[r] & C(sf) \arrow[r] & C(s) \arrow[r, "w"'] & C(f)[1]
\end{tikzcd}
$$

($*1$) より, h は $C(gs) \in \mathcal{U}$ を通過するから, w は $\mathcal{U}$ を通過する. さらに, ($*2$) より,

$$
C(f) \longrightarrow C(sf) \longrightarrow C(s) \xrightarrow{w} C(f)[1]
$$

は triangle である. $C(sf) \in \mathcal{U}$ だから, épaisse subcategory の定義より, $C(s) \in \mathcal{U}$ を得る.

(FR1) (1) は明らか. (2) を示す. (TR4) より, 次の commutative diagram を得る.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, Rightarrow, "s"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "t"] & C(s) \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "ts"'] \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & C(ts) \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d] \\
Y \arrow[r, Rightarrow, "t"'] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & C(t) \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y[1] \arrow[d] \\
C(s) \arrow[r] & C(ts) \arrow[r] & C(t) \arrow[r] & C(s)[1]
\end{tikzcd}
$$

よって, $C(s),\ C(t) \in \mathcal{U}$ より, $C(ts) \in \mathcal{U}$ となる.

(FR2) (1) $X \overset{{}^t[s\ \ f]}{\to} Y \oplus Z \overset{[g\ \ -t]}{\to} W \to X[1]$ を triangle とする. このとき, $gs = tf$ であることに注意する. (TR4), Prop 2.0.12 と (TR2) より, 次の commutative diagram (∗3) を得る.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "{{}^t[s\ \ f]}"] \arrow[d, equal] & Y \oplus Z \arrow[r, "{[g\ \ -t]}"] \arrow[d, "{[1\ \ 0]}"] & W \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, Rightarrow, "s"'] \arrow[d, "{{}^t[s\ \ f]}"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & C(s) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(*4)"] & X[1] \arrow[d] \\
Y \oplus Z \arrow[r, "{[1\ \ 0]}"] \arrow[d, "{[g\ \ -t]}"'] \arrow[dr, phantom, "(*5)"] & Y \arrow[r, "0"] \arrow[d] & Z[1] \arrow[r, "{{}^t[0\ \ 1]}"'] \arrow[d, equal] & Y[1] \oplus Z[1] \arrow[d] \\
W \arrow[r] & C(s) \arrow[r] & Z[1] \arrow[r, "{-t[1]}"'] & W[1]
\end{tikzcd}$$

(∗4), (∗5) より, 次の commutative diagram を得る.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, Rightarrow, "s"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "(*6)"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C(s) \arrow[r] \arrow[d, equal] & X[1] \arrow[d] \\
Z \arrow[r, "t"'] & W \arrow[r] & C(s) \arrow[r] & Z[1]
\end{tikzcd}$$

さらに, (∗3) の下行は triangle より, (TR2), (TR3), Prop 2.0.6 で次の triangle の同型を得る.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "t"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & W \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C(s) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z[1] \arrow[d, equal] \\
Z \arrow[r, "t"'] & W \arrow[r] & C(t) \arrow[r] & Z[1]
\end{tikzcd}$$

よって, $C(t) \simeq C(s) \in \mathcal{U}$ となり, 主張 (∗6) を得る. (2) も同様.

(FR3) $f : X \to Y$ に対して, 次が同値であることを示せばよい.

(i) f は $\mathcal{U}$ を通過する. (ii) $X \overset{f}{\to} Y \overset{\exists s}{\Rightarrow} Z$, $sf = 0$ (iii) $W \overset{\exists t}{\Rightarrow} X \overset{f}{\to} Y$, $ft = 0$

(i)⇒(ii). $\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ X \arrow[ur] \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$, $U \in \mathcal{U}$ とすると, triangle : $U \overset{u}{\to} Y \overset{s}{\Rightarrow} C(u) \to U[1]$ を得る. さらに, $sf = 0$ も明らか. (ii)⇒(i). (TR1), (TR2), (TR3) より, 次の commutative diagram を

得る.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[r, "-1"] \arrow[d] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "(*7)"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
Y \arrow[r, Rightarrow, "s"'] & Z \arrow[r] & C(s) \arrow[r] & Y[1]
\end{tikzcd}
$$

したがって, $(*7)$ より, f は $C(s)[-1] \in \mathcal{U}$ を通過する. (i)$\Leftrightarrow$(iii) も同様.

(FR4) 明らか.

(FR5) $Z := C(f)$, $Z' := C(f')$ とする. (TR4) より, 次の commutative diagram $(*8)$, $(*9)$ を得る.

$(*8)$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "v"] & Z \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "vf"'] \arrow[d, "f"'] & Y' \arrow[r] \arrow[d, equal] & C(vf) \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d] \\
Y \arrow[r, Rightarrow, "v"'] \arrow[d] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & C(v) \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y[1] \arrow[d] \\
Z \arrow[r, Rightarrow] & C(vf) \arrow[r] & C(v) \arrow[r] & Z[1]
\end{tikzcd}
$$

$(*9)$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, Rightarrow, "u"] \arrow[d, equal] & X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & C(u) \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "f'u"'] \arrow[d, Rightarrow, "u"'] & Y' \arrow[r] \arrow[d, equal] & C(f'u) \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & X[1] \arrow[d] \\
X' \arrow[r, "f'"'] \arrow[d] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & Z' \arrow[r] \arrow[d, equal] & X'[1] \arrow[d] \\
C(u) \arrow[r] & C(f'u) \arrow[r, Rightarrow] & Z' \arrow[r] & C(u)[1]
\end{tikzcd}
$$

ここで, $C(u)$, $C(v) \in \mathcal{U}$ より, $(*8)$ の 4 行目 : $Z \Rightarrow C(vf)$, $(*9)$ の 4 行目 : $C(f'u) \Rightarrow Z'$ であることに注意する. $vf = f'u$ より, $(*8)$ の 2 行目と $(*9)$ の 2 行目は同じ triangle であるから, $C := C(vf) = C(f'u)$ とおき, 次の commutative diagram をもつ.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "vf", "f'u"'] \arrow[d, Rightarrow, "u"'] & Y' \arrow[r] \arrow[d, equal] & C \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & X[1] \arrow[d] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & X'[1]
\end{tikzcd}
$$

したがって, (FR1) より, 主張の commutative diagram を得る. ■

次に, quotient category について.

Def 2.0.18 $X,\ Y \in \mathcal{K}$ に対して,

$$\mathcal{K}(X,Y) := \left\{ (f,\ s) \,\middle|\, X \xrightarrow{f} W \overset{s}{\Leftarrow} Y \right\}$$

とおく. また, $(f_1,\ s_1),\ (f_2,\ s_2) \in \mathcal{K}(X,Y)$ に対して, $(f_1,\ s_1) \sim (f_2,\ s_2)$ を次のように定義する.

$$\begin{tikzcd}
& W_1 \arrow[d, "\exists"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \\
X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & {}^{\exists}W & Y \arrow[ul, Rightarrow, "s_1"'] \arrow[l, Rightarrow, "\exists"] \arrow[dl, Rightarrow, "s_2"] \\
& W_2 \arrow[u, "\exists"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] &
\end{tikzcd}$$

この関係”∼”は同値関係である.

proof. $(f_1,\ s_1) \sim (f_2,\ s_2) \sim (f_3,\ s_3)$ ならば, $(f_1,\ s_1) \sim (f_3,\ s_3)$ であることを示せばよい. 仮定より, 以下の commutative diagram をもつ.

$$\begin{tikzcd}
& W_1 \arrow[d, "g_1"] & \\
& W & \\
X \arrow[uur, "f_1"] \arrow[r, "f_2"] \arrow[ddr, "f_3"'] & W_2 \arrow[u, "g_2"] \arrow[d, "g_2'"] & Y \arrow[uul, Rightarrow, "s_1"'] \arrow[ul, Rightarrow, "s"] \arrow[l, Rightarrow, "s_2"] \arrow[dl, Rightarrow, "s'"] \arrow[ddl, Rightarrow, "s_3"] \\
& W' & \\
& W_3 \arrow[u, "g_3"] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
W & \\
& Y \arrow[ul, Rightarrow, "s"'] \arrow[dl, Rightarrow, "s'"] \\
W' &
\end{tikzcd}$$
に対して, (FR2) より, commutative diagram
$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, Rightarrow, bend left] & & \\
& Y \arrow[ul, Rightarrow, "s"'] \arrow[dl, Rightarrow, "s'"] & Z \\
W' \arrow[urr, Rightarrow, bend right] & &
\end{tikzcd}$$
をも

つ. このとき, Y から Z への 2 つの道
$$\begin{tikzcd} W \arrow[drr, Rightarrow, bend left] & & \\ W_2 \arrow[u, "g_2"] \arrow[d, "g_2'"'] & Y \arrow[l, Rightarrow, "s_2"'] & Z \\ W' \arrow[urr, Rightarrow, bend right] & & \end{tikzcd}$$
は等しいから, (FR3) により, W_2 から W'' への等しい道
$$\begin{tikzcd} W \arrow[dr, Rightarrow, bend left] & & \\ W_2 \arrow[u, "g_2"] \arrow[d, "g_2'"'] & Z \arrow[r, Rightarrow] & W'' \\ W' \arrow[ur, Rightarrow, bend right] & & \end{tikzcd}$$
が作れる. このとき, (FR1) により, $Y \Rightarrow W''$ であることに注意する. したがって, 次の commutative diagram を得る.

$$\begin{tikzcd} & W_1 \arrow[d, "g_1"] & \\ & W \arrow[d, Rightarrow] & \\ X \arrow[uur, "f_1"] \arrow[ur, dotted, "g_2 f_2"'] \arrow[dr, dotted, "g_2' f_2"] \arrow[ddr, "f_3"'] & W'' & Y \arrow[uul, Rightarrow, "s_1"'] \arrow[ul, Rightarrow, dotted, "s"] \arrow[l, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow, dotted, "s'"'] \arrow[ddl, Rightarrow, "s_3"] \\ & W' \arrow[u, Rightarrow] & \\ & W_3 \arrow[u, "g_3"] & \end{tikzcd}$$

よって, $(f_1, s_1) \sim (f_3, s_3)$ が成り立つ. ■

そこで,
$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{K}}(X, Y) := \mathcal{K}(X, Y)/\sim$$
とおく. また, (f, s) を含む同値類を $[(f, s)]$ とする.

Lemma 2.0.19 $X,\ Y,\ Z \in \mathcal{K}$ に対して,

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{K}}(X,Y)\times\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{K}}(Y,Z) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{K}}(X,Z) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \Big([(f,\ s)],\ [g,\ s']\Big) & \longmapsto & [(hf,\ s''s')] \end{array}$$

は well-definded である. ここで, $h,\ s''$ は次のようにとる.

$$\begin{tikzcd} & & W'' & & \\ & W \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, phantom, "\text{(FR2)}"] & & W' \arrow[ul, Rightarrow, "s''"'] & \\ X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, Rightarrow, "s"] \arrow[ur, "g"'] & & Z \arrow[ul, Rightarrow, "s'"'] \end{tikzcd}$$

proof. $[(f,\ s_1)] = [(f',\ s'_1)],\ [(g,\ s_2)] = [(g',\ s'_2)]$ とすると, 次の commutative diagram $(*1)$ を得る.

$$\begin{tikzcd} & & W_3 & & \\ & W_1 \arrow[ur, "h"] \arrow[d, "g_1"'] & & W_2 \arrow[ul, Rightarrow, "s_3"'] \arrow[d, "g_2"'] & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & W & Y \arrow[ul, Rightarrow, "s_1"'] \arrow[l, Rightarrow, "s"] \arrow[dl, Rightarrow, "s'_1"] \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & W' & Z \arrow[ul, Rightarrow, "s_2"'] \arrow[l, Rightarrow, "s'"] \arrow[dl, Rightarrow, "s'_2"] \\ & W'_1 \arrow[u, "g'_1"] \arrow[dr, "h'"'] & & W'_2 \arrow[u, "g'_2"] \arrow[dl, Rightarrow, "s'_3"] & \\ & & W'_3 & & \end{tikzcd}$$

このとき, (FR2) により, commutative diagram ($*2$)
$$\begin{tikzcd} & & W_2 \arrow[d, "g_2"] \\ W \arrow[dr, "\alpha"'] & Y \arrow[l, Rightarrow, "s"'] \arrow[ur, "g"] & W' \arrow[dl, Rightarrow, "\beta"] \\ & W'' & \end{tikzcd}$$
を得るが,

$g_2 g = g'_2 g'$ より, $(hf,\ s_3 s_2) \sim (\alpha g_1 f,\ \beta s')$ であることを示せばよい.

$$\begin{tikzcd} & & W_3 & & \\ & W_1 \arrow[ur, "h"] \arrow[d, "g_1"'] & & W_2 \arrow[ul, Rightarrow, "s_3"'] \arrow[d, "g_2"'] & \\ X \arrow[ur, "f"] & W \arrow[r, "\alpha"'] & W'' & W' \arrow[l, Rightarrow, "\beta"] & Z \arrow[l, Rightarrow, "s'"] \arrow[ul, Rightarrow, "s_2"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} W_3 & \\ & W_2 \arrow[ul, Rightarrow, "s_3"'] \arrow[d, "g_2"] \\ W'' & W' \arrow[l, Rightarrow, "\beta"] \end{tikzcd}$$
に対して, (FR2) より, commutative diagram ($*3$)
$$\begin{tikzcd} W_3 \arrow[d, "\varphi"'] & \\ V & W_2 \arrow[ul, Rightarrow, "s_3"'] \arrow[d, "g_2"] \\ W'' \arrow[u, Rightarrow, "\psi"] & W' \arrow[l, Rightarrow, "\beta"] \end{tikzcd}$$
を

得る. よって, $\varphi h s_1 \overset{(*1)}{=} \varphi s_3 g \overset{(*3)}{=} \psi \beta g_2 g \overset{(*2)}{=} \psi \alpha s \overset{(*1)}{=} \psi \alpha g_1 s_1$ より, Y から V への等しい道

$$\begin{tikzcd} & & W_3 \arrow[d, "\varphi"] \\ W_1 \arrow[urr, "h"] \arrow[d, "g_1"'] & Y \arrow[l, Rightarrow, "s_1"] & V \\ W \arrow[rr, "\alpha"'] & & W'' \arrow[u, Rightarrow, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

を得る. したがって, (TR3) より, W_1 から W''' への等しい道

$$\begin{tikzcd}
 & W_3 \arrow[d, "\varphi"] & \\
W_1 \arrow[ur, "h"] \arrow[d, "g_1"'] & V \arrow[r, Rightarrow, "\gamma"] & W''' \\
W \arrow[r, "\alpha"'] & W'' \arrow[u, Rightarrow, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

を得る. よって, 次の commutative diagram を得る.

$$\begin{tikzcd}
 & & W_3 \arrow[d, "\gamma\varphi"] & & \\
 & W_1 \arrow[ur, "h"] \arrow[d, "g_1"'] & W''' & W_2 \arrow[ul, Rightarrow, "s_3"'] \arrow[d, "g_2"'] & \\
X \arrow[ur, "f"] & W \arrow[r, "\alpha"'] & W'' \arrow[u, Rightarrow, "\gamma\psi"'] & W' \arrow[l, Rightarrow, "\beta"] & Z \arrow[l, Rightarrow, "s'"] \arrow[ul, Rightarrow, "s_2"']
\end{tikzcd}$$

これは, $(hf,\ s_3s_2) \sim (\alpha g_1 f, \beta s')$ であることを意味している. ■

Lemma 2.0.20 $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{K}}(X, Y)$ に次のように和を定義する.

$$[(f_1,\ s_1)] + [(f_2,\ s_2)] := [(g_1 f_1 + g_2 f_2,\ s)]$$

ここで, $g_1,\ g_2,\ s$ は次のようにとる.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, Rightarrow, "s_1"] \arrow[d, Rightarrow, "s_2"'] \arrow[dr, phantom, "\text{(FR2)}"] & W_1 \arrow[d, Rightarrow, "g_1"] \\
W_2 \arrow[r, Rightarrow, "g_2"'] & W
\end{tikzcd}$$

さらに, (FR1) より, $t := g_1 s_1 = g_2 s_2 \in S$. このとき, この和は well-definded である.

proof. $[(f_1,\ s_1)] = [(f_1',\ s_1')], [(f_2,\ s_2)] = [(f_2',\ s_2')]$ とする. また,

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, Rightarrow, "s_1"] \arrow[d, Rightarrow, "s_2"'] \arrow[dr, phantom, "\text{(FR2)}"] & W_1 \arrow[d, Rightarrow, "g_1"] \\
W_2 \arrow[r, Rightarrow, "g_2"'] & W
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, Rightarrow, "s_1'"] \arrow[d, Rightarrow, "s_2'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{(FR2)}"] & W_1' \arrow[d, Rightarrow, "g_1'"] \\
W_2' \arrow[r, Rightarrow, "g_2'"'] & W'
\end{tikzcd}$$

とすると, $g_i, g'_i \in S$ より,

$$\begin{aligned}[(g_i f_i, g_i s_i)] &= [(f_i, s_i)] \\ &= [(f'_i, s'_i)] \\ &= [(g'_i f'_i, g'_i s'_i)]\end{aligned}$$

より, 改めて, $g_i f_i$ を f_i, $g'_i f'_i$ を f'_i と置き換え, $[(f_1 + f_2, s)] = [(f'_1 + f'_2, s')]$ であることを示せばよい. ここで, $s := g_1 s_1 = g_2 s_2$, $s' := g'_1 s'_1 = g'_2 s'_2$ である. つまり, 以下のことを示す.

$$[(f_i, s)] = [(f'_i, s')] \ (i = 1, 2) \Longrightarrow [(f_1 + f_2, s)] = [(f'_1 + f'_2, s')]$$

仮定より, 次の commutative diagram をもつ.

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[d, "g_i"] & \\
X \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "f'_i"'] & Z_i & Y \arrow[ul, Rightarrow, "s"'] \arrow[l, Rightarrow, "t_i"'] \arrow[dl, Rightarrow, "s'"] \\
 & W' \arrow[u, "g'_i"'] &
\end{tikzcd}$$

(FR2) より, 以下の commutative diagram を得る.

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
Z_1 \arrow[dr, Rightarrow] & Y \arrow[u, Rightarrow, "s"'] \arrow[l, Rightarrow, "t_1"'] \arrow[r, Rightarrow, "t_2"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{FR2})"] & Z_2 \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

このとき, Y から Z への等しい道

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\ Z_1 \arrow[dr, Rightarrow] & Y \arrow[u, Rightarrow, "s"'] & Z_2 \arrow[dl, Rightarrow] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

があるから, (FR3) より, W から M への等しい道

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\ Z_1 \arrow[dr, Rightarrow] & & Z_2 \arrow[dl, Rightarrow] \\ & Z \arrow[d, Rightarrow] & \\ & M & \end{tikzcd}$$

を得る. ここで, $h_i : Z_i \Rightarrow Z \Rightarrow M$ とおく.

(FR1) より, $h_i \in S$ であることに注意し, $t : Y \overset{t_1}{\Rightarrow} Z_1 \overset{h_1}{\Rightarrow} M$ とおく. 同様に, $t \in S$ である. さらに, Y から M への等しい道

$$\begin{tikzcd} & M & \\ Z_1 \arrow[ur, Rightarrow, "h_1"] & Y \arrow[d, Rightarrow, "s'"] & Z_2 \arrow[ul, Rightarrow, "h_2"'] \\ & W' \arrow[ul, "g_1'"] \arrow[ur, "g_2'"'] & \end{tikzcd}$$

が作れるから, W' から M' への等

しい道

$$
\begin{tikzcd}
 & M' & \\
 & M \arrow[u, Rightarrow, "t'"'] & \\
Z_1 \arrow[ur, Rightarrow, "h_1"] & & Z_2 \arrow[ul, Rightarrow, "h_2"'] \\
 & W' \arrow[ul, "g_1'"] \arrow[ur, "g_2'"'] &
\end{tikzcd}
$$

を得る. よって, 次の commutative diagram を得る.

$$
\begin{tikzcd}
 & W \arrow[d, "t'h_1g_1"] & \\
X \arrow[ur, "f_1+f_2"] \arrow[dr, "f_1'+f_2'"'] & M' & Y \arrow[ul, Rightarrow, "s"'] \arrow[l, Rightarrow, "t't"] \arrow[dl, Rightarrow, "s'"] \\
 & W' \arrow[u, "t'h_1g_1'"'] &
\end{tikzcd}
$$

これは, $[(f_1 + f_2,\ s)] = [(f_1' + f_2',\ s')]$ であることを意味している. ■

これにより, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{K}}(X, Y)$ は $0 = [(0,\ 1_Y)]$ をもつ abelian gp. であることがわかる. さらに, Lemma 2.0.19 の map は bilinear であることも簡単にわかる. そこで, quotient category $\mathcal{K}/\mathcal{U}$ を次のように定義する.

Def 2.0.21 $\mathcal{K}$ の $\mathcal{U}$ による quotient category $\mathcal{K}/\mathcal{U}$ を次のように定義する.

$$
\mathcal{K}/\mathcal{U} = \begin{cases} \text{object :} & \mathcal{K} \text{ と同じ} \\ \text{morphism :} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}/\mathcal{U}}(X, Y) := \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{K}}(X, Y) \end{cases}
$$

この category は additive cat. である. また, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}/\mathcal{U}}(X, Y)$ の 0 は $[(0,\ 1_Y)]$, $Y = X$ のときの 1 は $[(1_X,\ 1_X)]$ である.

では, quotient cat. が triangulated cat. になっていることを確認しよう. まずは, そのための準備をする.

Def 2.0.22 canonical functor $Q : \mathcal{K} \to \mathcal{K}/\mathcal{U}$ を次のように定義する.

$$\begin{cases} X \in \mathcal{K} \text{ に対して}, & Q(X) = X \\ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y) \text{ に対して}, & Q(f) = [(f,\ 1_Y)] \end{cases}$$

Q が additive functor になっていることは明らかである. また, $s : X \Rightarrow Y$ ならば, $Q(s)$ は iso. になる. $Q(s)^{-1} = [(s,\ 1_Y)]^{-1} = [(1_Y,\ s)]$.

Remark 2.0.23 一般に, Q は full functor ではない.

Prop 2.0.24 (1) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}/\mathcal{U}}(X, Y) = \left\{ Q(s)^{-1}Q(f) \,\middle|\, X \xrightarrow{f} W \overset{s}{\Leftarrow} Y \right\} = \left\{ Q(g)Q(t)^{-1} \,\middle|\, X \overset{t}{\Leftarrow} W \xrightarrow{g} Y \right\}$

(2) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y)$ に対して, 次は同値である.

(i) $Q(f)$ は iso. (ii) $W \xrightarrow{\exists h} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\exists g} Z,\ gf,\ fh \in S$

(3) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y)$ に対して, 次が成り立つ.

(i) $Q(f)$ は iso. $\Leftrightarrow f \in S$

(ii) $s : Y \to Z,\ s,\ sf \in S$ ならば, $f \in S$

(iii) $t : W \to X,\ t,\ ft \in S$ ならば, $f \in S$

(4) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y)$ に対して, 次は同値である.

(i) $Q(f) = 0$ (ii) $\exists s : Y \Rightarrow Z,\ sf = 0$ (iii) $\exists t : W \Rightarrow X,\ ft = 0$

(iv) f は $\mathcal{U}$ を通過する.

(5) $\mathcal{U} = \mathrm{Ker}\, Q$

proof.

(1) 最初の包含関係について. "$\supseteq$" は明らか. "$\subseteq$" も $[(f,\ s)] = [(1,\ s)][(f,\ 1)]$ から明らか. 最後の包含関係について. (FR2), Q は functor, $s \in S$ ならば, $Q(s)$ は iso. から明らか.

(2) (i)⇒(ii). (1) より, $Q(f)^{-1} = Q(s)^{-1}Q(g')$, $Y \xrightarrow{g'} Z' \overset{s}{\Leftarrow} X$ とすると, $Q(s) = Q(g')Q(f)$ より, $[(s,\ 1_{Z'})] = [(g'f,\ 1_{Z'})]$. よって, commutative diagram

$$\begin{tikzcd} & Z' \arrow[d, Rightarrow, "t"'] \arrow[dr, equal] & \\ X \arrow[ur, "g'f"] \arrow[dr, Rightarrow, "s"'] & Z & Z' \arrow[l, Rightarrow, "t"] \\ & Z' \arrow[u, Rightarrow, "t"] \arrow[ur, equal] & \end{tikzcd}$$

を得る.

したがって, $g := tg'$ とすれば, $gf \in S$. 双対的に, $Q(f)^{-1} = Q(h)Q(t)^{-1}$, $Y \overset{t}{\Leftarrow} W \xrightarrow{h} X$ として同様 ((FR3) を使う) . (ii)⇒(i). $Q(gf) = Q(g)Q(f)$ は iso. より, left inverse をもつから $Q(f)$ も left inverse をもつ. 同様に, $Q(fh) = Q(f)Q(h)$ は right inverse をもつ

から, $Q(f)$ は right inverse をもつ.

(3) (i) (2) と (FR0). (ii) $Q(f) = Q(s)^{-1}Q(sf)$ は iso. で, (i). (iii) (ii) と同様.

(4) (i)⇒(ii). 同値関係の定義から明らか. (ii)⇒(i). $s \in S$ ならば, $Q(s)$ は iso. (i)⇔(iii). 同様. (i)⇒(iv). $Q(f) = 0$ とすると, (i)⇔(iii) より, $W \overset{t}{\Rightarrow} X \overset{f}{\to} Y$ を得る. triangle : $W \overset{t}{\Rightarrow} X \to C(t) \to W[1]$ に $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-, Y)$ を apply して,

$$\begin{array}{llcccc} \text{exact :} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(C(t), Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(W, Y) \\ & \Cup & & \Cup & & \Cup \\ & {}^{\exists}g & \longmapsto & f & \longmapsto & ft = 0 \end{array}$$

よって, f は $C(t) \in \mathcal{U}$ を通過する.

(5) "$\subseteq$" $X \in \mathcal{U}$ とする. $0 : 0 \to X \in S$ より, $Q(0)$ は iso. である. よって, $\mathcal{K}/\mathcal{U}$ の中で, $0 \simeq X$. "$\supseteq$" $Q(X) = 0$ とする. $1_X \in S$. $Q(1_X) = 0$ より, (4)(i)⇒(iv) で, 1_X は $\mathcal{U}$ を通過する. よって, épaisse subcategory の定義より, $X \in \mathcal{U}$.

(4) (iv)⇒(i). (5) より. ■

Prop 2.0.25 functor $F : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ とする. 任意の $s \in S$ に対して, $F(s)$ が iso. ならば, 以下の commutative diagram をもつ functor $\overline{F} : \mathcal{K}/\mathcal{U} \to \mathcal{H}$ が一意的に存在する.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{K}/\mathcal{U} \arrow[dr, "\overline{F}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ \mathcal{K} \arrow[ur, "Q"] \arrow[rr, "F"'] & & \mathcal{H} \end{tikzcd}$$

proof. (存在) $\overline{F} : \mathcal{K}/\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ を次のように定義する.

$$\begin{cases} X \in \mathcal{K}/\mathcal{U} \text{ に対して,} & \overline{F}(X) = F(X) \\ [(f, s)] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}/\mathcal{U}}(X, Y) \text{ に対して,} & \overline{F}([(f, s)]) = F(s)^{-1}F(f) \end{cases}$$

$\overline{F}$ が well-difinded であること, additive functor であること, 図式が可換になることは明らかである. (一意性) F' を主張を満たすもう一つの functor とする. $X \in \mathcal{K}/\mathcal{U}$ に対して, $F'(X) = F'(Q(X)) = F(X) = \overline{F}(X)$. $[(f, s)] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}/\mathcal{U}}(X, Y)$ に対して, $F'([(f, s)]) = F'([(1_W, s)][(f, 1_W)]) = F'([(1_W, s)])F'([(f, 1_W)]) = F'(Q(s)^{-1})F'(Q(f)) = F'Q(s)^{-1}F'Q(f) = F(s)^{-1}F(f) = \overline{F}([(f, s)])$. したがって, $F' = \overline{F}$ を得る. ■

Prop 2.0.26 $\mathcal{H}$ を $\mathcal{K}$ の full subcategory, $\mathcal{V} := \mathcal{U} \cap \mathcal{H}$ が $\mathcal{H}$ の épaisse subcategory であると仮定する．このとき, 条件 $(*)$ もしくは $(**)$ を満たせば, $\mathcal{H}/\mathcal{V}$ は $\mathcal{K}/\mathcal{U}$ の full subcategory である．

$$
\begin{aligned}
(*)\quad & Y \in \mathcal{H},\ Y \overset{s}{\Rightarrow} W \text{ ならば, } Z \in \mathcal{H},\ f : W \to Z \text{ が存在して, } fs \in S \\
(**)\quad & X \in \mathcal{H},\ W \overset{t}{\Rightarrow} X \text{ ならば, } Z \in \mathcal{H},\ g : Z \to X \text{ が存在して, } tg \in S
\end{aligned}
$$

proof. $S' := \{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(X, Y) \mid C(f) \in \mathcal{V}\}$, canonical functor $Q' : \mathcal{H} \to \mathcal{H}/\mathcal{V}$ とおく．$\mathcal{H}$ が $\mathcal{K}$ の full subcategory より, fully faithful functor $F : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ が存在する．$s' \in S'$ に対して, $F(s') \in S$ より, $QF(s')$ は iso. である．よって, Prop 2.0.25 より, 次を満たす functor $\overline{F} : \mathcal{H}/\mathcal{V} \to \mathcal{K}/\mathcal{U}$ が存在する．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{H} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q'"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{K} \arrow[d, "Q"] \\
\mathcal{H}/\mathcal{V} \arrow[r, "\overline{F}"'] & \mathcal{K}/\mathcal{U}
\end{tikzcd}
$$

ここで, $[(f, s)] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}/\mathcal{V}}(X, Y)$ に対して, $\overline{F}$ の取り方から, $\overline{F}([(f, s)]) = QF(s)^{-1}QF(f) = [(1, s)][(f, 1)] = [(f, s)]$ であることに注意する．そこで, $\overline{F}$ が fully faithful であることを示す．$\overline{F} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}/\mathcal{V}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}/\mathcal{U}}(X, Y)$, $X, Y \in \mathcal{H}$. ($\overline{F}$ が faithful であること) 明らか. ($\overline{F}$ が full であること) まずは, 条件 $(*)$ を満たすときを示す．$[(f, s)] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}/\mathcal{U}}(X, Y)$,

つまり, $X \xrightarrow{f} W \overset{s}{\Leftarrow} Y$, $W \in \mathcal{K}$ に対して, 条件 $(*)$ より,
$$
\begin{tikzcd}
 & Z & \\
 & W \arrow[u, "g"'] & \\
X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, Rightarrow, "s"']
\end{tikzcd}
$$
, $Z \in \mathcal{H}$, $gs \in S$ ととれる．このとき, $[(gf, gs)] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}/\mathcal{V}}(X, Y)$ である．よって, $\overline{F}([(gf, gs)]) = [(gf, gs)] = [(f, s)]$. 次に, 条件 $(**)$ を満たすときを示す．$Q(f)Q(t)^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}/\mathcal{H}}(X, Y)$, つまり, $X \overset{t}{\Leftarrow} W \xrightarrow{f} Y$, $W \in \mathcal{K}$ に対して, 条件 $(**)$ より,
$$
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[d, "g"] & \\
 & W \arrow[dl, Rightarrow, "t"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}
$$
, $Z \in \mathcal{H}$, $tg \in S$ ととれる．このとき, $Q'(fg)Q'(tg)^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}/\mathcal{V}}(X, Y)$ である．よって, $\overline{F}(Q'(fg)Q'(tg)^{-1}) = Q(fg)Q(tg)^{-1} = Q(f)Q(t)^{-1}$. ■

このことから, auto-functor $[1] : \mathcal{K}/\mathcal{U} \to \mathcal{K}/\mathcal{U}$ を得る．さらに, 次のように $\mathcal{K}/\mathcal{U}$ に triangle の構造を入れる．

Def 2.0.27 $X' \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} Z' \xrightarrow{h} X'[1]$ in $\mathcal{K}/\mathcal{U}$ が triangle であるとは, $\mathcal{K}$ での triangle : $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ が存在して, 次の commutative diagram in $\mathcal{K}/\mathcal{U}$ をもつときにいう.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "Q(u)"] \arrow[d, "\simeq"'] & Y \arrow[r, "Q(v)"] \arrow[d, "\simeq"] & Z \arrow[r, "Q(w)"] \arrow[d, "\simeq"] & X[1] \arrow[d, "\simeq"] \\
X' \arrow[r, "f"'] & Y' \arrow[r, "g"'] & Z' \arrow[r, "h"'] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

すなわち, $\mathcal{K}/\mathcal{U}$ での triangle はすべて $\mathcal{K}$ の triangle を Q で送ったものである.

$\mathcal{K}/\mathcal{U}$ が triangulated cat. であることを確認するために, 2 つの Lemma を用意しておく.

Lemma 2.0.28 $\mathcal{K}$ での triangle : $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to X[1]$, $X' \xrightarrow{f'} Y' \to Z' \to X'[1]$ と morphism $u : X \to X'$, $v : Y \to Y'$, $Q(v)Q(f) = Q(f')Q(u)$ に対して, $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}/\mathcal{U}}(Z, Z')$ が存在して, 次の commutative diagram in $\mathcal{K}/\mathcal{U}$ をもつ.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "Q(f)"] \arrow[d, "Q(u)"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "Q(v)"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & X[1] \arrow[d] \\
X' \arrow[r, "Q(f')"'] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

Remark 2.0.29 Q は full functor でないため, $\mathcal{K}/\mathcal{U}$ に対しての (TR3) を主張しているわけではない.

proof. 仮定より $Q(f'u - vf) = 0$ となるから, $f'u - vf$ は $\mathcal{U}$ を通過する. そこで,

$$\begin{tikzcd}
& W \arrow[dr, "h"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
X \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f'u-vf"'] & {} & Y'
\end{tikzcd}$$

とする. このとき, $Z'' := C({}^t[f\ g])$ とおくと, (TR3) より, 次の commutative diagram in $\mathcal{K}$ をもつ.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "{}^t[f\ g]"'] \arrow[d, "u"'] & Y \oplus W \arrow[r] \arrow[u, Rightarrow, "{[1\ 0]}"'] \arrow[d, "{[v\ h]}"] & Z'' \arrow[r] \arrow[u, Rightarrow, "t"'] \arrow[d, "w"] & X[1] \arrow[d, "{f[1]}"] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

Prop 2.0.12, $W \in \mathcal{U}$ より, $[1\ 0] \in S$ だから, (FR5) より, $t \in S$ である. $Q([1\ 0]) = 1_{Q(Y)}$, $Q([v\ h]) = Q(v)$ であることに注意して, $\phi := Q(w)Q(t)^{-1}$ とすればよい. ■

Lemma 2.0.30 commutative diagram in $\mathcal{K}/\mathcal{U}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "Q(u)"] \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ X' \arrow[r, "Q(u')"'] & Y' \end{tikzcd}$$

に対して, $\phi := Q(s)^{-1}Q(f)$, $s : X' \Rightarrow X''$ とする. このとき, $u'' : X'' \to Y''$, $t : Y' \Rightarrow Y''$, $g : Y \to Y''$ が存在して次を満たす.

(1)
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, Rightarrow, "s"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y' \arrow[d, Rightarrow, "t"] \\ X'' \arrow[r, "u''"'] & Y'' \end{tikzcd}$$
in $\mathcal{K}$

(2) $\psi = Q(t)^{-1}Q(g)$

(3)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "Q(u)"] \arrow[d, "Q(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d, "Q(g)"] \\ X'' \arrow[r, "Q(u'')"'] & Y'' \end{tikzcd}$$
in $\mathcal{K}/\mathcal{U}$

proof. $\psi := Q(t')^{-1}Q(g')$ とおく. 仮定より, 次の diagram in $\mathcal{K}$ がある.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "u"] \arrow[dl, "f"'] & Y \arrow[dr, "g'"] & \\ X'' & & & Z \\ & X' \arrow[ul, Rightarrow, "s"] \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[ur, Rightarrow, "t'"'] & \end{tikzcd}$$

(FR2) により, 次の commutative diagram を付け足す.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "u"] \arrow[dl, "f"'] & Y \arrow[dr, "g'"] & \\ X'' \arrow[ddr, bend right, "v"'] & & & Z \arrow[dd, Rightarrow, "t''"] \\ & X' \arrow[ul, Rightarrow, "s"'] \arrow[r, "u'"] \arrow[d, phantom, "\text{(FR2)}"] & Y' \arrow[ur, Rightarrow, "t'"] \arrow[dl, Rightarrow, "s'"] \arrow[dr, phantom, "\text{(FR2)}"] & \\ & Z' \arrow[rr, Rightarrow, bend right=10, "s''"'] & & Y'' \end{tikzcd}$$

そこで, $t := t''t' \in S$, $u'' := s''v$, $g := t''g'$ とおく.

(1)

$$tu' = t''t'u' = s''s'u' = s''vs = u''s$$

(2)

$$\begin{aligned} Q(t)^{-1}Q(g) &= Q(t''t')^{-1}Q(t''g') \\ &= Q(t')^{-1}Q(t'')^{-1}Q(t'')Q(g') \\ &= Q(t')^{-1}Q(g') \\ &= \psi \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} Q(g)Q(u) &= Q(t'')Q(g')Q(u) \\ &= Q(s'')Q(s')Q(t')^{-1}Q(g')Q(u) \\ &= Q(s'')Q(s')Q(u')Q(s)^{-1}Q(f) \\ &= Q(s'')Q(v)Q(f) \\ &= Q(u'')Q(f) \end{aligned}$$

■

Prop 2.0.31 $\mathcal{K}/\mathcal{U}$ は triangulated category である.

proof. (TR1)〜(TR4) を示せばよい.

(TR1) $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}/\mathcal{U}}(X, Y)$ とし, $\lambda = Q(s)^{-1}Q(f)$ とおく. $f : X \to W$ in $\mathcal{K}$ に対して, triangle : $X \xrightarrow{f} W \to Z \to X[1]$ を作ると, 次の commutative diagram in $\mathcal{K}/\mathcal{U}$ を得る.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, "Q(s)"', "\simeq"] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & X[1] \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "Q(f)"'] & W \arrow[r] & Z \arrow[r] & X[1] \end{tikzcd}$$

よって, $\mathcal{K}/\mathcal{U}$ での triangle : $X \xrightarrow{\lambda} Y \to Z \to X[1]$ を得る. あとは, $Q(1_X) = 1_{Q(X)}$ より明らか.

(TR2) 明らか.

(TR3) triangle とその間の morphism in $\mathcal{K}/\mathcal{U}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "Q(u)"] \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & Z \arrow[r] & X[1] \arrow[d, "\phi[1]"] \\ X' \arrow[r, "Q(u')"'] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & X'[1] \end{tikzcd}$$

に対して, Lemma 2.0.30 より, 次のような morphism が存在する.

$u'' : X'' \to Y''$, $t : Y' \Rightarrow Y''$, $g : Y \to Y''$

(i) $$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, Rightarrow, "s"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y' \arrow[d, Rightarrow, "t"] \\ X'' \arrow[r, "u''"'] & Y'' \end{tikzcd}$$ in $\mathcal{K}$

(ii) $\psi = Q(t)^{-1}Q(g)$

(iii) $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "Q(u)"] \arrow[d, "Q(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d, "Q(g)"] \\ X'' \arrow[r, "Q(u'')"'] & Y'' \end{tikzcd}$$ in $\mathcal{K}/\mathcal{U}$

ここで, $\phi := Q(s)^{-1}Q(f)$, $s : X' \Rightarrow X''$ である.

triangle in $\mathcal{K}$: $X'' \overset{u''}{\to} Y'' \to Z'' \to X''[1]$ とすると, (iii) と Prop 2.0.28 より, 次の commutative diagram in $\mathcal{K}/\mathcal{U}$ を得る.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "Q(u)"] \arrow[d, "Q(f)"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "Q(g)"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & X[1] \arrow[d, "Q(f)[1]"] \\ X'' \arrow[r, "Q(u'')"'] & Y'' \arrow[r] & Z'' \arrow[r] & X''[1] \end{tikzcd}$$

さらに, (i) と (FR5) より, 次の commutative diagram in $\mathcal{K}$ を得る.

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, "u''"] & Y'' \arrow[r] & Z'' \arrow[r] & X''[1] \\ X' \arrow[r, "u'"'] \arrow[u, Rightarrow, "s"] & Y' \arrow[r] \arrow[u, Rightarrow, "t"'] & Z' \arrow[r] \arrow[u, Rightarrow, "r"'] & X'[1] \arrow[u, Rightarrow, "s[1]"'] \end{tikzcd}$$

したがって, $\mathcal{K}/\mathcal{U}$ での commutative diagram を得る.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "Q(u)"] \arrow[d, "Q(f)"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "Q(g)"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & X[1] \arrow[d, "Q(f)[1]"] \\
X'' \arrow[r, "Q(u'')"'] \arrow[d, "Q(s)^{-1}"'] & Y'' \arrow[r] \arrow[d, "Q(t)^{-1}"] & Z'' \arrow[r] \arrow[d, "Q(r)^{-1}"] & X''[1] \arrow[d, "Q(s)^{-1}[1]"] \\
X' \arrow[r, "Q(u')"'] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

$\phi = Q(s)^{-1}Q(f)$, (ii) より, $\psi = Q(t)^{-1}Q(g)$ となるから, 主張を得る.

(TR4) $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}/\mathcal{U}}(X, Y)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}/\mathcal{U}}(Y, Z)$ とする. (TR1)〜(TR3) より次の commutative diagram in $\mathcal{K}/\mathcal{U}$ を得る.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & C(\phi) \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "\psi\phi"'] \arrow[d, "\phi"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & C(\psi\phi) \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d] \\
Y \arrow[r, "\psi"'] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & C(\psi) \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y[1] \arrow[d] \\
C(\phi) \arrow[r] & C(\psi\phi) \arrow[r] & C(\psi) \arrow[r] & C(\phi)[1]
\end{tikzcd}$$

最下行 : $C(\phi) \to C(\psi\phi) \to C(\psi) \to C(\phi)[1]$ が triangle であることを示せばよい. $\phi := Q(s)^{-1}Q(f)$, $\psi := Q(t)^{-1}Q(g)$ とすると, $\psi\phi = Q(s't)^{-1}Q(g'f)$ とかける.

$$\begin{tikzcd}
 & & W'' & & \\
 & W \arrow[ur, "g'"] & (\mathrm{FR2}) & W' \arrow[ul, Rightarrow, "s'"'] & \\
X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, Rightarrow, "s"] \arrow[ur, "g"'] & & Z \arrow[ul, Rightarrow, "t"']
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{K}/\mathcal{U}$ に対しての (TR1) の証明より, $C(\phi) \simeq C(f)$, $C(\psi) \simeq C(g)$, $C(\psi\phi) \simeq C(g'f)$, (FR5) より, $C(g) \simeq C(g')$ in $\mathcal{K}/\mathcal{U}$ となることに注意する. そこで, $f : X \to W$,

$g' : W \to W''$ に対して, $\mathcal{K}$ での (TR4) によって, commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & W \arrow[r] \arrow[d, "g'"] & C(f) \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "g'f"'] \arrow[d, "f"'] & W'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & C(g'f) \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d] \\
W \arrow[r, "g'"'] \arrow[d] & W'' \arrow[r] \arrow[d] & C(g') \arrow[r] \arrow[d, equal] & W[1] \arrow[d] \\
C(f) \arrow[r] & C(g'f) \arrow[r] & C(g') \arrow[r] & C(f)[1]
\end{tikzcd}$$

を得ることができ, 最下行 : $C(f) \to C(g'f) \to C(g') \to C(f)[1]$ は triangle である. この triangle は $\mathcal{K}/\mathcal{U}$ で $C(\phi) \to C(\psi\phi) \to C(\psi) \to C(\phi)[1]$ と同型であるから, 主張を得る. ■

また明らかに, canonical functor Q が exact functor であることがわかる. さらに, cohomological functor $\mathcal{K}/\mathcal{U} \to \mathcal{A}$ を作る.

Prop 2.0.32 cohomological functor $H : \mathcal{K} \to \mathcal{A}$ とする. このとき, 任意の $X \in \mathcal{U}$ に対して, $H(X) = 0$ ならば, 次の commutative diagram をもつ cohomological functor $\overline{H} : \mathcal{K}/\mathcal{U} \to \mathcal{A}$ が一意的に存在する.

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{K}/\mathcal{U} \arrow[dr, "\overline{H}"] & \\
\mathcal{K} \arrow[ur, "Q"] \arrow[rr, "H"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4, "\circlearrowleft"] & & \mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

proof. 次を示す.

(1) $s \in S \Rightarrow H(s)$: iso. (このことから主張を満たす functor $\overline{H}$ が存在する [Prop 2.0.25])
(2) $\overline{H}$: cohomological functor

(1) について. $s : X \Rightarrow Y$, triangle : $X \overset{s}{\Rightarrow} Y \to C(s) \to X[1]$ とする. このとき,

$$\text{exact} : \quad H(C(s)[-1]) \longrightarrow H(X) \xrightarrow{H(s)} H(Y) \longrightarrow H(C(s))$$

を得る. $s \in S$ より $C(s) \in \mathcal{U}$ だから, $H(C(s)[-1]) = H(C(s)) = 0$ となる. したがって, $H(s)$ は iso. である. (2) について. $\mathcal{K}/\mathcal{U}$ での triangle はすべて $\mathcal{K}$ の triangle を Q で送ったものだから, 上の commutative daigram より明らか. ■

一般に, Q は full functor ではないが, $\mathcal{K}$ の特別な object に対しては morphism の集合が同型になる.

Def 2.0.33 $Y \in \mathcal{K}$ が $\mathcal{U}$-local とは, 任意の $X \in \mathcal{U}$ に対して, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y) = 0$ となるときにいう.

Prop 2.0.34 $Y \in \mathcal{K}$: $\mathcal{U}$-local に対して, 次が成り立つ.

(1) $t : X \Rightarrow X'$ に対して, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(t, Y)$ は iso. である. 特に, Y' : $\mathcal{U}$-local ならば, $Y \Rightarrow Y'$ は iso. である.

(2) canonical functor Q は $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}/\mathcal{U}}(-, Y)$ を導く.

proof. (1) triangle : $X \overset{t}{\Rightarrow} X' \to C(t) \to X[1]$ に対して, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-, Y)$ を apply して, exact : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(C(t), Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X', Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(C(t)[-1], Y)$ を得る. $C(t) \in \mathcal{U}$ より, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(C(t)[-1], Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(C(t), Y) = 0$ となるから, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(t, Y)$ は iso. になる. このことから, 後半は明らか. (2) Q : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}/\mathcal{U}}(X, Y)$ が全単射になることを示す. (単射であること) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y)$, $Q(f) = 0$ とすると, f は $\mathcal{U}$ を通過する. そこで,
$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dr, "v"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\ X \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, "f"'] & {} & Y \end{tikzcd}$$
, $W \in \mathcal{U}$ とすると, 仮定より, $v = 0$. (全射であること) $\phi = Q(g)Q(t)^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}/\mathcal{U}}(X, Y)$ とする ($X \overset{t}{\Leftarrow} W \overset{g}{\to} Y$). (1) より, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(t, Y)$ は iso. だから, $ft = g$ となる $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y)$ が存在する. よって, $Q(f) = Q(g)Q(t)^{-1} = \phi$ となる. [別証] $\phi := Q(s)^{-1}Q(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}/\mathcal{U}}(X, Y)$ とする ($X \overset{f}{\to} W \overset{s}{\Leftarrow} Y$). triangle : $Y \overset{s}{\Rightarrow} W \to C(s) \overset{v}{\to} Y[1]$ とすると, 仮定より $v = 0$. Prop 2.0.9 より, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(s, Y)$ は全射だから, $gs = 1_Y$ となる $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(W, Y)$ が存在する. このとき, $Q(gf) = [(gf,\ 1_Y)] = [(f,\ s)] = \phi$ となる. ■

これらについて, dual も成り立つ.

Def 2.0.35 $X \in \mathcal{K}$ が $\mathcal{U}$-colocal とは, 任意の $Y \in \mathcal{U}$ に対して, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y) = 0$ となるときにいう.

Prop 2.0.36 $X \in \mathcal{K}$: $\mathcal{U}$-colocal に対して, 次が成り立つ.

(1) $s : Y \Rightarrow Y'$ に対して, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, s)$ は iso. である. 特に, $X' : \mathcal{U}$-colocal ならば, $X' \Rightarrow X$ は iso. である.

(2) canonical functor Q は $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, -) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}/\mathcal{U}}(X, -)$ を導く.

前節で出てきた equivalence と category の対応は次のようになっている.

$$\begin{tikzcd}
\text{Equivalent} \arrow[r, dotted, no head] & \text{Morita eq.} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, dashed, <->] & \text{Derived eq.} \arrow[r, Rightarrow, "\text{self-inj.}"] \arrow[d, dashed, <->] & \text{Stable eq.} \arrow[d, dashed, <->] \\
\text{Category} \arrow[r, dotted, no head] & \text{mod-}A \arrow[r] & D^b(\text{mod-}A) \arrow[r] & \underline{\text{mod}}\text{-}A
\end{tikzcd}$$

この section では, これらの equivalence と category について解説していく.

2.1 Module category

Module category mod-A の obj. は, 有限生成 (右) A-module, mor. は, A-homo. で作られる. これは明らかに abelian cat. になっている. また, mod. cat. が equivalent (as abelian cat.) [mod-$A \simeq$ mod-B, $A \overset{\text{Morita}}{\sim} B$] なとき, A と B は <u>Morita equivalent</u> であるという. module を考えることは表現を考えることと同値なため, Morita eq. ならば, 表現が同じということになる. Morita eq. については『森田の定理』と『quiver』がとても重要である. 以下, それぞれについて解説していく.

2.1.1 森田の定理

<u>Def</u> 2.1.1 T_A : progenerator $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ add-T_A = proj-A. ここで, add-T_A は T_A の直和・直和因子からなる mod-A の full subcat., proj-A = add-A_A である[*17].

<u>Thm</u> 2.1.2 次は同値である.

(1) $A \overset{\text{Morita}}{\sim} B$

(2) proj-$A \simeq$ proj-B (as additive cat.)

(3) T_A : progenerator が存在し, $B \simeq \mathrm{End}_A(T)$ が成り立つ.

<u>proof.</u> (1) $\Rightarrow$ (2). F : mod-$A \to$ mod-B を eq. を引き起こす exact functor とする. $P \in$ proj-A に対して, $F(P) \in$ proj-B であることを示せばよい. F は eq. より, 任意の B-

[*17] add-T_A, proj-A は, kernel が存在しないため, abelian cat. にならない.

mod., B-homo. は mod-A から F により送られたものとしてよいことに注意する．したがって, mod-B での図式：

$$\begin{tikzcd} F(P) \arrow[dr, "F(g)"] & \\ F(X) \arrow[r, two heads, "F(f)"'] & F(Y) \end{tikzcd}$$

に対して, これを mod-A で考えると, F は exact functor, P は proj. より,

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, dotted, "\exists h"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[r, two heads, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \end{tikzcd}$$

を得る．よって, mod-B での可換図式：

$$\begin{tikzcd} F(P) \arrow[d, dotted, "F(h)"'] \arrow[dr, "F(g)"] & \\ F(X) \arrow[r, two heads, "F(f)"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & F(Y) \end{tikzcd}$$

が成り立つので, $F(P)$ が proj. であることがわかる．

(2) $\Rightarrow$ (3). F : proj-A $\to$ proj-B, G : proj-B $\to$ proj-A を eq. を引き起こす functor とする．このとき, $T_A := G(B)$ とおく．T_A が proj. であることは明らか (add-$T_A \subseteq$ proj-A)．また, $F(A)$ は proj. より, $F(A) \mid \oplus B$*18. さらに, functor は直和を保存するから, $A \simeq GF(A) \mid \oplus G(B) = \oplus T$ より, T_A が proj-A を generate していることがわかる (add-T_A = proj-A)．また, $B \simeq \mathrm{End}_B(B) \simeq \mathrm{End}_A(G(B)) = \mathrm{End}_A(T)$.

(3) $\Rightarrow$ (1). T_A : progenerator, $B \simeq \mathrm{End}_A(T)$ とおく．このとき, ${}_BT_A$ と考えることができる．そこで, $F := \mathrm{Hom}_A({}_BT_A, -)$: mod-A $\to$ mod-B, $G := - \otimes_B T_A$: mod-B $\to$ mod-A とおく．

(i) $X_A \xrightarrow{f} Y_A$ に対して,

$$\begin{array}{ccc} t_x : \mathrm{Hom}_A(T, X) \otimes_B T & \xrightarrow{\simeq} & X \\ \Psi & & \Psi \\ f \otimes t & \longmapsto & f(t) \end{array} \quad , \quad \begin{tikzcd} GF(X) \arrow[r, "GF(f)"] \arrow[d, "t_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & GF(Y) \arrow[d, "t_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

であること．

proof. $X = T$ のときは明らか．よって, T_A は proj-A の generator より, $X \in$ proj-A ならば, t_X は iso. 任意の X_A と exact*19 : $0 \to \Omega(X) \to P(X) \to X \to 0$ に対して, T_A は proj. より, exact : $0 \to \mathrm{Hom}_A(T, \Omega(X)) \to \mathrm{Hom}_A(T, P(X)) \to \mathrm{Hom}_A(T, X) \to 0$

*18 $X \mid Y \overset{def}{\Leftrightarrow} X$ は Y の直和因子.

*19 X_A に対して, $P(X)$ は X の proj. cover, $I(X)$ は X の inj. hull とする．また, $\Omega(X)$, $\Omega^{-1}(X)$ はそれぞれの kernel, cokernel.

($\mathrm{Hom}_A({}_BT_A, -)$ を apply) . したがって, 以下の図式を得る ($-\otimes_B T_A$ を apply) .

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^B(\mathrm{Hom}_A(T,X),T) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(T,\Omega(X))\otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "t_{\Omega(X)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_A(T,P(X))\otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "t_{P(X)}"', "\simeq"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_A(T,X)\otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "t_X"] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & \Omega(X) \arrow[r] & P(X) \arrow[r] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Snake Lemma より, t_X は epi. これは任意の X_A に対して成り立つから, $t_{\Omega(X)}$ も epi. したがって, Snake Lemma より, t_X は iso. また, 可換であることは明らか.

(ii) $M_B \xrightarrow{g} N_B$ に対して,

$$\begin{array}{ccc} s_M : M & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Hom}_A(T, M\otimes_B T) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ m & \longmapsto & [t\mapsto m\otimes t] \end{array} , \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \arrow[d, "s_N"] \\ FG(M) \arrow[r, "FG(g)"'] & FG(N) \end{tikzcd}$$

であること.

proof. ${}_BT \simeq \mathrm{Hom}_A(A_A, {}_BT_A) \mid \oplus\, \mathrm{Hom}_A(T_A, {}_BT_A) \simeq {}_BB$ より, ${}_BT$ は proj. であることに注意して, 前と同様.

よって, F, G は eq. を引き起こすことがわかる. 特に, $T_A, {}_BT$ は proj. より, exact functor であることも明らか. ■

このように森田の定理により, Morita eq. についてはよくわかっている. 特に, A 上の progenerator は $T_A \simeq \bigoplus_{S_A} n_S P(S)$ (n_S は自然数, S_A は simple A-mod. 全体を動く) という形しかないため, A と Morita eq. な alg. はすべてわかることになる. また, $T_A = \bigoplus_{S_A} P(S)$ (S_A は simple A-mod. 全体を動く) ととったときの $B := \mathrm{End}_A(T)$ は, A と Morita eq. な alg. のうち, 次元が最小で, すべての simple mod. の次元は 1 になる. つまり, B は A と Morita eq. な alg. の中の最小なものといえる. このような B を A の basic algebra とよぶ. この section の最初に述べたように, Morita eq. は表現が同じになるので, 表現を考えるときは basic な alg. を考えればよいことになる.

Remark 2.1.3 Morita eq. は表現としての情報はすべて残すが, 環としての情報は落とすことになる. また, 簡単な例としては, $k \overset{Morita}{\sim} \mathrm{Mat}_n(k)$ があげられる (k は $\mathrm{Mat}_n(k)$ の basic alg.) . k は commutative alg. だが, $\mathrm{Mat}_n(k)$ は non-comm.

2.1.2 Quiver と path algebra

quiver とは, 有限個の頂点と有限個の矢印をもつ有向グラフである. $\overset{1}{\bullet} \xrightarrow{a} \overset{2}{\bullet} \xrightarrow{b} \overset{3}{\bullet}$ に対して, 1 から 3 に行く道 (path) を ab とかく. 特に, 点から動かないことも (長さ 0 の) 道とし, e とかくことにする (例えば, 1 から 1 への長さ 0 の道 e_1) .

quiver Q の path algebra とは, Q の path 全体を k-basis とする algebra である. 積は, path がつながる場合はその path とし, それ以外の場合は 0 とする. (積に関する) 単位元は $\sum\limits_{n:\text{点}} e_n$ である.

Example 2.1.4 (1) $Q:$ $\overset{1}{\bullet} \circlearrowright a$, $kQ := \left\langle e_1, a, a^2, a^3, \cdots \right\rangle_k \simeq k[a]$

(2) $Q:$ $\overset{1}{\bullet} \xrightarrow{\quad a \quad} \overset{2}{\bullet} \xrightarrow{\quad b \quad} \overset{3}{\bullet}$, $kQ := \langle e_1, e_2, e_3, a, b, ab \rangle_k \simeq \begin{bmatrix} k & k & k \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$

(3) $Q:$ $a \circlearrowright \overset{1}{\bullet} \xleftarrow{\quad b \quad} \overset{2}{\bullet} \circlearrowright c$

任意の alg. は quiver (with relation) を使って次のように書ける.

Thm 2.1.5 A に対して, quiver Q と kQ のイデアル I が存在して, $A \overset{\text{Morita}}{\sim} kQ/I$ となる.

proof. A は basic であるとしてよい. quiver Q を次のように定める.

$$Q := \begin{cases} V(Q) := \{\text{simple } A\text{-mod.}\} := \{1, 2, \cdots, n\} \\ A(Q)_{i \to j} := \left\{\text{basis of } \mathrm{Ext}^1_A(i, j)\right\} \end{cases}$$

$P(j)$: proj., j : simple , $\mathrm{top}(\Omega(i))$: semisimple[*20] より, $\mathrm{Hom}_A(P(j), \Omega(i)) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_A(P(j), P(i))$, $\mathrm{Hom}_A(P(j), \Omega(i)) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_A(P(j), \mathrm{top}(\Omega(i))) \simeq \mathrm{Hom}_A(j, \mathrm{top}(\Omega(i))) \simeq \mathrm{Hom}_A(\mathrm{top}(\Omega(i)), j) \simeq \mathrm{Hom}_A(\Omega(i), j) \simeq \mathrm{Ext}^1_A(i, j)$. したがって, $\mathrm{Ext}^1_A(i, j)$ の basis は, $\mathrm{Hom}_A(P(j), P(i))$ の (ある) basis の部分集合になる. そこで, arrow $a_{ij} : i \to j$ に対して, $f_{a_{ij}} : P(j) \to P(i)$ をとり, 固定する. このとき,

$$\begin{array}{cccc} \varphi : kQ & \longrightarrow & \mathrm{End}_A(A) & \simeq \quad A \\ \Uparrow & & \Uparrow & \\ a_{ij} & \longmapsto & f_{a_{ij}} & \end{array}$$

*20 X_A に対して, $\mathrm{top}(X) := X/\mathrm{rad}(X)$: semisimple

とすると, φ は alg. homo. になる. さらに, $f \in \mathrm{Hom}_A(P(j), P(i))$ とする. $f \in R := \mathrm{rad}\, A$ としてよい. このとき, $f \equiv \sum \alpha_i f_{a_{ij}} \mod R^2, \alpha_i \in k$ となる. したがって, $f' := f - \sum \alpha_i a_{ij} \in R^2$ とする. $R^2 = R \cdot R$ より, 同じことを繰り返すと, R は nilpotent ideal より, 有限回で終わる. これは φ が全射であることを示している. よって, $I := \mathrm{Ker}\, \varphi$ とすればよい. ■

$x \in I$ に対して, $x = 0$ を relation という.

Remark 2.1.6 上の証明を見てもわかるように, $\mathrm{Ext}^1_A(i, j)$ の basis の取り方で relation は変わる. しかし, basis を取り替えても Morita eq. であることは変わらない. すなわち, A に対して, quiver の取り方は一意的だが, relation の取り方はいろいろある.

Remark 2.1.7 quiver の arrow は simple module の積み重ねの情報だから, A と A/R^2 の quiver は一致する.

これにより, 表現を考えるときは quiver with relation を考えればよい. そこで, quiver からの表現 (mod.) の表し方を解説する. すべての mod. は (non-zero な) 最小の mod. である simple mod. の積み重ねで作ることができる. その積み重ねを表す列が composition series と Loewy series, socle series である.

(1) composition series of X_A $\cdots\cdots$ X_i/X_{i+1} : simple mod. となる submod. の列 : $0 =: X_r \subsetneq X_{r-1} \subsetneq \cdots \subsetneq X_1 \subsetneq X_0 := X$. この列の取り方は一意的ではないが, 長さは一意的である. その長さ r を composition length という.

(2) Loewy series of X_A $\cdots\cdots$ 列 : $0 = \mathrm{rad}^{\ell}(X) \subsetneq \mathrm{rad}^{\ell-1}(X) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{rad}(X) \subsetneq \mathrm{rad}^0(X) =: X$. この列の長さ ℓ を Loewy length という.

(3) socle series of X_A $\cdots\cdots$ 列 : $0 =: \mathrm{soc}^0(X) \subsetneq \mathrm{soc}(X) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{soc}^{\ell-1}(X) \subsetneq \mathrm{soc}^{\ell}(X) = X$. この列の長さ ℓ を socle length という.

また, (Loewy length) = (socle length) となる.

例えば, simple mod. $\{1, 2, 3, 4\}$ に対して,

(1) composition series

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(2) Loewy series

$$\begin{bmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix}$$

(3) socle series

$$\begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 3 \\ 2 & & 4 \end{bmatrix}$$

これらは, すべて同じ mod. の列である.

以下, simple mod. は自然数 $\{1, \cdots, n\}$, mod. は Loewy series で表すことにする. また, alg. は basic を考えることにする.

定理 2.1.5 (とその証明) から, quiver の arrow : $i \to j$ は $\mathrm{Ext}^1_A(i, j)$ の元 (basis) と対応している. さらに, $\mathrm{Ext}^1_A(i, j)$ の元は non-split exact : $0 \to j \to X \to i \to 0$ と対応しているので, mod. $X := \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$ が存在する. よって, すべての mod. に対して, proj. cover が存在するので, quiver から proj. mod. の構造 (したがって, A_A の構造, simple mod. の積み重ね) がわかることになる. これはすべての mod. の構造がわかることを意味している[*21]. すなわち, mod-A の情報がわかることになる.

Remark 2.1.8 quiver を矢印の方向に読むと A_A の上からの simple mod. の積み重ねがわかり, 矢印を逆の方向から読むと ${}_AA$ の上からの simple mod. の積み重ねがわかる. よって, quiver の矢印を逆から読むと DA_A[*22] の下からの simple mod. の積み重ねがわかる. これは injective mod. の構造がわかることを意味している[*23].

Example 2.1.9 (1) $Q : \begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[loop right, "a"] \end{tikzcd}$ relation : $\left\{ a^3 = 0 \right.$

$$A := kQ/I \simeq k[a]\Big/\left(a^3\right) \simeq kC_3 \text{ (巡回群 } C_3 \text{ の group alg., char}\, k = 3)$$

- $A_A = \begin{matrix} 1 \\ {\scriptstyle a}\downarrow \\ 1 \\ {\scriptstyle a}\downarrow \\ 1 \end{matrix}$
- mod-$A = \left\{ 1, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{直和} \right\}$

(2) $Q : \begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[loop left, "a"] & \overset{2}{\bullet} \arrow[l, "b"'] \arrow[loop right, "c"] \end{tikzcd}$ relation : $\begin{cases} a^2 = 0 \\ ba = 0 \\ cb = 0 \\ c^2 = 0 \end{cases}$

- $A_A = \begin{matrix} 1 \\ {\scriptstyle a}\downarrow \\ 1 \end{matrix} \bigoplus \begin{tikzcd}[column sep=small] & 2 \arrow[dl, "b"'] \arrow[dr, "c"] & \\ 1 & & 2 \end{tikzcd}$, $DA_A := \begin{tikzcd}[column sep=small] 1 \arrow[dr, "a"'] & & 2 \arrow[dl, "b"] \\ & 1 & \end{tikzcd} \bigoplus \begin{matrix} 2 \\ \downarrow{\scriptstyle c} \\ 2 \end{matrix}$

[*21] mod. を計算する場合は, $\mathrm{Ext}^n_A(-,-)$ を計算しなければいけないが, これも quiver から計算できる.
[*22] $D- := \mathrm{Hom}_k(-, k)$
[*23] この場合, socle series になることに注意する.

- mod-$A = \left\{ 1,\ 2,\ \left[\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cccc} 1 & & 2 & \\ & 1 & & 2 \end{array}\right], \cdots\cdots \right\}$

$\boxed{\text{mod.} \left[\begin{array}{cccc} 1 & & 2 & \\ & 1 & & 2 \end{array}\right] \text{の存在}}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}^{*24}"] & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & & 2 \end{array} \arrow[r] & X \arrow[r] & 1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(3) Q : $\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[loop left, "a"] \arrow[r, shift left, "b"] & \overset{2}{\bullet} \arrow[l, shift left, "c"] \end{tikzcd}$

relation : $\begin{cases} a^2 = 0 \\ ab = 0 \\ ca = 0 \\ bcb = 0 \end{cases}$

- $A_A = \begin{tikzcd}[column sep=small] & 1 \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\ 1 & & 2 \arrow[d, "c"] \\ & & 1 \end{tikzcd} \bigoplus \begin{tikzcd} 2 \arrow[d, "c"] \\ 1 \arrow[d, "b"] \\ 2 \arrow[d, "c"] \\ 1 \end{tikzcd}$

(3)′ Q : $\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[loop left, "x"] \arrow[r, shift left, "y"] & \overset{2}{\bullet} \arrow[l, shift left, "z"] \end{tikzcd}$

relation : $\begin{cases} x^2 = 0 \\ xy = 0 \\ yzy = 0 \\ zyz = zx \end{cases}$

- $A_A = \begin{tikzcd}[column sep=small] & 1 \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\ 1 & & 2 \arrow[d, "z"] \\ & & 1 \end{tikzcd} \bigoplus \begin{tikzcd} 2 \arrow[d, "z"] \\ 1 \arrow[d, "y"] \arrow[dd, bend right, "x"'] \\ 2 \arrow[d, "z"] \\ 1 \end{tikzcd}$

---

*24 PO := Push Out, PB := Pull Back

(3) と (3)′ の alg. A は同型である. 対応は,

$$\begin{array}{ccc} A_{(3)} & \longrightarrow & A_{(3)'} \\ \Psi & & \Psi \\ a & \longmapsto & x-yz \\ b & \longmapsto & y \\ c & \longmapsto & z \end{array}$$

2.1.3 Cartan matrix

上のことからもわかるように, 表現を考えるときは A_A の構造 (simple module の積み重ね) が重要になる. そこで, 各 projective indecomposable module $P(i)_A$ の中の simple module j の個数を考えることは表現を考える上で重要なことの一つにあげられる. その情報を持つ行列が Cartan matrix である.

Def 2.1.10 A の Cartan matrix $C(A)$ を次のように定める.

$$C(A)_{ij} := \dim \mathrm{Hom}_A(P(i), P(j))$$

ここで, $P(i)$ は simple module i の projective cover である.

このままでは Cartan matrix $C(A)$ を計算しづらいが, $\dim \mathrm{Hom}_A(P(i), P(j))$ は次のように求めることができる.

Prop 2.1.11 $\dim \mathrm{Hom}_A(P(i), P(j)) =$ (j 番目の projective module の中の simple module i の個数)

proof. path algebra の作り方より. ■

Example 2.1.12 Example 2.1.9 の (2), (3) で計算してみよう.

(2) $C(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (3) $C(A) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

2.2 Derived category

次に, (bounded) derived category $D^b(\text{mod-}A)$ について解説する. derived category は triangulated cat. になる. また, (bounded) derived category が equivalent (as triangulated cat.) $[D^b(\text{mod-}A) \simeq D^b(\text{mod-}B), A \overset{\text{derived}}{\sim} B]$ なとき, A と B は derived equivalent であるという. derived eq. なとき, A と B の表現の型が同じになる. ここで表現の型とは,

- finite type, tame type
- global dimension $< \infty$
- self-injective, symmetric

などのことをいい[*25], derived eq. ならばこれらの情報を保存する.

以下, derived category を定義し, derived eq. について重要なことをまとめていく.

2.2.1 Definition

まずは, $D^b(\text{mod-}A)$ を定義する. 以下, 記号は 2.0.1 に合わせる. $D^b(\text{mod-}A)$ は以下のようにして作ることができる.

- $\text{mod-}A \longrightarrow C^b(\text{mod-}A) \longrightarrow K^b(\text{mod-}A) \longrightarrow D^b(\text{mod-}A)$
- $\text{mod-}A \longrightarrow C^{-,b}(\text{mod-}A) \longrightarrow K^{-,b}(\text{mod-}A) \longrightarrow D^{-,b}(\text{mod-}A) \quad \simeq \quad D^b(\text{mod-}A)$
- $\text{mod-}A \longrightarrow C^{+,b}(\text{mod-}A) \longrightarrow K^{+,b}(\text{mod-}A) \longrightarrow D^{+,b}(\text{mod-}A) \quad \simeq \quad D^b(\text{mod-}A)$

1. Category of cochain complex : $C(\text{mod-}A)$
   - object $X^\bullet$

$$\cdots\cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \longrightarrow \cdots\cdots \qquad d^n d^{n-1} = 0\ ,\ X^i \in \text{mod-}A$$

   - morphism $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet : \arrow[d, "f^\bullet"'] & \cdots\cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}_{X^\bullet}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X^n \arrow[r, "d^n_{X^\bullet}"] \arrow[d, "f^n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots\cdots \\
Y^\bullet : & \cdots\cdots \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}_{Y^\bullet}"'] & Y^n \arrow[r, "d^n_{Y^\bullet}"'] & Y^{n+1} \arrow[r] & \cdots\cdots
\end{tikzcd}$$

この cat. は abelian cat. になる. また, object の取り方より, $\operatorname{Im} d^{n-1} \subseteq \operatorname{Ker} d^n$ が成り立ち, その差を $H^n(X^\bullet) := \operatorname{Ker} d^n / \operatorname{Im} d^{n-1}$ とおく. また, $H^n(f^\bullet) : \operatorname{Ker} d^n_{X^\bullet} / \operatorname{Im} d^{n-1}_{X^\bullet} \to \operatorname{Ker} d^n_{Y^\bullet} / \operatorname{Im} d^{n-1}_{Y^\bullet}$ も定義できる.

[*25] ここでいう『表現の型』とは数学的に正確な言葉ではない. 一般に表現の型 (representation type) といったら, finite type や tame type などのことを指す.

$f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ に対して,

$$C(f^\bullet):\ \cdots\cdots \longrightarrow \overset{(n-1\text{ th})}{X^n \oplus Y^{n-1}} \xrightarrow{d^{n-1}_{C(f^\bullet)}} \overset{(n\text{ th})}{X^{n+1} \oplus Y^{n}} \xrightarrow{d^{n}_{C(f^\bullet)}} \overset{(n+1\text{ th})}{X^{n+2} \oplus Y^{n+1}} \longrightarrow \cdots\cdots$$

とする. ここで, $d^n_{C(f^\bullet)} := \begin{bmatrix} -d^{n+1}_{X^\bullet} & 0 \\ f^{n+1} & d^n_{Y^\bullet} \end{bmatrix}$. 明らかに, $C(f^\bullet) \in C(\text{mod-}A)$ である.

さらに, shift functor $[1] : C(\text{mod-}A) \to C(\text{mod-}A)$ とは, $X^\bullet$ に対して, $(X^\bullet[1])^i := X^{i+1}$ となるような平行移動のことである (各 d は -1 倍して平行移動). 同様に, $[-1] : C(\text{mod-}A) \to C(\text{mod-}A)$ は, $(X^\bullet[-1])^i := X^{i-1}$ となる平行移動とする. 明らかに, functor $[1]$ は auto-functor である. また, 帰納的に $[n]$ も定義できる.

$C^b(\text{mod-}A)$, $C^{-,b}(\text{mod-}A)$, $C^{+,b}(\text{mod-}A)$ はそれぞれ以下のような object をもつ $C(\text{mod-}A)$ の full subcategory である.

(b) $X^i = 0\ (|i| \gg 0)$

$(-,b)$ $X^i = 0\ (i \gg 0)$, $H^n(X^\bullet) = 0\ (|n| \gg 0)$

$(+,b)$ $X^i = 0\ (i \ll 0)$, $H^n(X^\bullet) = 0\ (|n| \gg 0)$

2. homotopy category : $K(\text{mod-}A)$
   - object は $C(\text{mod-}A)$ と同じ.
   - $\mathrm{Hom}_{K(\text{mod-}A)}(X^\bullet, Y^\bullet) := \mathrm{Hom}_{C(\text{mod-}A)}(X^\bullet, Y^\bullet)\big/(\text{homotopic})$

     ここで, $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ が homotopic とは, 各 n に対して, $h^n : X^{n+1} \to Y^n$ が存在して, $f^n = h^n d^n_{X^\bullet} + d^{n-1}_{Y^\bullet} h^{n-1}$ を満たすときにいう.

     したがって, homotopy cat. 内では, homotopic = 0 と見ていることになる.

   この cat. は abelian cat. にならない[*26] が, mapping cone $C(f^\bullet)$, shift functor $[1]$ をもつ triangulated cat. になる. また, 上と同様に, $K^b(\text{mod-}A)$, $K^{-,b}(\text{mod-}A)$, $K^{+,b}(\text{mod-}A)$ を定義する. さらに, $H : K(\text{mod-}A) \to \text{mod-}A$ は cohomological functor である.
3. Derived category : $D(\text{mod-}A)$

   $\mathcal{U} := \left\{X^\bullet \in K(\text{mod-}A) \,\middle|\, H^n(X^\bullet) = 0\ ({}^\forall n)\right\}$[*27] とおき, $\mathcal{U}^b := \mathcal{U} \cap K^b(\text{mod-}A)$, $\mathcal{U}^{-,b} := \mathcal{U} \cap K^{-,b}(\text{mod-}A)$, $\mathcal{U}^{+,b} := \mathcal{U} \cap K^{+,b}(\text{mod-}A)$ とする. 以下, $* \in \{\text{nothing}, b, (-,b), (+,b)\}$ とする. $\mathcal{U}^*$ は, $K^*(\text{mod-}A)$ の épaisse subcat. になり, quotient cat. を考えることができる. そこで, $D^*(\text{mod-}A) := K^*(\text{mod-}A)\big/\mathcal{U}^*$ とおく. こ

*26 homotopy cat. $K(\text{mod-}A)$ での morphism ”0” の意味が module cat. mod-A での意味と異なるため.

*27 $X^\bullet \in \mathcal{U}$ を acyclic complex とよぶ. これは exact sequence のこと.

の cat. 内では, acyclic (exact) = 0 と見ていることになるが, morphism に対しては注意が必要である. それは, $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ in $D^*(\text{mod-}A)$ に対して, $K^*(\text{mod-}A)$ 内では,

$$\begin{tikzcd} & {}^\exists Z^\bullet \arrow[dl, Rightarrow, "{}^\exists u^\bullet"'] \arrow[dr, "{}^\exists v^\bullet"] & \\ X^\bullet & & Y^\bullet \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} & {}^\exists Z^\bullet & \\ X^\bullet \arrow[ur, "{}^\exists v^\bullet"] & & Y^\bullet \arrow[ul, Rightarrow, "{}^\exists u^\bullet"'] \end{tikzcd}$$

で, $C(u^\bullet) \in \mathcal{U}^*$ (よって, $D^*(\text{mod-}A)$ 内で $u^\bullet$ は iso.) , $f^\bullet = v^\bullet/u^\bullet$ となることである.
さらに, Prop 2.0.32 より, cohomological functor $H : D(\text{mod-}A) \to \text{mod-}A$ が定義できる. このとき, $f \in \mathrm{Hom}_{D(\text{mod-}A)}(X, Y)$ に対して, 次は同値である.

(1) f は iso. in $D(\text{mod-}A)$ (2) $H^n(f)$ は iso. for ${}^\forall n \in \mathbb{Z}$ in mod-A

proof. (1) $\Rightarrow$ (2). $C(f) = 0$ より, 明らか. (2) $\Rightarrow$ (1). triangle : $X \xrightarrow{f} Y \to C(f) \to X[1]$ に対して, exact : $H^n(X) \xrightarrow{H^n(f)} H^n(Y) \to H^n(C(f)) \to H^n(X[1]) \xrightarrow{H^n(f[1])} H^n(Y[1])$ を得る. $H^n(f)$ は iso. だから, $H^n(C(f)) = 0$. したがって, $C(f) = 0$ in $D(\text{mod-}A)$ となる. これは, f が iso. in $D(\text{mod-}A)$ であることを意味している. ■

Remark 2.2.1 H は full functor でないため, $H^n(X^\bullet) \simeq H^n(Y^\bullet)$ であっても $X^\bullet \simeq Y^\bullet$ とは限らない. 例えば, quiver : $\overset{1}{\bullet} \circlearrowright x$, $x^2 = 0$ に対して, $0 \to \begin{matrix}1\\1\end{matrix} \xrightarrow{x} \begin{matrix}1\\1\end{matrix} \to 0$ と

$0 \to 1 \xrightarrow{0} 1 \to 0$ の cohomology は同型だが, 2 つの complex は同型ではない. また, H は faithful functor でもない.

4. $D^b(\text{mod-}A) \simeq D^{-,b}(\text{mod-}A) \simeq D^{+,b}(\text{mod-}A)$
   $D^b(\text{mod-}A) \simeq D^{-,b}(\text{mod-}A)$ を示す. そのためには, 次を示せばよい.

   (1) $D^b(\text{mod-}A) \to D^{-,b}(\text{mod-}A)$: fully faithful (2) object 間の全射

   (1) $Y^\bullet \in K^b(\text{mod-}A)$, $W^\bullet \in K^{-,b}(\text{mod-}A)$, $s^\bullet : Y^\bullet \Rightarrow W^\bullet$ とする. また, $m \in \mathbb{Z}$ に対して, $H^i(W^\bullet) = 0$ $(i < m)$, $W^j = 0$ $(j > n)$ とする.

$$Z^\bullet : \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Im}\, d^{m-1}_{W^\bullet} \longrightarrow W^m \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow W^n \longrightarrow 0$$

とおくと,

$$\begin{tikzcd}
W^\bullet : \arrow[d, "f^\bullet"'] & \cdots \arrow[r] & W^{m-1} \arrow[r, "d_{W^\bullet}^{m-1}"] \arrow[d, "d_{W^\bullet}^{m-1}"'] & W^m \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots\cdots \arrow[r] & W^n \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[d, equal] \\
Z^\bullet : & 0 \arrow[r] & \operatorname{Im} d_{W^\bullet}^{m-1} \arrow[r] & W^m \arrow[r] & \cdots\cdots \arrow[r] & W^n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

に対して, $H(f^\bullet)$ は iso. である. したがって, $Q(f^\bullet)$ は iso. となるから, $f^\bullet \in S$ である. ゆえに, $f^\bullet s^\bullet \in S$ を得る. よって, Prop 2.0.26 より, $D^b(\text{mod-}A) \to D^{-,b}(\text{mod-}A)$ は fully faithful である. (2) (1) での $W^\bullet$ に対して, $Z^\bullet$ をとったようにとればよい. ■

(1) と同様に, $D^-(\text{mod-}A) \to D(\text{mod-}A)$, $D^+(\text{mod-}A) \to D(\text{mod-}A)$ は fully faithful であることがわかる (この場合, $X^\bullet \in K^-(\text{mod-}A)$, $W^\bullet \in K(\text{mod-}A)$, $t^\bullet : W^\bullet \Rightarrow X^\bullet$ に対して, $H(t^\bullet)$ は iso. だから, $Z^\bullet : \cdots \to W^n \to \operatorname{Ker} d^{n+1} \to 0$ ととればよい). しかし, object 間の全射が成り立たないため, equivalence にはならない. また, $D^{-,b}(\text{mod-}A) \to D^-(\text{mod-}A)$, $D^{+,b}(\text{mod-}A) \to D^+(\text{mod-}A)$ も fully faithful になる (この場合, $Y^\bullet \in K^{-,b}(\text{mod-}A)$, $W^\bullet \in K^-(\text{mod-}A)$, $s : Y^\bullet \Rightarrow W^\bullet$ に対して, $H(s)$ は iso. より, $W^\bullet \in K^{-,b}(\text{mod-}A)$).

$$\begin{tikzcd}
& D^{-,b}(\text{mod-}A) \arrow[r, "\text{f.f.}"] & D^-(\text{mod-}A) \arrow[dr, "\text{f.f.}"] & \\
D^b(\text{mod-}A) \arrow[ur, phantom, "\simeq"] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & & & D(\text{mod-}A) \\
& D^{+,b}(\text{mod-}A) \arrow[r, "\text{f.f.}"'] & D^+(\text{mod-}A) \arrow[ur, "\text{f.f.}"'] &
\end{tikzcd}$$

2.2.2 Derived category

次に, derived category について詳しくまとめていく. まずは, homotopy cat. と derived cat. の間の関係について考える.

Lemma 2.2.2 $I^\bullet \in K^+(\text{inj-}A)$ は $\mathcal{U}$-local である. ここで, $\text{inj-}A := \text{add-}DA_A$ である.

proof. $X^\bullet \in \mathcal{U}$ に対して, $\operatorname{Hom}_{K(\text{mod-}A)}(X^\bullet, I^\bullet) = 0$ であることを示す. すなわち, $u^\bullet \in \operatorname{Hom}_{K(\text{mod-}A)}(X^\bullet, I^\bullet)$ に対して, $u^\bullet = 0$ in $K(\text{mod-}A)$ であることを示す. これは, $h^{n-1} : X^n \to I^{n-1}$ が存在して, $u^n = d_{I^\bullet}^{n-1} h^{n-1} + h^n d_{X^\bullet}^n$ となることを示せばよい. まず, $I^i = 0$ $(i < 0)$ としてよい. n に関しての帰納法で示す. $n \leq -1$ のとき, $h^n = 0$ とする. このとき,

$(u^n - d_{I^\bullet}^{n-1}h^{n-1})d_{X^\bullet}^{n-1} = 0$ が成り立つ. $n \geq 0$ のとき, n に対して, $h^{n-1} : X^n \to I^{n-1}$ が存在し, $(u^n - d_{I^\bullet}^{n-1}h^{n-1})d_{X^\bullet}^{n-1} = 0$ が成り立つと仮定する. 次を示す.

(1) $h^n : X^{n+1} \to I^n$ が存在する. (2) $u^n = h^n d_{X^\bullet}^n + d_{I^\bullet}^{n-1}h^{n-1}$ (3) $(u^{n+1} - d_{I^\bullet}^n h^n)d_{X^\bullet}^n = 0$

(3) によって, 帰納法を続けることができ, (2) によって, 主張を得る.

Cokernel の定義より, 次を得る.

$$\begin{tikzcd}
 & & X^n/\operatorname{Im} d_{X^\bullet}^{n-1} \arrow[dr, dotted, "\exists"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
X^{n-1} \arrow[r, "d_{X^\bullet}^{n-1}"'] & X^n \arrow[ur] \arrow[rr, "u^n - d_{I^\bullet}^{n-1}h^{n-1}"'] & & I^n
\end{tikzcd}$$

$X^\bullet \in \mathcal{U}$, mod-$A$ は abelian cat. より, $X^n/\operatorname{Im} d_{X^\bullet}^{n-1} = X^n/\operatorname{Ker} d_{X^\bullet}^n \simeq \operatorname{Im} d_{X^\bullet}^n$. よって, I^n は injective より, 次の commutative daigram を得る.

$$\begin{tikzcd}
 & & \operatorname{Im} d_{X^\bullet}^n \arrow[r, hook] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[dr, phantom, bend left, "\circlearrowright"] & X^{n+1} \arrow[d, dotted, "h^n"] \\
X^{n-1} \arrow[r, "d_{X^\bullet}^{n-1}"'] & X^n \arrow[ur, "d_{X^\bullet}^n"] \arrow[rr, "u^n - d_{I^\bullet}^{n-1}h^{n-1}"'] & & I^n
\end{tikzcd}$$

したがって, (1)(2) が成り立つことがわかる. (3) について.

$$\begin{aligned}
(u^{n+1} - d_{I^\bullet}^n h^n)d_{X^\bullet}^n &= d_{I^\bullet}^n u^n - d_{I^\bullet}^n(u^n - d_{I^\bullet}^{n-1}h^{n-1}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

Lemma **2.2.3** 任意の $X^\bullet \in K^+(\text{mod-}A)$ に対して, $I^\bullet \in K^+(\text{inj-}A)$ が存在して, $X^\bullet \simeq I^\bullet$ in $D(\text{mod-}A)$ となる.

proof. $X^n = 0$ $(n < 0)$ としてよい. n に関する帰納法で示す.

- $I^0 := I(X^0)$ とする.
- $n \geq 0$ のとき, 次を仮定する.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X^0 \arrow[r] \arrow[d, "u^0"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X^1 \arrow[r] \arrow[d, "u^1"] & \cdots\cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "u^{n-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X^n \arrow[r] \arrow[d, "u^n"] & \cdots\cdots \\
0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r, "d^0"'] & I^1 \arrow[r] & \cdots\cdots \arrow[r] & I^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"'] & I^n &
\end{tikzcd}$$

$H^i(X^\bullet) \simeq \operatorname{Ker} d^i/\operatorname{Im} d^{i-1}$ $(i < n)$. このとき, $u^n : \operatorname{Im} d_{X^\bullet}^{n-1} \to \operatorname{Im} d^{n-1}$ となるが, $\overline{u^n} : X^n/\operatorname{Im} d_{X^\bullet}^{n-1} \hookrightarrow I^n/\operatorname{Im} d^{n-1}$ と仮定する ($n = 0$ のときは $\overline{u^0} = u^0$). 次の commutative diagram をもつ.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & \operatorname{Im} d^n_{X^\bullet} \arrow[d, hook] & & \\
\text{exact :} & 0 \arrow[r] & H^n(X^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & X^\bullet/\operatorname{Im} d^{n-1}_{X^\bullet} \arrow[r] \arrow[ur, two heads] \arrow[d, hook, "\overline{u^n}"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, hook, "v^{n+1}"] & X^{n+1}/\operatorname{Im} d^n_{X^\bullet} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\text{exact :} & 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f^n \arrow[r] \arrow[d, equal] & I^n/\operatorname{Im} d^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, hook, "w^{n+1}"] & X^{n+1}/\operatorname{Im} d^n_{X^\bullet} \arrow[r] \arrow[d, hook, "g^{n+1}"] & 0 \\
\text{exact :} & 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f^n \arrow[r] & I^n/\operatorname{Im} d^{n-1} \arrow[r, "f^n"'] & I(Y^{n+1}) \arrow[r] & \operatorname{Cok} f^n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

このとき, $I^{n+1} := I(Y^{n+1})$, $d^n : I^n \twoheadrightarrow I^n/\operatorname{Im} d^{n-1} \xrightarrow{f^n} I^{n+1}$, $u^{n+1} := w^{n+1}v^{n+1}$ とすると, $I^{n+1}/\operatorname{Im} d^n = \operatorname{Cok} f^n$, $\overline{u^{n+1}} = g^{n+1}$ となる. さらに, 最下行の exact より, $\operatorname{Ker} f^n = \operatorname{Ker} d^n/\operatorname{Im} d^{n-1}$ となる. したがって, $H^n(X^\bullet) \simeq \operatorname{Ker} d^n/\operatorname{Im} d^{n-1}$ を得るが, この同型は $\overline{u^n}$ の制限で与えられる.

このことから, $I^\bullet$, $u^\bullet : X^\bullet \to I^\bullet$ を得ることができ, $H^n(u^\bullet)$ は iso. だから, $X^\bullet \simeq I^\bullet$ in $D(\text{mod-}A)$ となることがわかる. ■

Prop 2.2.4 次の equivalence が成り立つ.

(1) $Q : K^+(\text{inj-}A) \to D^+(\text{mod-}A)$ は equivalence である.

(2) $Q : K^{+,b}(\text{inj-}A) \to D^{+,b}(\text{mod-}A)$ は equivalence である.

proof.

(1) Prop 2.0.34, Lemma 2.2.2 より, $Q : K^+(\text{inj-}A) \to D^+(\text{mod-}A)$ は fully faithful である. また, Lemma 2.2.3 より, object 間の全射が成り立つ.

(2) (1) と同様.

■

これらの dual も成り立つ.

<u>Lemma</u> 2.2.5 $P^\bullet \in K^-(\text{proj-}A)$ は $\mathcal{U}$-colocal である.

<u>Lemma</u> 2.2.6 任意の $X^\bullet \in K^-(\text{mod-}A)$ に対して, $P^\bullet \in K^-(\text{proj-}A)$ が存在して, $P^\bullet \simeq X^\bullet$ in $D(\text{mod-}A)$ となる.

<u>Prop</u> 2.2.7 次の equivalence が成り立つ.

(1) $Q : K^-(\text{proj-}A) \to D^-(\text{mod-}A)$ は equivalence である.
(2) $Q : K^{-,b}(\text{proj-}A) \to D^{-,b}(\text{mod-}A)$ は equivalence である.

$$
\begin{tikzcd}
 & K^{+,b}(\text{inj-}A) \arrow[rr, dash] \arrow[dl, "\text{f.f.}"'] \arrow[dd, equal] & & K^{-,b}(\text{proj-}A) \arrow[dl, "\text{f.f.}"] \arrow[dd, equal] \\
K^{+}(\text{inj-}A) \arrow[rr, dash] \arrow[dd, equal] & & K^{-}(\text{proj-}A) \arrow[dd, equal] & \\
 & D^{+,b}(\text{mod-}A) \arrow[rr, equal] \arrow[dl, "\text{f.f.}"'] & & D^{-,b}(\text{mod-}A) \arrow[dl, "\text{f.f.}"] \\
D^{+}(\text{mod-}A) \arrow[rr, dash] & & D^{-}(\text{mod-}A) &
\end{tikzcd}
$$

次に, Ext について考える.

<u>Def</u> 2.2.8 $X^\bullet, Y^\bullet \in D(\text{mod-}A)$, $n \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\text{Ext}^n(X^\bullet, Y^\bullet) := \text{Hom}_{D(\text{mod-}A)}(X^\bullet, Y^\bullet)$$

とおき, <u>nth hyper Ext</u> とよぶ.

mod-A は $D(\text{mod-}A)$ の full subcat. と考えることができる[*28] が, A 上では hyper Ext と (普通の) Ext が等しくなることを示そう.

まずは, $\text{Ext}^n_A(X, Y)$ を復習しておく.

$$\text{Ext}^n_A(X, Y) := \left\{ \text{exact } E : 0 \to Y \to E^{-n+1} \to \cdots \to E^0 \to X \to 0 \right\} \Big/ \sim$$

[*28] $D(\text{mod-}A)$ の中では, $\mathcal{A} := \{X^\bullet \in D(\text{mod-}A) \mid H^n(X^\bullet) = 0\ (n \neq 0)\}$ である. つまり, mod-A は $D(\text{mod-}A)$ の full subcat. $\mathcal{A}$ と equivalent である.

ここで, $E \sim E'$ とは, 列 : $E =: E_0, E_1, \cdots, E_\ell := E'$ が存在し, E_i と E_{i+1} の間には commutative diagram が存在することを意味し, これは同値関係になる. また, E を含む同値類を $[E]$ で表すし, $0 \to E^{-n+1} \to \cdots \to E^0 \to 0$ を $E^\bullet$ で表す.

$[E] \in \mathrm{Ext}^n_A(X, Y)$ に対して, $Y[n-1] \to E^\bullet \to X \to Y[n]$ は $D(\text{mod-}A)$ での triangle になるから, (TR2) により, triangle : $X \xrightarrow{e} Y[n] \to E^\bullet[1] \to X[1]$ を作れる.

逆に, $u \in \mathrm{Hom}_{D(\text{mod-}A)}(X, Y[n])$ に対して, triangle : $Y[n-1] \to C(u)[-1] \to X \xrightarrow{u} Y[n]$ が作れる. そこで, $E^\bullet := C(u)[-1]$ とおく. このとき,

$$H^i(E^\bullet) := \begin{cases} X & (i = 0) \\ Y & (i = -n+1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

より, $D(\text{mod-}A)$ で,

$$E^\bullet \simeq \left[0 \to E^{-n+1}/\mathrm{Im}\, d^{-n} \to E^{-n+2} \to \cdots \to E^{-1} \to \mathrm{Ker}\, d^0 \to 0\right]$$

となるから, 次の exact を得る.

$$E(u) : 0 \to Y \to E^{-n+1}/\mathrm{Im}\, d^{-n} \to E^{-n+2} \to \cdots \to E^{-1} \to \mathrm{Ker}\, d^0 \to X \to 0$$

さらに, $[E] \in \mathrm{Ext}^n_A(X, Y)$, $f \in \mathrm{Hom}_A(X', X)$, $g \in \mathrm{Hom}_A(Y, Y')$ に対して, 次のような commutative diagram を得る.

$$\begin{tikzcd}
E : 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & E^{-n+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & E^{-n+2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & E^{-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & E^0 \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & X \arrow[r] & 0 \\
E'' : 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & E^{-n+1} \arrow[r] \arrow[d] & E^{-n+2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & E^{-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & E'^0 \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d, equal] & X' \arrow[r] \arrow[u, "f"'] \arrow[d, equal] & 0 \\
E' : 0 \arrow[r] & Y' \arrow[r] & E'^{-n+1} \arrow[r] & E^{-n+2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E^{-1} \arrow[r] & E'^0 \arrow[r] & X' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

よって, E' は exact だから, $[E'] \in \mathrm{Ext}^n_A(X', Y')$ となる. これは,

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{Ext}^n_A(f, g) : & \mathrm{Ext}^n_A(X, Y) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^n_A(X', Y') \\ & \Cup & & \Cup \\ & [E] & \longmapsto & [E'] \end{array}$$

を得たことを意味している (well-defined であることは, PB, PO の性質よりわかる). このとき, 次のことがわかる.

Prop **2.2.9** $n > 0$, $X, Y \in$ mod-A に対して, natural isomorphism ϕ: $\mathrm{Ext}^n_A(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{D(\text{mod-}A)}(X, Y[n]) = \mathrm{Ext}^n(X,Y)$ をもつ. ここで, $\phi([E]) = e$, 逆は $\psi(u) = [E(u)]$ で与えられる.

proof. 次の step で示す.

(Step 1) ϕ は well-defined である.

proof. $[E_1], [E_2] \in \mathrm{Ext}^n_A(X,Y)$ に対して, commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & E_1^{-n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{-n+1}"'] & \cdots \arrow[r] & E_1^0 \arrow[r] \arrow[d, "f^0"] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & E_2^{-n+1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_2^0 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

をもつとすると, 2 つの triangle の間に次の commutative diagram を得る.

$$\begin{tikzcd}
Y[n-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & E_1^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f^\bullet"] & X \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, equal] & Y[n] \arrow[d, equal] \\
Y[n-1] \arrow[r] & E_2^\bullet \arrow[r] & X \arrow[r, "e_2"'] & Y[n]
\end{tikzcd}$$

よって, $e_1 = e_2$ となる. ■

(Step 2) ψ は well-defined である.

proof. (TR3) より明らか. ■

(Step 3) $\psi\phi = 1$

proof. triangle の一意性より明らか. ■

(Step 4) $\phi\psi = 1$

proof. triangle の一意性より明らか. ■

(Step 5) ϕ は natural である. すなわち, $f : X' \to X$, $g : Y \to Y'$ に対して,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^n_A(X,Y) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathrm{Ext}^n_A(f,g)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Hom}_{D(\text{mod-}A)}(X, Y[n]) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{D(\text{mod-}A)}(f, g[n])"] \\
\mathrm{Ext}^n_A(X',Y') \arrow[r, "\phi"'] & \mathrm{Hom}_{D(\text{mod-}A)}(X', Y'[n])
\end{tikzcd}$$

proof. $\mathrm{Ext}^n_A(f,g)$ の作り方より, 次のような triangle の間の commutative diagram

をもつ.

$$\begin{tikzcd}
Y[n-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & E^\bullet \arrow[r] & X \arrow[r, "e"] & Y[n] \arrow[d, equal] \\
Y[n-1] \arrow[r] \arrow[d, "{g[n-1]}"'] & E''^\bullet \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[u, "f"] \arrow[d, equal] & Y[n] \arrow[d, "{g[n]}"] \\
Y'[n-1] \arrow[r] & E'^\bullet \arrow[r] & X' \arrow[r, "e'"'] & Y'[n]
\end{tikzcd}$$

よって, $e' = g[n]\, e\, f$ を得る. ■

これにより, self-orthogonal な module について次のことがわかる.

Cor 2.2.10 $T_A \in$ mod-A を self-orthogonal, すなわち, $\mathrm{Ext}_A^{n>0}(T, T) = 0$ とする. このとき, $Q : K^b(\text{add-}T_A) \to D^b(\text{mod-}A)$ は fully faithful である.

proof. $T^\bullet : 0 \to T^\ell \to \cdots \to T^m \to 0 \in K^b(\text{add-}T_A)$ に対して, $w(T^\bullet) := m - \ell + 1$ とおく. $T_1^\bullet, T_2^\bullet \in K^b(\text{add-}T_A)$ に対して, $w(T_1^\bullet), w(T_2^\bullet)$ に関する帰納法で示す.

(1) $w(T_1^\bullet) = 1$ とする. このとき, $T_1^\bullet := T_1$ としてよい.

(i) $w(T_2^\bullet) = 1$ のとき, $T_2^\bullet := T_2[n]$ とする.

$$\mathrm{Hom}_{K^b(\text{add-}T_A)}(T_1^\bullet, T_2^\bullet) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_A(T_1, T_2) & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$$

また, Prop 2.2.9 より,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{D^b(\text{mod-}A)}(T_1^\bullet, T_2^\bullet) &= \begin{cases} \mathrm{Ext}_A^n(T_1, T_2) & (n > 0) \\ \mathrm{Hom}_A(T_1, T_2) & (n = 0) \\ 0 & (n < 0) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathrm{Hom}_A(T_1, T_2) & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}
\end{aligned}$$

(ii) $w(T_2^\bullet) > 1$ のとき, $w(T^\bullet) = w(T_2^\bullet) - 1$ となる $T^\bullet$ で主張が成り立つと仮定する. $T_2^\bullet : 0 \to T^\ell \to \cdots \to T^m \xrightarrow{f} T' \to 0$, $T^\bullet : 0 \to T^\ell \to \cdots \to T^m \to 0$ とおくと, $T^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} T'[-m] \to T_2^\bullet[1] \to T^\bullet[1]$ は triangle である. ここで, $f^\bullet$ は $f^m = f$, $f^i = 0$ $(i \neq m)$ である. よって, $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{add-}T_A)}(T_1^\bullet, -)$ を apply して, 5-lemma より主張を得る.

(2) $w(T_1^\bullet) > 1$ のとき, (1)(ii) と同様.

$\blacksquare$

例えば, projective mod. や injective mod. は self-orthogonal であるから, $K^b(\text{proj-}A)$ や $K^b(\text{inj-}A)$ は $D^b(\text{mod-}A)$ の full triangulated subcat. (特に, épaisse subcategory) であることがわかる. では, これらの full subcat. が derived cat. 内ではどのようになっているか見てみよう.

Def 2.2.11 $X^\bullet, Y^\bullet \in C(\text{mod-}A)$ に対して, $C^{p,q} := \mathrm{Hom}_A(X^{-p}, Y^q)$ とおき, $\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)$ を次のように定義する.

$$\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet) := \begin{cases} \mathrm{Hom}^n(X^\bullet, Y^\bullet) := \displaystyle\prod_{p+q=n} C^{p,q} \\ d^n_{\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet,Y^\bullet)}(u) := (-1)^{n+1} u d_{X^\bullet}^{-p-1} + d_{Y^\bullet}^q u \quad u \in C^{p,q} \end{cases}$$

これは, $X^\bullet[n+1]$ に $\mathrm{Hom}_A(-, Y^q)$, $Y^\bullet$ に $\mathrm{Hom}_A(X^{-p}, -)$ を apply した commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(X^{-p+1}, Y^{q-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(X^{-p+1}, Y^q) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(X^{-p+1}, Y^{q+1}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(X^{-p}, Y^{q-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(X^{-p}, Y^q) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(X^{-p}, Y^{q+1}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(X^{-p-1}, Y^{q-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(X^{-p-1}, Y^q) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(X^{-p-1}, Y^{q+1}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

を "$\cdots$" 上で直積をとったものである (differential に注意). $\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)$ は明らかに cochain complex になる.

Remark 2.2.12 (1) $X \in \text{mod-}A$, $Y^\bullet \in C(\text{mod-}A)$ ならば, $\mathrm{Hom}^\bullet(X, Y^\bullet) \simeq \mathrm{Hom}_A(X, Y^\bullet)$.

(2) $X^\bullet \in C(\text{mod-}A)$, $Y \in \text{mod-}A$ ならば, $\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y) \simeq \mathrm{Hom}_A(X^\bullet, Y)$.

(3) $X^\bullet \in K^-(\text{mod-}A)$, $Y^\bullet \in K^+(\text{mod-}A)$ ならば, $\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet) \in C^+(-)$, 各 n に対して, $\mathrm{Hom}^n(X^\bullet, Y^\bullet)$ は有限直和.

(4) $X^\bullet \in K^+(\text{mod-}A)$, $Y^\bullet \in K^-(\text{mod-}A)$ ならば, $\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet) \in C^-(-)$, 各 n に対して, $\mathrm{Hom}^n(X^\bullet, Y^\bullet)$ は有限直和.

Lemma 2.2.13 $X^\bullet$, $Y^\bullet \in C(\text{mod-}A)$ に対して, 次のことがわかる.

(1) $B := \mathrm{End}_{C(\text{mod-}A)}(X^\bullet)$ とすると, $\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet) \in C(\text{Mod-}B)$

(2) $B := \mathrm{End}_{C(\text{mod-}A)}(Y^\bullet)$ とすると, $\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet) \in C(B\text{-Mod})$

ここで, Mod-B は right B-module の category である (有限生成以外も全部とる). B-Mod は left B-module の cat.

proof.

(1) $\sum_{p+q=n} c^{p,q} \in \mathrm{Hom}^n(X^\bullet, Y^\bullet)$ $(c^{p,q} \in C^{p,q})$, $f^\bullet \in B$ に対して, $\left(\sum_{p+q=n} c^{p,q}\right) \cdot f^\bullet := \sum_{p+q=n} c^{p,q} \cdot f^{-p}$ とすれば, $\mathrm{Hom}^n(X^\bullet, Y^\bullet) \in \text{mod-}B$ である. また, $f^{-p} d_{X^\bullet}^{-p-1} = d_{X^\bullet}^{-p-1} f^{-p-1}$ に注意すれば, $d^n_{\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)}$ は B-homo. である.

(2) (1) と同様.

■

Lemma 2.2.14 $X^\bullet$, $Y^\bullet \in C(\text{mod-}A)$ に対して,

$$d^n_{\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet[1])} = -d^{n+1}_{\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)} \quad , \quad d^n_{\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet[-1], Y^\bullet)} = d^{n+1}_{\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)}$$

Lemma 2.2.15 $u^\bullet \in \mathrm{Hom}_{C(\text{mod-}A)}(X^\bullet, Y^\bullet)$, $Z^\bullet \in C(\text{mod-}A)$ に対して,

$$\mathrm{Hom}^\bullet(Z^\bullet, C(u^\bullet)) \simeq C(\mathrm{Hom}^\bullet(Z^\bullet, u^\bullet))$$

Prop 2.2.16 $n \in \mathbb{Z}$, $X^\bullet$, $Y^\bullet \in C(\text{mod-}A)$ に対して,

$$H^n(\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)) \simeq \mathrm{Hom}_{K(\text{mod-}A)}(X^\bullet, Y^\bullet[n])$$

proof. 次を示す.

(1) $\mathrm{Ker}\, d^n = \mathrm{Hom}_{C(\text{mod-}A)}(X^\bullet, Y^\bullet[n])$

(2) $\operatorname{Im} d^{n-1} = \operatorname{Htp}(X^\bullet, Y^\bullet[n]) := \left\{ u^\bullet \in \operatorname{Hom}_{C(\text{mod-}A)}(X^\bullet, Y^\bullet[n]) \,\middle|\, u^\bullet \text{は homotopic} \right\}$

(1) "⊆" $\sum_{p+q=n} c^{p,q} \in \operatorname{Ker} d^n$ とすると, $d_{Y^\bullet}^{q-1} c^{p+1,q-1} + (-1)^{n+1} c^{p,q} d_{X^\bullet}^{-p-1} = 0.$ よって, $(-1)^n d_{Y^\bullet}^{q-1} c^{p+1,q-1} = c^{p,q} d_{X^\bullet}^{-p-1}$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{-p-1} \arrow[r, "d_{X^\bullet}^{-p-1}"] \arrow[d, "c^{p+1,q-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X^{-p} \arrow[r] \arrow[d, "c^{p,q}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{q-1} \arrow[r, "(-1)^n d_{Y^\bullet}^{q-1}"'] & Y^q \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

"⊇" "⊆" を逆からやればよい.

(2) "⊆" $\sum_{p+q=n} c^{p,q} \in \operatorname{Im} d^{n-1}$ とすると, $\sum_{p+q=n-1} c^{p,q}$ が存在して,

$$\begin{aligned}
c^{p,q} &= d_{Y^\bullet}^{q-1} c^{p,q-1} + (-1)^n c^{p-1,q} d_{X^\bullet}^{-p} \\
&= (-1)^n \left\{ (-1)^n d_{Y^\bullet}^{q-1} c^{p,q-1} + c^{p-1,q} d_{X^\bullet}^{-p} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r] & X^{-p} \arrow[r, "d_{X^\bullet}^{-p}"] \arrow[dl, "(-1)^n c^{p,q-1}"'] \arrow[d, "c^{p,q}"] & X^{-p+1} \arrow[r] \arrow[dl, "(-1)^n c^{p-1,q}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{q-1} \arrow[r, "(-1)^n d_{Y^\bullet}^{q-1}"'] & Y^q \arrow[r] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

"⊇" "⊆" を逆からやればよい.

■

以下, $* \in \{\text{nothing}, +, -, b\}$ とする.

Def 2.2.17 $X^\bullet \in K(\text{mod-}A)$ に対して, $X^\bullet$ が finite injective dimension をもつとは, 任意の $Y \in \text{mod-}A$ に対して, $\operatorname{Ext}^n(Y, X^\bullet) = 0$ $(n \gg 0)$ となるときにいう. また,

$$K^*(\text{mod-}A)_{\text{f.i.d.}} := \left\{ X^\bullet \in K^*(\text{mod-}A) \,\middle|\, X^\bullet \text{は finite injective dimension をもつ} \right\}$$

とし, $\mathcal{U}^*_{\text{f.i.d.}} := \mathcal{U} \cap K^*(\text{mod-}A)_{\text{f.i.d.}}$ とおく.

Lemma 2.2.18 次が成り立つ.

(1) $K^*(\text{mod-}A)_{\text{f.i.d.}}$ は $K^*(\text{mod-}A)$ の full triangulated subcategory である.

(2) $\mathcal{U}^*_{\text{f.i.d.}}$ は épaisse subcategory of $K^*(\text{mod-}A)_{\text{f.i.d.}}$ である.

proof.

(1) auto-functor [1] と mapping cone $C(u^\bullet)$ で閉じていることを示せばよい. $X^\bullet, Y^\bullet \in K^*(\text{mod-}A)_{\text{f.i.d.}}$ とする.

- auto-functor [1] で閉じていること.
  $\mathrm{Ext}^n(-, X^\bullet[1]) \simeq \mathrm{Ext}^{n+1}(-, X^\bullet)$ より.
- mapping cone $C(u^\bullet)$ で閉じていること.
  $u^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ に対して, triangle に $\mathrm{Ext}^n(-, ?)$ を apply して,

$$\text{exact} : \cdots \to \mathrm{Ext}^n(-, Y^\bullet) \to \mathrm{Ext}^n(-, C(u^\bullet)) \to \mathrm{Ext}^{n+1}(-, X^\bullet) \to \cdots$$

  を得る.

(2) 明らか.

■

そこで,

$$D^*(\text{mod-}A)_{\text{f.i.d.}} := K^*(\text{mod-}A)_{\text{f.i.d.}}/\mathcal{U}^*_{\text{f.i.d.}}$$

とおく.

Lemma 2.2.19 canonical functor Q は fully faithful : $D^*(\text{mod-}A)_{\text{f.i.d.}} \to D^*(\text{mod-}A)$ を導く.

proof. $X^\bullet \in K^*(\text{mod-}A)_{\text{f.i.d.}}$, $Y^\bullet \in K^*(\text{mod-}A)$, $s : X^\bullet \Rightarrow Y^\bullet$ に対して, derived cat. 内で, $X^\bullet \simeq Y^\bullet$ より, $Y^\bullet \in K^*(\text{mod-}A)_{\text{f.i.d.}}$ となる. よって, Prop 2.0.26 より主張を得る. ■

Lemma 2.2.20 $X^\bullet \in K^+(\text{mod-}A)$ に対して, 次は同値である.

(1) $X^\bullet \in K^+(\text{mod-}A)_{\text{f.i.d.}}$ (2) $I^\bullet \in K^b(\text{inj-}A)$ が存在して, $X^\bullet \simeq I^\bullet$ in $D(\text{mod-}A)$

proof. (1) $\Rightarrow$ (2). Lemma 2.2.3 より, $I^\bullet \in K^+(\text{inj-}A)$ が存在して, $X^\bullet \simeq I^\bullet$ in $D(\text{mod-}A)$ となる. また, $i > n$ に対して, $\mathrm{Ext}^i(-, X^\bullet)$ は mod-A 上で 0 になると仮定する. このとき, $i > n$ に対して, $I^\bullet$ は $\mathcal{U}$-local より, Prop 2.0.34 を適用して,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{K(\text{mod-}A)}(\mathrm{Ker}\, d^i_{I^\bullet}[-i], I^\bullet) &\simeq \mathrm{Hom}_{K(\text{mod-}A)}(\mathrm{Ker}\, d^i_{I^\bullet}, I^\bullet[i]) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{D(\text{mod-}A)}(\mathrm{Ker}\, d^i_{I^\bullet}, I^\bullet[i]) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{D(\text{mod-}A)}(\mathrm{Ker}\, d^i_{I^\bullet}, X^\bullet[i]) \\
&\simeq \mathrm{Ext}^i(\mathrm{Ker}\, d^i_{I^\bullet}, X^\bullet) \\
&= 0
\end{aligned}$$

よって, 次の commutative diagram を得る.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} d_{I^\bullet}^{i} \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[d, hook] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] & 0 & \\
I^{i-1} \arrow[rr, "d_{I^\bullet}^{i-1}"'] & & I^{i} \arrow[rr, "d_{I^\bullet}^{i}"'] & & I^{i+1}
\end{tikzcd}$$

したがって, $H^i(I^\bullet) = 0$, $\operatorname{Ker} d_{I^\bullet}^i \to I^{i-1}$: split mono である. ゆえに, $\operatorname{Ker} d_{I^\bullet}^i \in \text{inj-}A$ となる. $I^j = 0$ $(j < m)$ とし, $I'^\bullet : 0 \to I^m \to \cdots \to I^n \to \operatorname{Ker} d_{I^\bullet}^{n+1} \to 0$ とすると, $I^\bullet \simeq I'^\bullet$ in $D(\text{mod-}A)$ で, $I'^\bullet \in K^b(\text{inj-}A)$ より, 主張を得る. (2) $\Rightarrow$ (1). $I^n = 0$ $(n > 0)$ とすると, $Y \in \text{mod-}A$ に対して, Prop 2.0.34, Prop 2.2.16 より,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ext}^n(Y, X^\bullet) &\simeq \operatorname{Ext}^n(Y, I^\bullet) \\
&= \operatorname{Hom}_{D(\text{mod-}A)}(Y, I^\bullet[n]) \\
&\simeq \operatorname{Hom}_{K(\text{mod-}A)}(Y, I^\bullet[n]) \\
&\simeq H^n(\operatorname{Hom}^\bullet(Y, I^\bullet)) \\
&\simeq H^n(\operatorname{Hom}_A(Y, I^\bullet)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる. ■

Prop 2.2.21 次が成り立つ.

(1) $K^b(\text{inj-}A) \subseteq K^+(\text{mod-}A)_{\text{f.i.d.}} \subseteq K^{+,b}(\text{mod-}A)$
(2) $Q : K^b(\text{inj-}A) \to D^+(\text{mod-}A)_{\text{f.i.d.}}$ は equivalence である.

proof.

(1) see proof of Lemma 2.2.20
(2) Cor 2.2.10 より, $K^b(\text{inj-}A) \to D^b(\text{mod-}A)$ は fully faithful である. さらに, これは (1) より, fully faithful : $K^b(\text{inj-}A) \to D^+(\text{mod-}A)_{\text{f.i.d.}}$ である. また, Lemma 2.2.20 より, object 間の全射も成り立つ.

■

これらの dual も成り立つ.

Def **2.2.22** $X^\bullet \in K(\text{mod-}A)$ に対して, $X^\bullet$ が finite projective dimension をもつとは, 任意の $Y \in \text{mod-}A$ に対して, $\mathrm{Ext}^n(X^\bullet, Y) = 0$ $(n \gg 0)$ となるときにいう. また,

$$K^*(\text{mod-}A)_{\text{f.p.d.}} := \left\{ X^\bullet \in K^*(\text{mod-}A) \,\middle|\, X^\bullet \text{は finite projective dimension をもつ} \right\}$$

とし, $\mathcal{U}^*_{\text{f.p.d.}} := \mathcal{U} \cap K^*(\text{mod-}A)_{\text{f.p.d.}}$ とおく.

Lemma **2.2.23** 次が成り立つ.

(1) $K^*(\text{mod-}A)_{\text{f.p.d.}}$ は $K^*(\text{mod-}A)$ の full triangulated subcategory である.
(2) $\mathcal{U}^*_{\text{f.p.d.}}$ は épaisse subcategory of $K^*(\text{mod-}A)_{\text{f.p.d.}}$ である.

そこで,

$$D^*(\text{mod-}A)_{\text{f.p.d.}} := K^*(\text{mod-}A)_{\text{f.p.d.}}/\mathcal{U}^*_{\text{f.p.d.}}$$

とおく.

Lemma **2.2.24** canonical functor Q は fully faithful : $D^*(\text{mod-}A)_{\text{f.p.d.}} \to D^*(\text{mod-}A)$ を導く.

Lemma **2.2.25** $X^\bullet \in K^-(\text{mod-}A)$ に対して, 次は同値である.

(1) $X^\bullet \in K^-(\text{mod-}A)_{\text{f.p.d.}}$ (2) $P^\bullet \in K^b(\text{proj-}A)$ が存在して, $X^\bullet \simeq P^\bullet$ in $D(\text{mod-}A)$

Prop **2.2.26** 次が成り立つ.

(1) $K^b(\text{proj-}A) \subseteq K^-(\text{mod-}A)_{\text{f.p.d.}} \subseteq K^{-,b}(\text{mod-}A)$
(2) $Q : K^b(\text{proj-}A) \to D^-(\text{mod-}A)_{\text{f.p.d.}}$ は equivalence である.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & K^b(\text{inj-}A) \arrow[rrr, dash] \arrow[dl, "\text{f.f.}"'] \arrow[ddd, equal] & & & K^b(\text{proj-}A) \arrow[dl, "\text{f.f.}"] \arrow[ddd, equal] \\
 & K^{+,b}(\text{inj-}A) \arrow[rrr, equal] \arrow[dl, "\text{f.f.}"'] \arrow[ddd, equal] & & & K^{-,b}(\text{proj-}A) \arrow[dl, "\text{f.f.}"] \arrow[ddd, equal] & \\
K^+(\text{inj-}A) \arrow[rrr, dash] \arrow[ddd, equal] & & & K^-(\text{proj-}A) \arrow[ddd, equal] & & \\
 & & D^+(\text{mod-}A)_{\text{f.i.d.}} \arrow[rrr, dash] \arrow[dl, "\text{f.f.}"'] & & & D^-(\text{mod-}A)_{\text{f.p.d.}} \arrow[dl, "\text{f.f.}"] \\
 & D^{+,b}(\text{mod-}A) \arrow[r, equal] \arrow[dl, "\text{f.f.}"'] & D^b(\text{mod-}A) \arrow[rr, equal] & & D^{-,b}(\text{mod-}A) \arrow[dl, "\text{f.f.}"] & \\
D^+(\text{mod-}A) \arrow[rrr, dash] & & & D^-(\text{mod-}A) & &
\end{tikzcd}$$

では, $D(\text{mod-}A)$ は homotopy cat. 内に引き戻せるだろうか？ これはできないようである. つまり, $D(\text{mod-}A)$ を homotopy cat. $K(\text{mod-}A)$ 内に引き戻すことはできない. しかし, $D(\text{Mod-}A)$ は homotopy cat. $K(\text{Mod-}A)$ 内に引き戻せる. この証明は付録として書くことにする.

2.2.3 Derived functor

次に, derived category 間の functor "right derived functor" について述べる. 以下, $K^*(\text{mod-}A)$ を $K^-(\text{mod-}A)$, $K^+(\text{mod-}A)$, $K^{-,b}(\text{mod-}A)$, $K^{+,b}(\text{mod-}A)$, $K^b(\text{mod-}A)$, $K^-(\text{mod-}A)_{\text{f.p.d.}}$, $K^+(\text{mod-}A)_{\text{f.i.d.}}$ のいづれかとする. また, B は k-algebra とする.

Def 2.2.27 exact functor $F : K^*(\text{mod-}A) \to K(\text{mod-}B)$ の right derived functor $\mathbf{R}F : D^*(\text{mod-}A) \to D(\text{mod-}B)$ とは, 次の category C の initial object である. なお, initial object については付録 A を参照のこと.

category C :

- object : (ζ, G)
  exact functor $G : D^*(\text{mod-}A) \to D(\text{mod-}B)$, $\zeta \in \text{Hom}(QF, GQ)$
- morphism $\eta : (\zeta_1, G_1) \to (\zeta_2, G_2)$
  $\eta \in \text{Hom}(G_1, G_2)$, 任意の $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet \in K^*(\text{mod-}A)$ に対して, 次の commutative

diagram in $D(\text{mod-}B)$ をもつ.

$$
\begin{tikzcd}
 & G_1(X^\bullet) \arrow[dr, "\eta"] \arrow[dd, "G_1(f^\bullet)"] & \\
F(X^\bullet) \arrow[ur, "\zeta_1"] \arrow[rr, "\zeta_2"'] \arrow[dd, "F(f^\bullet)"'] & & G_2(X^\bullet) \arrow[dd, "G_2(f^\bullet)"] \\
 & G_1(Y^\bullet) \arrow[dr, "\eta"] & \\
F(Y^\bullet) \arrow[ur, "\zeta_1"] \arrow[rr, "\zeta_2"'] & & G_2(Y^\bullet)
\end{tikzcd}
$$

側面は ζ_1, ζ_2, η による commutative diagram であり, 底面が morphism の定義による commutative diagram である.

ここで, triangulated category $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$ 間の exact functor $F, G : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ に対して, $\alpha \in \mathrm{Hom}(F, G)$ は, $f : X \to Y \in \mathcal{K}$ に対して, 次の commutative diagram を満たすものである.

$$
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_X"'] & F(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_Y"] & F(C(f)) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{C(f)}"] & F(X)[1] \arrow[d, "\alpha_{X[1]}"] \\
G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y) \arrow[r] & G(C(f)) \arrow[r] & G(X)[1]
\end{tikzcd}
$$

また, exact functor $F, G : \mathcal{K}/\mathcal{U} \to \mathcal{H}$ に対して,

$$
\text{iso.} : \qquad
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(F, G) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(FQ, GQ) \\
\Psi & & \Psi \\
\alpha & \longmapsto & \alpha_Q
\end{array}
$$

となる. 単射であることは明らか. また, $\beta \in \mathrm{Hom}(FQ, GQ)$ とする. $X \in \mathcal{K}/\mathcal{U}$ に対して, $\beta_X : F(X) \to G(X)$ となることは明らかだから, morphism に対して図式が commutative であることを示せばよい. $\phi := Q(s)^{-1}Q(f)$ とすると, 次の commutative diagram in $\mathcal{H}$ を得る.

$$
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "FQ(f)"] \arrow[d, "\beta_X"'] & F(Z) \arrow[d, "\beta_Z"] & F(Y) \arrow[l, "FQ(s)"', "\simeq"] \arrow[d, "\beta_Y"] \\
G(X) \arrow[r, "GQ(f)"'] & G(Z) & G(Y) \arrow[l, "\simeq"', "GQ(s)"]
\end{tikzcd}
$$

よって, $G(\phi)\beta_X = \beta_Y F(\phi)$ となる.

Prop **2.2.28** exact functor $F : K^*(\text{mod-}A) \to K(\text{mod-}B)$ に対して, 次が成り立つ.

(1) F : acyclic $\mapsto$ acyclic $\Leftrightarrow$ exact functor $\overline{F} : D^*(\text{mod-}A) \to D(\text{mod-}A)$ が存在して, $\xi : QF \simeq \overline{F}Q$.

(2) (1) の条件を満たせば, $(\xi, \overline{F})$ は F の right derived functor である.

proof. (1) $(\Leftarrow)$. 明らか. $(\Rightarrow)$. Prop 2.0.25 より, functor $\overline{F}$ が存在する. また, $\overline{F}$ の作り方から exact であることは明らか. (2) initial object であることを示せばよい. $\eta : (\xi, \overline{F}) \to (\zeta, G)$ とすると,

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}(QF, GQ) & \simeq & \mathrm{Hom}(\overline{F}Q, GQ) & \simeq & \mathrm{Hom}(\overline{F}, G) \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\zeta = \eta_Q \xi & \longleftrightarrow & \eta_Q & \longleftrightarrow & \eta
\end{array}
$$

■

Remark **2.2.29** $T : D^*(\text{mod-}A) \to D^*(\text{mod-}A)$ は $T : K^*(\text{mod-}A) \to K^*(\text{mod-}A)$ の right derived functor である.

Lemma **2.2.30** $K^*(\text{mod-}A)$ は次を満たす full triangulated subcategory $\mathcal{L}$ をもつとする.

$\mathcal{L}$: 任意の $X^\bullet \in K^*(\text{mod-}A)$ に対して, $I^\bullet \in \mathcal{L}$, $X^\bullet \Rightarrow I^\bullet$ が存在する.

このとき, 任意の $u^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet \in K^*(\text{mod-}A)$ と $s^\bullet : X^\bullet \Rightarrow I^\bullet_{X^\bullet}$, $I^\bullet_{X^\bullet} \in \mathcal{L}$ に対して, $I^\bullet_{Y^\bullet} \in \mathcal{L}$ が存在して, 次の commutative diagram をもつ.

$$
\begin{array}{ccc}
X^\bullet & \xrightarrow{u^\bullet} & Y^\bullet \\
{\scriptstyle s^\bullet}\Downarrow & & \Downarrow{\scriptstyle t^\bullet} \\
I^\bullet_{X^\bullet} & \xrightarrow[\overline{u^\bullet}]{} & I^\bullet_{Y^\bullet}
\end{array}
$$

Remark 2.2.31 各 $K^*(\text{mod-}A)$ に対して, non-trivial な $\mathcal{L}$ の例は次である.

$K^*(\text{mod-}A)$	$\mathcal{L}$
$K^-(\text{mod-}A)$	–
$K^+(\text{mod-}A)$	$K^+(\text{inj-}A)$
$K^{-,b}(\text{mod-}A)$	–
$K^{+,b}(\text{mod-}A)$	$K^{+,b}(\text{inj-}A)$
$K^b(\text{mod-}A)$	–
$K^-(\text{mod-}A)_{\text{f.p.d.}}$	–
$K^+(\text{mod-}A)_{\text{f.i.d.}}$	$K^b(\text{inj-}A)$

proof. (FR2) より, 次の commutative diagram をもつ.

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "u^\bullet"] \arrow[d, Rightarrow, "s^\bullet"'] & Y^\bullet \arrow[d, Rightarrow, "t'^\bullet"] \\ I^\bullet_{X^\bullet} \arrow[r, "u'^\bullet"'] & Y'^\bullet \end{tikzcd}$$

したがって, $t''^\bullet : Y'^\bullet \Rightarrow I^\bullet_{Y'^\bullet}$ が存在するから, $t^\bullet := t''^\bullet t'^\bullet$, $I^\bullet_{Y^\bullet} := I^\bullet_{Y'^\bullet}$, $\overline{u^\bullet} := t''^\bullet u'^\bullet$ とすればよい. ■

Prop 2.2.32 [Existence theorem] exact functor $F : K^*(\text{mod-}A) \to K(\text{mod-}B)$, $K^*(\text{mod-}A)$ は Lemma 2.2.30 のような full triangulated subcategory $\mathcal{L}$ をもつとする. また, $QF : \mathcal{L} \to D(\text{mod-}B)$ ($QF : K^*(\text{mod-}A) \to D(\text{mod-}B)$ の $\mathcal{L}$ への制限) は acyclic 上で 0 になると仮定する. このとき, F の right derived functor $(\xi, \mathbf{R}F)$ が存在して, 次を満たす.

(1) $I^\bullet \in \mathcal{L}$ に対して, $\xi_{I^\bullet} : QF(I^\bullet) \to \mathbf{R}F(Q(I^\bullet))$ は iso. である.
(2) $X^\bullet \in K^*(\text{mod-}A)$, $I^\bullet \in \mathcal{L}$, $X^\bullet \Rightarrow I^\bullet$ ならば, $H^n(\mathbf{R}F(Q(X^\bullet))) \simeq H^n(F(I^\bullet))$ である.

proof. $J : \mathcal{L} \to K^*(\text{mod-}A)$ を inclusion とすると, 仮定と Prop 2.0.26 より, $\overline{J} : \mathcal{L}/(\mathcal{U} \cap \mathcal{L}) \to D^*(\text{mod-}A)$ は equivalence になり, $QJ = \overline{J}Q$ を満たす. このとき, $\overline{J}$ の quasi-inverse を $P : D^*(\text{mod-}A) \to \mathcal{L}/(\mathcal{U} \cap \mathcal{L})$ とし, $\epsilon : 1_{\mathcal{L}/(\mathcal{U}\cap\mathcal{L})} \to P\overline{J}$ を iso. とする. また, 仮定と Prop 2.0.25 より, exact functor : $F' : \mathcal{L}/(\mathcal{U} \cap \mathcal{L}) \to D(\text{mod-}B)$ が存在し, $QFJ = F'Q$ を満たす.

そこで, $\overline{F} := F'P$ とおくと, これは exact functor である.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{L} \arrow[dl, "J"'] \arrow[dr, "FJ"] \arrow[dd, "Q"] & \\
K^*(\text{mod-}A) \arrow[rr, "F"] \arrow[dd, "Q"'] & & K(\text{mod-}B) \arrow[dd, "Q"] \\
 & \mathcal{L}/(\mathcal{U}\cap\mathcal{L}) \arrow[dl, shift left, "P"] \arrow[dr, "F'"] & \\
D^*(\text{mod-}A) \arrow[ur, shift left, "\overline{J}"] \arrow[rr, "\overline{F}"'] & & D(\text{mod-}B)
\end{tikzcd}$$

さらに, $G : D^*(\text{mod-}A) \to D(\text{mod-}A)$ に対して, 次の iso. を得る.

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}(\overline{F},G) & \simeq & \mathrm{Hom}(\overline{FJ},G\overline{J}) & \simeq & \mathrm{Hom}(\overline{FJ}Q,G\overline{J}Q) & \simeq & \mathrm{Hom}(QFJ,GQJ) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
\eta & \longmapsto & \eta_{\overline{J}} & \longmapsto & \left(\eta_{\overline{J}}\right)_Q & \longmapsto & \eta_{QJ}\cdot F'\epsilon_Q
\end{array}$$

そこで, $\mathrm{Hom}(QF,GQ) \simeq \mathrm{Hom}(QFJ,GQJ)$ であることを示す.

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(QF,GQ) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(QFJ,GQJ) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
\eta & \longmapsto & \eta_J
\end{array}$$

(単射であること) $\eta_J = 0$ とする. $X^\bullet \in K^*(\text{mod-}A)$ に対して, $I^\bullet \in \mathcal{L}$, $s^\bullet : X^\bullet \Rightarrow I^\bullet$ とすると次の commutative diagram in $D(\text{mod-}B)$ を得る.

$$\begin{tikzcd}
QF(X^\bullet) \arrow[r, "QF(s^\bullet)"] \arrow[d, "\eta_{X^\bullet}"'] & QF(I^\bullet) \arrow[d, "\eta_{I^\bullet}=\eta_{J(I^\bullet)}=0"] \\
GQ(X^\bullet) \arrow[r, "\simeq", "GQ(s^\bullet)"'] & GQ(I^\bullet)
\end{tikzcd}$$

よって, $\eta = 0$ を得る. (全射であること) $\theta \in \mathrm{Hom}(QFJ,GQJ)$ とする. $X^\bullet \in K^*(\text{mod-}A)$ に対して, $I^\bullet \in \mathcal{L}$, $s^\bullet : X^\bullet \Rightarrow I^\bullet$ とし, $\eta_{X^\bullet} := GQ(s^\bullet)^{-1}\cdot\theta_{I^\bullet}\cdot QF(s^\bullet) : QF(X^\bullet) \to GQ(X^\bullet)$ とおく. まず, $\eta_{X^\bullet}$ が $s^\bullet$ の取り方によらないことをみる. $s'^\bullet : X^\bullet \Rightarrow I'^\bullet$ に対して, Lemma 2.2.30

より,
$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, Rightarrow, "s'^\bullet"] \arrow[d, Rightarrow, "s^\bullet"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & I'^\bullet \arrow[d, Rightarrow, "t^\bullet"] \\ I^\bullet \arrow[r, Rightarrow, "t'^\bullet"'] & I''^\bullet \end{tikzcd}$$
, $I''^\bullet \in \mathcal{L}$ を得る. したがって, 次の commutative diagram を得る.

$$\begin{tikzcd}
 & QF(X^\bullet) \arrow[rr, "QF(s^\bullet)"] \arrow[dl] \arrow[dd, equal] & & QF(I^\bullet) \arrow[dl, "\theta_{I^\bullet}"] \arrow[dd, "QF(t'^\bullet)"] \\
GQ(X^\bullet) \arrow[rr, "GQ(s^\bullet)"'] \arrow[dd, equal] & & GQ(I^\bullet) \arrow[dd, "GQ(t'^\bullet)"] & \\
 & QF(X^\bullet) \arrow[rr, "QF(t'^\bullet s^\bullet)"] \arrow[dl] \arrow[dd, equal] & & QF(I''^\bullet) \arrow[dl, "\theta_{I''^\bullet}"] \arrow[dd, equal] \\
GQ(X^\bullet) \arrow[rr, "GQ(t'^\bullet s^\bullet)"'] \arrow[dd, equal] & & GQ(I''^\bullet) \arrow[dd, equal] & \\
 & QF(X^\bullet) \arrow[rr, "QF(t^\bullet s'^\bullet)"] \arrow[dl] \arrow[dd, equal] & & QF(I''^\bullet) \arrow[dl, "\theta_{I''^\bullet}"] \\
GQ(X^\bullet) \arrow[rr, "GQ(t^\bullet s'^\bullet)"'] \arrow[dd, equal] & & GQ(I''^\bullet) & \\
 & QF(X^\bullet) \arrow[rr, "QF(s'^\bullet)"] \arrow[dl] & & QF(I'^\bullet) \arrow[dl, "\theta_{I'^\bullet}"] \arrow[uu, "QF(t^\bullet)"'] \\
GQ(X^\bullet) \arrow[rr, "GQ(s'^\bullet)"'] & & GQ(I'^\bullet) \arrow[uu, "GQ(t^\bullet)"] &
\end{tikzcd}$$

後側面は functor QF, 前側面は GQ, 右側面は θ から得られる. このことから, $\eta_{X^\bullet}$ が $s^\bullet$ の取り方によらないことがわかる.

　そこで, $\eta \in \mathrm{Hom}(QF, GQ)$ であることを示せばよい. $u^\bullet \in \mathrm{Hom}_{K^*(\text{mod-}A)}(X^\bullet, Y^\bullet)$ に対して, Lemma 2.2.30 より, 次の commutative diagram in $K^*(\text{mod-}A)$ を得る.

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "u^\bullet"] \arrow[d, Rightarrow, "s^\bullet"'] & Y^\bullet \arrow[d, Rightarrow, "t^\bullet"] \\ I^\bullet_{X^\bullet} \arrow[r, "\overline{u^\bullet}"'] & I^\bullet_{Y^\bullet} \end{tikzcd}$$

ここで, $I_{X^\bullet}^\bullet, I_{Y^\bullet}^\bullet \in \mathcal{L}$ である. よって, 次の commutative diagram を得る.

$$
\begin{tikzcd}
& QF(X^\bullet) \arrow[rr, "QF(u^\bullet)"] \arrow[dl, "QF(s^\bullet)"'] \arrow[dd, "\eta_{X^\bullet}"] & & QF(Y^\bullet) \arrow[dl, "QF(t^\bullet)"] \arrow[dd, "\eta_{Y^\bullet}"] \\
QF(I_{X^\bullet}^\bullet) \arrow[rr, "QF(\overline{u^\bullet})"'] \arrow[dd, "\theta_{I_{X^\bullet}^\bullet}"'] & & QF(I_{Y^\bullet}^\bullet) \arrow[dd, "\theta_{I_{Y^\bullet}^\bullet}"] & \\
& GQ(X^\bullet) \arrow[rr, "GQ(u^\bullet)"] \arrow[dl, "GQ(s^\bullet)"'] & & GQ(Y^\bullet) \arrow[dl, "GQ(t^\bullet)"] \\
GQ(I_{X^\bullet}^\bullet) \arrow[rr, "GQ(\overline{u^\bullet})"'] & & GQ(I_{Y^\bullet}^\bullet) &
\end{tikzcd}
$$

上面は QF, 下面は GQ, 左側面は $\eta_{X^\bullet}$, 右側面は $\eta_{Y^\bullet}$, 前側面は θ による commutative diagram である. したがって, 後側面が commutative diagram になることがわかる. これは $\eta \in \mathrm{Hom}(QF, GQ)$ であることを示している.

よって, $\xi \in \mathrm{Hom}(QF, \overline{F}Q)$ で $F'\epsilon_Q = \xi_J$ となるものが存在する. このとき,

$$
\begin{aligned}
\eta_{QJ} \cdot F'\epsilon_Q &= \eta_{QJ} \cdot \xi_J \\
&= (\eta_Q \cdot \xi)_J
\end{aligned}
$$

となる. したがって, 上の同型が次で与えられることになる.

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(\overline{F}, G) & \simeq & \mathrm{Hom}(QF, GQ) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\eta & \longmapsto & \eta_Q \cdot \xi
\end{array}
$$

これは, $(\xi, \overline{F})$ が initial object であることを示している.

さらに, $I^\bullet \in \mathcal{L}$ に対して, $\epsilon_{Q(I^\bullet)}$ は iso. より, $\xi_{I^\bullet} = F'\epsilon_{Q(I^\bullet)}$ は iso. になる.

最後に, $X^\bullet \in K^*(\text{mod-}A)$ に対して, $I^\bullet \in \mathcal{L}$, $X^\bullet \Rightarrow I^\bullet$ に対して,

$$
\begin{aligned}
\overline{F}Q(X^\bullet) &\simeq \overline{F}Q(I^\bullet) \\
&= \overline{FJ}Q(I^\bullet) \\
&= F'Q(I^\bullet) \\
&= QFJ(I^\bullet)
\end{aligned}
$$

となるから, $H^n(\overline{F}Q(X^\bullet)) \simeq H^n(F(I^\bullet))$ を得る. ■

これらの dual も成り立ち, F の ”left derived functor” を定義することができる.

Def 2.2.33 exact functor $F : K^*(\text{mod-}A) \to K(\text{mod-}B)$ の <u>left derived functor</u> $\mathbf{L}F : D^*(\text{mod-}A) \to D(\text{mod-}B)$ とは, 次の category $\mathcal{D}$ の terminal object である. なお, terminal object については付録 A を参照のこと.

category $\mathcal{D}$:

- object : (G, ζ)
  exact functor $G : D^*(\text{mod-}A) \to D(\text{mod-}B)$, $\zeta \in \mathrm{Hom}(GQ, QF)$
- morphism $\eta : (G_1, \zeta_1) \to (G_2, \zeta_2)$
  $\eta \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$, 任意の $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet \in K^*(\text{mod-}A)$ に対して, 次の commutative diagram in $D(\text{mod-}B)$ をもつ.

$$\begin{tikzcd}
 & G_2(X^\bullet) \arrow[dr, "\zeta_2"] \arrow[dd, "G_2(f^\bullet)"] & \\
G_1(X^\bullet) \arrow[ur, "\eta"] \arrow[rr, "\zeta_1"'] \arrow[dd, "G_1(f^\bullet)"'] & & F(X^\bullet) \arrow[dd, "F(f^\bullet)"] \\
 & G_2(Y^\bullet) \arrow[dr, "\zeta_2"] & \\
G_1(X^\bullet) \arrow[ur, "\eta"] \arrow[rr, "\zeta_1"'] & & F(Y^\bullet)
\end{tikzcd}$$

側面は ζ_1, ζ_2, η による commutative diagram であり, 底面が morphism の定義による commutative diagram である.

Prop 2.2.34 exact functor $F : K^*(\text{mod-}A) \to K(\text{mod-}B)$ に対して, 次が成り立つ.

(1) F : acyclic $\mapsto$ acyclic $\Leftrightarrow$ exact functor $\overline{F} : D^*(\text{mod-}A) \to D(\text{mod-}A)$ が存在して, $\xi : \overline{F}Q \simeq QF$.

(2) (1) の条件を満たせば, $(\overline{F}, \xi)$ は F の left derived functor である.

Remark 2.2.35 $T : D^*(\text{mod-}A) \to D^*(\text{mod-}A)$ は $T : K^*(\text{mod-}A) \to K^*(\text{mod-}A)$ の left derived functor である.

Lemma 2.2.36 $K^*(\text{mod-}A)$ は次を満たす full triangulated subcategory $\mathcal{M}$ をもつとする.

$\mathcal{M}$: 任意の $X^\bullet \in K^*(\text{mod-}A)$ に対して, $P^\bullet \in \mathcal{M}$, $P^\bullet \Rightarrow X^\bullet$ が存在する.

このとき, 任意の $u^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet \in K^*(\text{mod-}A)$ と $s^\bullet : P^\bullet_{X^\bullet} \Rightarrow X^\bullet$, $P^\bullet_{X^\bullet} \in \mathcal{M}$ に対して, $P^\bullet_{Y^\bullet} \in \mathcal{M}$ が存在して, 次の commutative diagram をもつ.

$$\begin{tikzcd} P^\bullet_{X^\bullet} \arrow[r, "\overline{u^\bullet}"] \arrow[d, Rightarrow, "s^\bullet"'] & P^\bullet_{Y^\bullet} \arrow[d, Rightarrow, "t^\bullet"] \\ X^\bullet \arrow[r, "u^\bullet"'] & Y^\bullet \end{tikzcd}$$

Remark 2.2.37 各 $K^*(\text{mod-}A)$ に対して, non-trivial な $\mathcal{M}$ の例は次である.

$K^*(\text{mod-}A)$	$\mathcal{M}$
$K^-(\text{mod-}A)$	$K^-(\text{proj-}A)$
$K^+(\text{mod-}A)$	–
$K^{-,b}(\text{mod-}A)$	$K^{-,b}(\text{proj-}A)$
$K^{+,b}(\text{mod-}A)$	–
$K^b(\text{mod-}A)$	–
$K^-(\text{mod-}A)_{\text{f.p.d.}}$	$K^b(\text{proj-}A)$
$K^+(\text{mod-}A)_{\text{f.i.d.}}$	–

Prop 2.2.38 [Existence theorem] exact functor $F : K^*(\text{mod-}A) \to K(\text{mod-}B)$, $K^*(\text{mod-}A)$ は Lemma 2.2.36 のような full triangulated subcategory $\mathcal{M}$ をもつとする. また, $QF : \mathcal{M} \to D(\text{mod-}B)$ ($QF : K^*(\text{mod-}A) \to D(\text{mod-}B)$ の $\mathcal{M}$ への制限) は acyclic 上で 0 になると仮定する. このとき, F の left derived functor $(\mathbf{L}F, \xi)$ が存在して, 次を満たす.

(1) $P^\bullet \in \mathcal{M}$ に対して, $\xi_{P^\bullet} : \mathbf{R}F(Q(P^\bullet)) \to QF(P^\bullet)$ は iso. である.
(2) $X^\bullet \in K^*(\text{mod-}A)$, $P^\bullet \in \mathcal{M}$, $P^\bullet \Rightarrow X^\bullet$ ならば, $H^n(\mathbf{L}F(Q(X^\bullet))) \simeq H^n(F(P^\bullet))$ である.

そこで, right derived functor $\mathbf{R}\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, -)$ を作る. 以下, $X^\bullet \in C(\text{mod-}A)$, $B := \mathrm{End}_{C(\text{mod-}A)}(X^\bullet)$ とする. まず, $\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, -) : C(\text{mod-}A) \to C(\text{Mod-}B)$ であることに注意する.

Prop **2.2.39** exact functor $\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, -) : K(\text{mod-}A) \to K(\text{Mod-}B)$

proof. Lemma 2.2.14, Lemma 2.2.15 より. ■

Lemma **2.2.40** 次が成り立つ.

(1) $X^\bullet$ または, $I^\bullet \in K^+(\text{inj-}A)$ が $\mathcal{U}$ に属せば, $\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, I^\bullet) \in \mathcal{U}$

(2) $P^\bullet \in K^-(\text{proj-}A)$ または, $X^\bullet$ が $\mathcal{U}$ に属せば, $\mathrm{Hom}^\bullet(P^\bullet, X^\bullet) \in \mathcal{U}$

proof. (1)

- $X^\bullet \in \mathcal{U}$ のとき, Prop 2.2.16 より,

$$\begin{aligned} H^n(\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, I^\bullet)) &\simeq \mathrm{Hom}_{K(\text{mod-}A)}(X^\bullet, I^\bullet[n]) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{D(\text{mod-}A)}(X^\bullet, I^\bullet[n]) \\ &\simeq 0 \end{aligned}$$

- $I^\bullet \in \mathcal{U}$ のとき, $\mathcal{U}$-local の定義より, $\mathrm{Hom}_{K(\text{mod-}A)}(I^\bullet, I^\bullet) = 0$. よって, $I^\bullet = 0$ in $K(\text{mod-}A)$. よって, Prop 2.2.16 より.

(2) (1) の dual. ■

Prop **2.2.41** exact functor $\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, -) : K^+(\text{mod-}A) \to K(\text{Mod-}B)$ は right derived functor $\mathbf{R}\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, -) : D^+(\text{mod-}A) \to D(\text{Mod-}B)$ をもち, $I^\bullet \in K^+(\text{inj-}A)$ に対して, $\mathbf{R}\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, I^\bullet) \simeq \mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, I^\bullet)$ を満たす. 特に, $X^\bullet \in K^-(\text{mod-}A)$ ならば, $\mathbf{R}\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, -) : D^+(\text{mod-}A) \to D^+(\text{mod-}B)$ となる.

proof. Prop 2.2.32 の仮定を確認すればよい. まず, $\mathcal{L} := K^+(\text{inj-}A)$ とすればよい. さらにこのとき, $\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, -)$ の $\mathcal{L}$ への制限は, Lemma 2.2.40 より acyclic 上 0 になる. よって, $\mathbf{R}\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, -) : D^+(\text{mod-}A) \to D(\text{Mod-}B)$ が存在し, derived functor の作り方から, $\mathcal{L}$ 上で, $\mathbf{R}\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, -) = Q \cdot \mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, -)$ となる. (後半の主張について) $X^\bullet \in K^-(\text{mod-}A)$, $Y^\bullet \Rightarrow I^\bullet$, $I^\bullet \in K^+(\text{inj-}A)$ とすると, $\mathbf{R}\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet) \simeq \mathbf{R}\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, I^\bullet) \simeq \mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, I^\bullet) \in C^+(\text{mod-}B)$. ■

Prop **2.2.42** $Y^\bullet \in D^+(\text{mod-}A)$ に対して,

$$H^n(\mathbf{R}\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)) \simeq \mathrm{Ext}^n(X^\bullet, Y^\bullet)$$

proof. $I^\bullet \in K^+(\text{inj-}A)$, $Y^\bullet \Rightarrow I^\bullet$ とすると,

$$\begin{aligned} H^n(\mathbf{R}\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)) &\simeq H^n(\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, I^\bullet)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{K(\text{mod-}A)}(X^\bullet, I^\bullet[n]) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{D(\text{mod-}A)}(X^\bullet, I^\bullet[n]) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{D(\text{mod-}A)}(X^\bullet, Y^\bullet[n]) \\ &\simeq \mathrm{Ext}^n(X^\bullet, Y^\bullet) \end{aligned}$$

■

これらの dual である tensor で与えられる left derived functor $- \otimes^{\mathbf{L}}_A M^\bullet_B$ も同様に考えることができ, $\mathbf{R}\mathrm{Hom}^\bullet(-,-)$ と $- \otimes^{\mathbf{L}}_A -$ の adjoint 性も module の場合と同様に存在する (module のときの adjoint 性を用いて確認することができる).

2.2.4 Derived equivalence

次に, derived equivalence [bounded derived category が (triangulated category として) equivalent $D^b(\text{mod-}A) \simeq D^b(\text{mod-}B)$] について解説する. derived equivalent であることの判定は, Rickard の定理がとても重要である. そこでここでは, Rickard の定理を紹介し, ある例で実際に derived equivalent であることを確かめてみる. なお, Rickard の定理の証明は付録として書くことにする. 以下, B を finite dimensional k-algebra とする.

まずは, derived equivalence から得られることを簡単に紹介しておく.

Prop 2.2.43 [22] A と B が derived equivalent ならば, 次のことが成り立つ.

(1) A と B の simple module の個数が等しい.
(2) A と B の center が同型になる.
(3) 行列 $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z})$ が存在して, ${}^tM \cdot C(A) \cdot M = C(B)$ となる.

Prop 2.2.43 (3) の”M”はある complex から得られるのだが, その complex が derived equivalence について重要な役割を果たす.

Def 2.2.44 $P^\bullet \in K(\text{mod-}A)$ が <u>tilting complex</u> であるとは, 次を満たすときにいう.

(0) $P^\bullet \in K^b(\text{proj-}A)$
(1) $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P^\bullet, P^\bullet[n]) = 0 \ \ (n \neq 0)$
(2) add-$P^\bullet$ は $K^b(\text{proj-}A)$ を triangulated category として生成する.

Remark **2.2.45** (1) について：これは $P^\bullet$ 同士の Hyper ext $\mathrm{Ext}^n(P^\bullet, P^\bullet)$ が $n \neq 0$ で消えていることを意味している．(2) について：これは $P^\bullet$ から, 直和や直和因子, shift $[n]$, mapping cone (triangle) をとる操作を繰り返して, A が作れることを意味している．

この tilting complex が derived equivalence について重要な役割を果たすことになる．このことを述べているのが, 次の Rickard の定理 である．

Thm **2.2.46** [14] 次は同値である．

(1) A と B は derived equivalent である．
(2) $K^b(\text{proj-}A) \simeq K^b(\text{proj-}B)$ (as triangulated category)
(3) tilting complex $P^\bullet \in K^b(\text{proj-}A)$ が存在して, $B \simeq \mathrm{End}_{K^b(\text{proj-}A)}(P^\bullet)$ となる．

Remark **2.2.47** これは明らかに, Morita の定理の拡張になっている．したがって,

$$\text{Morita equivalent} \Longrightarrow \text{derived equivalent}$$

となる (tilting complex としては, progenerator をとればよい)．さらに, derived equivalence を与える functor は two-sided tilting complex を用いて, left derived functor で与えられることがわかっている (付録を参照).

したがって, derived equivalent であることを確かめるためには, tilting complex を作れればよい．しかし, tilting complex を作ることが非常に難しい．それでも, 上で述べたように, ”M”は tilting complex から得ることができ, さらに, ”M”は行列の計算から求めることができるため, tilting complex を (ある程度)『予想』することはできる[*29].

そこで, A と B が derived equivalent であるとき, それを与える tilting complex $P^\bullet$ から”M”を作る方法を解説する．

Prop **2.2.48** [5] $P^\bullet \in K^b(\text{proj-}A)$ を tilting complex, $P^\bullet = P_1^\bullet \oplus \cdots \oplus P_n^\bullet$ を $P^\bullet$ の直既約分解とし, $i \neq j$ のとき, $P_i^\bullet \not\simeq P_j^\bullet$ とする．また, $B := \mathrm{End}_{K^b(\text{proj-}A)}(P^\bullet)$ とおく．このとき,

$$\dim \mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P_i^\bullet, P_j^\bullet) = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \mathrm{Hom}_A(P_i^p, P_j^q)$$

となる．

[*29] ”M”は tilting complex に光を当てたときの『影』のようなものである．この ”M” から tilting complex を予想することは, 物体の影からその物体自体を予想できる程度でしかない．例えば, simple mod. の個数が多い場合などは予想することも難しい．

付録 B を見てもわかるように, derived equivalence により, $P_i^\bullet$ たちが B の projective module と対応する. よって, Prop 2.2.48 から B の Cartan matrix $C(B)$ を計算できることになる. このことから, Prop 2.2.43 (3) を証明することができ, ”M”の作り方がわかる.

proof. of Prop 2.2.43 (3) A と B は derived equivalent であるとする. B は basic と仮定してよいから, Prop 2.2.48 と同じように $P^\bullet$ をとり, 直既約分解する. このとき, $P_j^p \in$ proj-A より, $P_j^p = \oplus_i\ n_j^p(i)P(i)$ と書くことができる. そこで, M を次のように定義する.

$$M_{ij} := \sum_p (-1)^p n_j^p(i)$$

また, $C(A)_{ij} := a_{ij} = \dim \mathrm{Hom}_A(P(i), P(j))$ とする. そこで, 実際に計算してみると,

$$\begin{aligned}
({}^tM \cdot C(A) \cdot M)_{ij} &= \sum_\ell \left(\sum_p (-1)^p n_i^p(\ell) \right) \left(\sum_k a_{\ell k} \cdot \sum_q (-1)^q n_j^q(k) \right) \\
&= \sum_{p,q,\ell,k} (-1)^{p+q} n_i^p(\ell) n_j^q(k) a_{\ell k} \\
&= \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \dim \mathrm{Hom}_A(\oplus_\ell\ n_i^p(\ell)P(\ell), \oplus_k\ n_j^q(k)P(k)) \\
&= \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \dim \mathrm{Hom}_A(P_i^p, P_j^q) \\
&= \dim \mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P_i^\bullet, P_j^\bullet) \\
&= C(B)_{ij}
\end{aligned}$$

を得る. ■

Example 2.2.49 Example 2.1.9 の (2) と (3) の alg. (それぞれ A, B とおく) が derived equivalent であることを示してみよう. まず, ”M”を計算してみると,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

であることがわかる. この”M”はもちろん一意的ではないが, それは derived equivalence を導く tilting complex が一意的ではないことからくる. 今の場合, ”M”は ± を除いて上のような行列しかない. この”±”は tilting complex を shift しても tilting complex であることからくる. よって, 今の場合は本質的に tilting complex は (存在すれば) 一つしかない. そこ

で, tilting complex からの”M”の作り方を見て, 次のような complex を作ってみる.

$$P^\bullet := \bigoplus \begin{cases} P_1^\bullet := [\ 0 \longrightarrow \overset{0th}{P(1)} \xrightarrow{b} P(2) \longrightarrow 0\ ] \\ P_2^\bullet := [\ 0 \longrightarrow P(1) \longrightarrow 0\ ] \end{cases}$$

これは明らかに complex になっているが, tilting complex になっていることを確かめる. tilting complex の定義 (0) は明らかだから, (1)(2) を確かめればよい.

(1) $|n| > 1$ ならば, 明らかだから ± 1 の shift を計算する.

- shift [1] について. これは $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P_1^\bullet, P_1^\bullet[1])$, $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P_2^\bullet, P_1^\bullet[1])$ を計算すればよいが, $\dim \mathrm{Hom}_A(P(1), P(2)) = 1$ であることから簡単に確認できる.
- shift [−1] について. これは $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P_1^\bullet, P_1^\bullet[-1])$, $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P_1^\bullet, P_2^\bullet[-1])$ を計算すればよいが, $\mathrm{Hom}_A(P(2), P(1)) = 0$ であることから明らかである.

(2) $P^\bullet$ の直和や直和因子, shift, mapping cone から A_A が作れることを確かめる. つまり, $P(1)$, $P(2)$ が作れればよい. まず, $P(1)$ は $P^\bullet$ の直和因子だから作れる. また, $P(2)$ は,

$$\begin{tikzcd} P_1^\bullet : \arrow[d] & P(1) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "1"'] & P(2) \arrow[d] \\ P_2^\bullet : & P(1) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

の mapping cone により得ることができる.

したがって, $P^\bullet$ は tilting complex であることが確かめられた. そこで, $B \simeq \mathrm{End}_{K^b(\text{proj-}A)}(P^\bullet)$ であることを示す. まず, $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P_i^\bullet, P_j^\bullet)$ を計算してみる.

(I) $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P_1^\bullet, P_1^\bullet)$

(i)
$$\begin{tikzcd} P(1) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "0"'] & P(2) \arrow[d, "0"] \\ P(1) \arrow[r, "b"'] & P(2) \end{tikzcd}$$

(ii)
$$\begin{tikzcd} P(1) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "0"'] & P(2) \arrow[d, "c"] \\ P(1) \arrow[r, "b"'] & P(2) \end{tikzcd}$$

(iii)
$$\begin{tikzcd} P(1) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & P(2) \arrow[d, "0"] \\ P(1) \arrow[r, "b"'] & P(2) \end{tikzcd}$$

(iv)
$$\begin{tikzcd} P(1) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & P(2) \arrow[d, "c"] \\ P(1) \arrow[r, "b"'] & P(2) \end{tikzcd}$$

(v)
$$\begin{tikzcd} P(1) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "1"'] & P(2) \arrow[d, "1"] \\ P(1) \arrow[r, "b"'] & P(2) \end{tikzcd}$$

(II) $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P_1^\bullet, P_2^\bullet)$

(i) $$\begin{tikzcd} P(1) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "0"'] & P(2) \arrow[d] \\ P(1) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
(ii) $$\begin{tikzcd} P(1) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & P(2) \arrow[d] \\ P(1) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
(iii) $$\begin{tikzcd} P(1) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "1"'] & P(2) \arrow[d] \\ P(1) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(III) $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P_2^\bullet, P_1^\bullet)$

(i) $$\begin{tikzcd} P(1) \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & 0 \arrow[d] \\ P(1) \arrow[r, "b"'] & P(2) \end{tikzcd}$$
(ii) $$\begin{tikzcd} P(1) \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & 0 \arrow[d] \\ P(1) \arrow[r, "b"'] & P(2) \end{tikzcd}$$

(IV) $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P_2^\bullet, P_2^\bullet)$

(i) $$\begin{tikzcd} P(1) \arrow[d, "0"'] \\ P(1) \end{tikzcd}$$
(ii) $$\begin{tikzcd} P(1) \arrow[d, "a"'] \\ P(1) \end{tikzcd}$$
(iii) $$\begin{tikzcd} P(1) \arrow[d, "1"'] \\ P(1) \end{tikzcd}$$

これらのうち, $\mathrm{End}_{K^b(\text{proj-}A)}(P^\bullet)$ の basis になるものは, (I)(ii)(iii)(v), (II)(ii)(iii), (III)(ii), (IV)(ii)(iii) で, さらに, radical に含まれるものは, (I)(ii)(iii), (II)(ii)(iii), (III)(ii), (IV)(ii) である.

また, (I)(iii), (IV)(ii) は (II)(iii) と (III)(ii) の合成, (II)(ii) は (II)(iii) と (IV)(ii) の合成で作られる. よって, $\mathrm{End}_{K^b(\text{proj-}A)}(P^\bullet)$ の quiver の arrow は, (I)(ii) と (II)(iii), (III)(ii) から得られる. そこで, $x =$ (I)(ii), $y =$ (III)(ii), $z =$ (II)(iii) とおく. このとき, $x^2 = 0$, $xy = 0$, $zx = 0$, $yzy = 0$ であることが簡単に確かめられる.

したがって, $B \simeq \mathrm{End}_{K^b(\text{proj-}A)}(P^\bullet)$ であることがわかる. ここで, 注意として, $\mathrm{End}_{K^b(\text{proj-}A)}(P^\bullet)$ の basis を選ぶとき, (I)(ii) もしくは (I)(iii) の代わりに, (I)(iv) を選らんでも同じようにできるが, この場合の path algebra としては, Exampla 2.1.9(3)′ を得る.

2 つの alg. A, B が与えられたとき, それらをつなぐ tilting complex を作ることは難しい. しかし, (A だけを見て) A 上の tilting complex を作る方法はいくつか知られている. そのような tilting complex により A と derived equivalent である alg. を作ることを何回か繰り返して得られた中に, B と derived equivalent (もしくは, 同型, Morita equivalent) であるような algebra が現れれば, A と B が derived equivalent であることが確かめられる[*30]. この方

[*30] この方法でも, 最終的に, B とつながること (同型, Morita equivalent, derived equivalent) を確かめ

法を 奥山の方法 [12, 17] という. この方法について詳しくは, 2.3 で述べることにする.

そこで, A 上の tilting complex を作る方法を一つ紹介しよう.

Prop 2.2.50 [21] $X_A \in \text{mod-}A$, $\cdots \to P_1 \xrightarrow{\varphi} P_0 \xrightarrow{\pi} X \to 0$ を X の projective resolusion とする. また, $Q_A \in \text{proj-}A$ を $P_0 \oplus Q$ が A 上の progenerator であるようにとる. さらに, 次を仮定する.

(1) $P_1 \mid Q$ (2) $\mathrm{Hom}_A(Q, X) = 0 = \mathrm{Hom}_A(X, Q)$

このとき,

$$P^\bullet := \bigoplus \begin{cases} P_1^\bullet := [\ 0 \longrightarrow \overset{0th}{P_1} \xrightarrow{\varphi} P_0 \longrightarrow 0\ ] \\ P_2^\bullet := [\ 0 \longrightarrow Q \longrightarrow 0\ ] \end{cases}$$

は tilting complex である.

Remark 2.2.51

- Example 2.2.49 はこのような tilting complex になっている. 実際, $X := \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ とすればよい.
- $\mathrm{Ext}_A^1(X, X) = 0$ である. 実際, 仮定より, $\mathrm{Hom}_A(\Omega(X), X) = 0$ となる.

proof. tilting complex の定義 (0) は明らかだから, (1)(2) を示す.

(1) $|n| > 1$ ならば, 明らかだから ± 1 の shift を計算する.

- shift [1] について. これは $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P_1^\bullet, P_1^\bullet[1])$, $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P_2^\bullet, P_1^\bullet[1])$ を計算すればよい.

$$\begin{tikzcd} P_1^\bullet : \arrow[d] & & P_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"] & P_0 \\ P_1^\bullet : & P_1 \arrow[r, "\varphi"'] & P_0 & \end{tikzcd}$$

に対して, 仮定より, $\pi f = 0$ となり, P_1 は projective mod. より, f は φ を通過する. したがって, f は 0 と homotopic であることがわかる. $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P_2^\bullet, P_1^\bullet[1])$ についても同様.

なければいけないが, A, B が self-injective alg., A と B は Morita type の stable equivalent ならば, Linckelmann の定理 を使うことでこれを確かめることができる.

- shift $[-1]$ について．これは $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P_1^\bullet, P_1^\bullet[-1])$, $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P_1^\bullet, P_2^\bullet[-1])$ を計算すればよい．

$$\begin{tikzcd} P_1^\bullet : \arrow[d] & P_1 \arrow[r, "\varphi"] & P_0 \arrow[d, "f"] & \\ P_1^\bullet : & & P_1 \arrow[r, "\varphi"'] & P_0 \end{tikzcd}$$

  に対して, morphism の定義から $f\varphi = 0$ であるから, f は X を通過する．しかし, 仮定より, $\mathrm{Hom}_A(X, P_1) =$ だから, $f = 0$ を得る．$\mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P_1^\bullet, P_2^\bullet[-1])$ についても同様.

(2) 仮定 (1) より, P_1 は add-$P^\bullet$ で生成される triangulated cat. に含まれる．よって, $P_1^\bullet$ と P_1 の mapping cone により, P_0 は add-$P^\bullet$ で生成される triangulated cat. に含まれる．したがって, $P_0 \oplus Q$ は add-$P^\bullet$ で生成される triangulated cat. に含まれ, 仮定より, これは progenerator だから主張を得る．

■

2.3 Stable module category

ここでは, stable module category を定義し, stable module category 間の equivalence [stable equivalence, Morita type の stable equivalence] について解説する．stable module category はいつでも定義できるが, 一般に triangulated category にならない．しかし, Morita type の stable equivalence から Morita equivalence を調べることができるなど, 重要な役割をもつ category である．

2.3.1 Definition

Def 2.3.1 $f : X \to Y \in$ mod-A に対して, f が projective homomorphism であるとは, $P \in$ proj-A が存在して, f が P を通過するときにいう．

Prop 2.3.2 $f \in \mathrm{Hom}_A(X, Y)$ が projective homomorphism ならば, f は Y の projective cover $P(Y)$ を通過する．さらに, f が epimorphism ならば, $P(Y) \mid X$ となる．

proof. 前半は projective module の定義から明らか．また後半は, projective homo. の定義と Nakayama's lemma から epi. $X \twoheadrightarrow P(Y)$ を得ることからわかる． ■

Def 2.3.3 stable module category $\underline{\mathrm{mod}}$-A は, object は mod-A と同じで, morphism は

$\underline{\mathrm{Hom}}_A(X,Y) := \mathrm{Hom}_A(X,Y)/(\text{projective homomorphism})$ でとる．つまり, $\underline{\text{mod}}$-A 内では projective homo. = 0 と見ていることになり, $P \in$ proj-A であることと $P = 0$ in $\underline{\text{mod}}$-A であることは同値である．よって, $X_A \simeq X_0 \oplus$ (projective module) は $X \simeq X_0$ in $\underline{\text{mod}}$-A となる．したがって, $\underline{\text{mod}}$-A 内では $X \in$ mod-A は projective-free*31 としてよい．

2.3.2 Stable module category

上でも述べたように, $\underline{\text{mod}}$-A は一般に triangulated category にならない (もちろん, abelian category にもならない). では, いつ triangulated category になるのかを調べてみよう．

<u>Def</u> 2.3.4 (1) A : self-injective algebra $\overset{def}{\Longleftrightarrow} A_A \in$ inj-A $\Leftrightarrow$ proj-A = inj-A

(2) A : Frobenius algebra $\overset{def}{\Longleftrightarrow} A_A \simeq D(A)_A \Leftrightarrow {}_AA \simeq {}_AD(A)$

(3) A : symmetric algebra $\overset{def}{\Longleftrightarrow} {}_AA_A \simeq {}_AD(A)_A$

明らかに,

$$\text{symmetric} \Longrightarrow \text{Frobenius} \Longrightarrow \text{self-injective} = \text{quasi-Frobenius}$$

が成り立ち, A が basic ならば, self-injective ⇒ Frobenius となる．また, A が self-injective ならば, simple module S_A に対して, $\mathrm{soc}(P(S))$ は simple module となり, さらに, A が symmetric ならば, $\mathrm{soc}(P(S)) \simeq S$ となる．

<u>Prop</u> 2.3.5 [5] A が self-injective algebra ならば, $\underline{\text{mod}}$-A は triangulated category になる．

<u>proof.</u> $X \in$ mod-A に対して, shift [1] を $X[1] := \Omega^{-1}(X)$ で定義する．このとき, exact 間の commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & I(X) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \Omega^{-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega(\Omega^{-1}(X)) \arrow[r] & P(\Omega^{-1}(X)) \arrow[r] & \Omega^{-1}(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

に対して (A が self-inj. より, $I(X)$ は proj. だから β を得る), Nakayama's lemma より, β は epi. で, $P(\Omega^{-1}(X))$ が proj. であることから, β は split epi. である．ゆえに, β の kernel は inj. である．よって, Snake lemma より, α も epi. であるが, また Snake lemma から α の kernel は inj. となり, α は split epi. であることがわかる．したがって, $X \simeq$

*31 $X \in$ mod-A が <u>projective-free</u> であるとは, X の直和因子の projective module が 0 になることをいう．

$\Omega(\Omega^{-1}(X)) \oplus$ (injective) となるが, A が self-inj. より, $X \simeq \Omega(\Omega^{-1}(X))$ in $\underline{\mathrm{mod}}$-A を得る. さらに, exact 間の commutative diagram

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & I(\Omega(X)) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & \Omega^{-1}(\Omega(X)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega(X) \arrow[r] & P(X) \arrow[r] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

に対して (A が self-inj. より, $P(X)$ は inj. だから γ を得る), 同様に (先ほどの dual), $X \simeq \Omega^{-1}(\Omega(X))$ in $\underline{\mathrm{mod}}$-A であることがわかる. よって, [1] は auto-functor である.

次に, $f \in \mathrm{Hom}_A(X, Y)$ に対して, exact 間の commutative diagram

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & I(X) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^{-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r, "h"'] & \Omega^{-1}(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

に対して, $Z := C(f)$ とおき, triangle : $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ を定義する. このとき, (TR2)〜(TR4) を示す.

(TR2) $f \in \mathrm{Hom}_A(X, Y)$ に対して, exact 間の commutative diagram

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & I(X) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^{-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "g"'] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "h"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & \Omega^{-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\Omega^{-1}(f)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & I(Y) \arrow[r] & \Omega^{-1}(Y) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

より, exact 間の commutative diagram

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & I(Y) \arrow[r] \arrow[d, "{{}^t[0,1]}"] & \Omega^{-1}(Y) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "{{}^t[h,-]}"'] & \Omega^{-1}(X) \oplus I(Y) \arrow[r, "{[-\Omega^{-1}(f),-]}"'] & \Omega^{-1}(Y) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

を得る. よって, A は self-inj. より, triangle : $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1]$ であることがわかる. 逆に, triangle : $Z[-1] \xrightarrow{-h[-1]} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ であることを示す. ここで, X, Z

は projective-free (すなわち, $X \simeq \Omega(\Omega^{-1}(X)) \simeq \Omega^{-1}(\Omega(X))$) としてよい. このとき, exact 間の commutative diagram

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega(Z) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "-\Omega(h)"'] & P(Z) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "-h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & I(X) \arrow[r] \arrow[d, "j"] & \Omega^{-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r, "h"'] & \Omega^{-1}(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

に対して, kernel の定義より, $\psi : P(Z) \to Y$ が存在して, $\pi + j\varphi = g\psi$ を満たす. よって, g が mono. より, exact 間の commutative

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega(Z) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "-\Omega(h)"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & P(Z) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "{}^t[\psi, \varphi]"] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "{}^t[f, i]"'] & Y \oplus I(X) \arrow[r, "{[g, -j]}"'] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

を得る. よって, A が self-inj. より, triangle : $Z[-1] \overset{-h[-1]}{\to} X \overset{f}{\to} Y \overset{g}{\to} Z$ を得る.

(TR3) $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[d, "v"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd}$ に対して, diagram

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[rr] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, "u"] & & I(X) \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & \Omega^{-1}(X) \arrow[dl, equal] \arrow[dd, "\Omega^{-1}(f)"] \\
Y \arrow[rr] \arrow[dd, "v"'] & & Z \arrow[rr] & & \Omega^{-1}(X) \arrow[dd] & \\
 & X' \arrow[rr] \arrow[dl, "f'"'] & & I(X') \arrow[rr] \arrow[dl] & & \Omega^{-1}(X') \arrow[dl, equal] \\
Y' \arrow[rr] & & Z' \arrow[rr] & & \Omega^{-1}(X') &
\end{tikzcd}
$$

に対して, PO より,

$$\begin{tikzcd}
 & & I(X) \arrow[dl] \arrow[dd] \\
Y \arrow[r] \arrow[dd, "v"'] \arrow[ddr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z \arrow[dd, "{}^{\exists}w"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
 & & I(X') \arrow[dl] \\
Y' \arrow[r] & Z' &
\end{tikzcd}$$

を得ることから, exact 間の commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"] & \Omega^{-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "{}^{\exists}\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Omega^{-1}(X') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

を得るが, $\Omega(f)$ の取り方から $\varphi = \Omega(f)$ となる. したがって, triangle 間の commutative diagram を得る.

(TR4) $f : X \to Y, g : Y \to Z$ に対して, 次の commutative diagram を考える.

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[rr] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, equals] & & I(X) \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & \Omega^{-1}(X) \arrow[dl, equals] \arrow[dd, equals] \\
Y \arrow[rr] \arrow[dd, "g"'] & & C(f) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \Omega^{-1}(X) \arrow[dd, equals] & \\
 & X \arrow[rr] \arrow[dl, "gf"'] \arrow[dd, "f"] & & I(X) \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & \Omega^{-1}(X) \arrow[dl, equals] \arrow[dd] \\
Z \arrow[rr] \arrow[dd, equals] & & C(gf) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \Omega^{-1}(X) \arrow[dd] & \\
 & Y \arrow[rr] \arrow[dl, "g"'] \arrow[dd] & & I(Y) \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & \Omega^{-1}(Y) \arrow[dl, equals] \arrow[dd] \\
Z \arrow[rr] \arrow[dd] & & C(g) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \Omega^{-1}(Y) \arrow[dd] & \\
 & C(f) \arrow[rr] \arrow[dl] & & I(C(f)) \arrow[rr] \arrow[dl] & & \Omega^{-1}(C(f)) \arrow[dl, equals] \\
C(gf) \arrow[rr] & & W \arrow[rr] & & \Omega^{-1}(C(f)) &
\end{tikzcd}
$$

それぞれの段は PO diagram である. そこで, $W \simeq C(g)$ in $\underline{\mathrm{mod}}$-A であることを示せばよい. しかし, 3 段目と 4 段目の PO より, exact 間の commutative diagram

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \oplus I(Y) \arrow[r] \arrow[d] & C(g) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C(f) \arrow[r] & C(gf) \oplus I(C(f)) \arrow[r] & W \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

が存在するが, mono. $Y \hookrightarrow C(f)$, $Z \hookrightarrow C(gf)$, $I(Y) \hookrightarrow I(C(f))$ であり, さらに,

$Y \to C(f)$ と $Z \to C(gf)$ の cokernel は一致することから, Snake lemma を使い,

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] \arrow[dddll, dotted, to path={-- ([xshift=4em]\tikztostart.east) -- ([xshift=-8em]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] & \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \oplus I(Y) \arrow[r] \arrow[d] & C(g) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C(f) \arrow[r] \arrow[d] & C(gf) \oplus I(C(f)) \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \Omega^{-1}(X) \arrow[r, dotted] & \Omega^{-1}(X) \oplus I \arrow[r, dotted] & I \arrow[r, dotted] & 0
\end{tikzcd}$$

を得る. よって, A は self-inj. より I は proj. だから, $W \simeq C(g) \oplus I$ となり, $W \simeq C(g)$ in $\underline{\mathrm{mod}}\text{-}A$ であることがわかる.

■

<u>**Remark**</u> **2.3.6** A は self-inj. とする. 上で示したように, $X \in \mathrm{mod}\text{-}A$ は $X \simeq \Omega(\Omega^{-1}(X)) \oplus (\mathrm{proj.}) \simeq \Omega^{-1}(\Omega(X)) \oplus (\mathrm{proj.})$ と分解でき, X を proj.-free とすると, $I(X) \simeq P(\Omega^{-1}(X))$, $P(X) \simeq I(\Omega(X))$ となる. よって, X が proj.-free ならば, ($X \subseteq \mathrm{rad}\, I(X)$ より) $X \mathrm{soc}\, A = 0$ となる. 逆に, $X \mathrm{soc}\, A = 0$ ならば, X は proj.-free である.

次に, derived category と stable module category を比較する. Rickard により, 次のことが示された.

<u>**Thm**</u> **2.3.7** [13] A を self-injective algebra とする. このとき, triangulated category として,

$$D^b(\mathrm{mod}\text{-}A)/K^b(\mathrm{proj}\text{-}A) \simeq \underline{\mathrm{mod}}\text{-}A$$

となる.

<u>**Remark**</u> **2.3.8** 一般には, 上の 2 つの category は一致しない. 例えば, non-semisimple gl.dim $< \infty$ な algebra は一致していない. 実際, 左辺は "0" になるが, 右辺は non-zero である.

<u>**Def**</u> **2.3.9** $T_A \in \mathrm{mod}\text{-}A$ とする.

(1) $f : X \to Y \in \mathrm{mod}\text{-}A$ が <u>left T-approximation</u> であるとは, $Y \in \mathrm{add}\text{-}T$, epi $\mathrm{Hom}_A(f, T) : \mathrm{Hom}_A(Y, T) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_A(X, T)$ となるときにいう.

(2) $f : X \to Y \in \text{mod-}A$ が right T-approximation であるとは, $X \in \text{add-}T$, epi $\mathrm{Hom}_A(T, f) : \mathrm{Hom}_A(T, X) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_A(T, Y)$ となるときにいう.

(3) $X \in \text{mod-}A$ が left T-dominant resolusion をもつとは,

$$\text{exact} : 0 \longrightarrow X \longrightarrow T_0 \xrightarrow{f_0} T_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} T_n$$

が存在して, $T_i \in \text{add-}T$, $X_i := \mathrm{Ker}\, f_i$ に対して, $X_i \to T_i$ が left T-approximation になるときにいう.

(4) $X \in \text{mod-}A$ が right T-dominant resolusion をもつとは,

$$\text{exact} : T_n \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \longrightarrow T_1 \xrightarrow{f_0} T_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

が存在して, $T_i \in \text{add-}T$, $X_i := \mathrm{Cok}\, f_i$ に対して, $T_i \to X_i$ が right T-approximation になるときにいう.

例えば, $T_A = D(A)_A$ ならば, inj. への mono. は left T-approximation であり, 任意の module は injective hull をとることで, left T-dominant resolusion をもつ. また, $T_A := A_A$ ならば, proj. からの epi. は right T-approximation であり, 任意の module は projective cover をとることで, right T-dominant resolusion をもつ.

さらに, mod-A の 2 つの full subcategory を定義する.

$$\mathcal{D}(T) := \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_A^{n>0}(-, T) \cap \left\{ X \in \text{mod-}A \,\middle|\, X \text{ は left } T\text{-dominant resolusion をもち, その長さは無限} \right\}$$

$$\mathcal{C}(T) := \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_A^{n>0}(T, -) \cap \left\{ X \in \text{mod-}A \,\middle|\, X \text{ は right } T\text{-dominant resolusion をもち, その長さは無限} \right\}$$

例えば, $T_A = D(A)_A$ ならば, $\mathcal{D}(T) = \text{mod-}A$, $T_A := A_A$ ならば, $\mathcal{C}(T) = \text{mod-}A$ となる.

Lemma 2.3.10 $T \in \text{mod-}A$ は self-orthogonal とする. よって, fully faithful functor $K^b(\text{add-}T) \to D^b(\text{mod-}A)$ が存在する. このとき, $X, Y \in \text{mod-}A$ を (1) または (2) のようにとれば,

$$\mathrm{Hom}_A(X, Y)/(T \text{ を通過する}) \simeq \mathrm{Hom}_{D^b(\text{mod-}A)/K^b(\text{add-}T)}(X, Y)$$

となる.

(1) $X \in \mathcal{D}(T)$, $Y \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_A^{n>0}(T, -)$ (2) $X \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_A^{n>0}(-, T)$, $Y \in \mathcal{C}(T)$

proof. まず, $T^\bullet \in K^b(\text{add-}T)$, $n \gg 0$ に対して,

- $X \in \operatorname{Ker}\operatorname{Ext}_A^{n>0}(-,T)$ ならば, $\operatorname{Hom}_{D^b(\text{mod-}A)}(X, T^\bullet[n]) = 0$
- $X \in \operatorname{Ker}\operatorname{Ext}_A^{n>0}(T,-)$ ならば, $\operatorname{Hom}_{D^b(\text{mod-}A)}(T^\bullet, X[n]) = 0$

となることに注意する ($T^\bullet$ の長さによる induction).

(1) のときを示す. epi. を示す. $D^b(\text{mod-}A)/K^b(\text{add-}T)$ 内の morphism は, $D^b(\text{mod-}A)$ 内で
$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, Rightarrow, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$
となっている. ここで, $s : Z^\bullet \Rightarrow X$ は $D^b(\text{mod-}A)/K^b(\text{add-}T)$ 内では iso. で, $C(s) \in K^b(\text{add-}T)$ である. また, $X \in \mathcal{D}(T)$ より, left T-dominant resolusion

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\epsilon} T_0 \xrightarrow{f_0} T_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \longrightarrow T_n \xrightarrow{f_n} \cdots$$

が存在して, $X_i := \operatorname{Ker} f_i$ とおく. このとき, $\operatorname{Ext}_A^{n>0}(X_i, T) = 0$ である. triangle : $Z^\bullet \overset{s}{\Rightarrow} X \to C(s) \to Z^\bullet[1]$ に $\operatorname{Hom}_{D^b(\text{mod-}A)}(X_n[-n-1], -)$ を apply して, exact

$$\operatorname{Hom}_{D^b(\text{mod-}A)}(X_n[-n-1], Z^\bullet) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{D^b(\text{mod-}A)}(X_n[-n-1], X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{D^b(\text{mod-}A)}(X_n[-n-1], C(s))$$

を得るが, $C(s) \in K^b(\text{add-}T)$, $X_n \in \operatorname{Ker}\operatorname{Ext}_A^{n>0}(-,T)$ より, $\operatorname{Hom}_{D^b(\text{mod-}A)}(X_n[-n-1], C(s)) = 0$ である. よって, 自然な $X_n[-n-1] \overset{s'}{\Rightarrow} X$ (ext.) に対して,
$$\begin{tikzcd} & X_n[-n-1] \arrow[dl, "{}^\exists h"'] \arrow[dr, Rightarrow, "s'"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ Z^\bullet \arrow[rr, Rightarrow, "s"'] & \, & X \end{tikzcd}$$
を得る.

また, triangle : $T^\bullet[-1] \to X_n[-n-1] \overset{s'}{\Rightarrow} X \overset{\epsilon}{\to} T^\bullet$ に $\operatorname{Hom}_{D^b(\text{mod-}A)}(-, Y)$ を apply して, exact

$$\operatorname{Hom}_{D^b(\text{mod-}A)}(X, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{D^b(\text{mod-}A)}(X_n[-n-1], Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{D^b(\text{mod-}A)}(T^\bullet[-1], Y)$$

を得るが, $T^\bullet \in K^b(\text{add-}T)$, $Y \in \operatorname{Ker}\operatorname{Ext}_A^{n>0}(T,-)$ より, $\operatorname{Hom}_{D^b(\text{mod-}A)}(T^\bullet[-1], Y) = 0$ である. したがって,
$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "{}^\exists g"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ X_n[-n-1] \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[rr, "fh"'] & \, & Y \end{tikzcd}$$
を得る. 次に, mono. を示す. $f : X \to Y$ を $D^b(\text{mod-}A)/K^b(\text{add-}T)$ で 0 とする. このとき, f はある $K^b(\text{add-}T)$ の object $S^\bullet$ を ($D^b(\text{mod-}A)$ 内で) 通過する. 上と同じ議論で, 次のような commutative diagram in

$D^b(\text{mod-}A)$ を得る.

$$\begin{tikzcd}
 & & & S^\bullet \arrow[dr, "b"] & \\
X_{-n}[-n-1] \arrow[rr, Rightarrow, "s'"] \arrow[dr] & & X \arrow[ur, "a"] \arrow[rr, "f"'] & & Y \\
 & Z^\bullet \arrow[ur, Rightarrow] & & &
\end{tikzcd}$$

ここで, $Z^\bullet := C(a)[-1]$ である. このとき, $fs' = 0$ より, f は ϵ を通過する. よって, 次のような commutative diagram in $D^b(\text{mod-}A)$ をもつことになる.

$$\begin{tikzcd}
 & T^\bullet \arrow[dr, "\delta"] & \\
X \arrow[ur, "\epsilon"] \arrow[rr, "f"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

そこで, triangle : $T_0[-1] \to T_1^\bullet[-1] \to T^\bullet \to T_0$ に $\mathrm{Hom}_{D^b(\text{mod-}A)}(-, Y)$ を apply して, exact

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\text{mod-}A)}(T_0, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D^b(\text{mod-}A)}(T^\bullet, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D^b(\text{mod-}A)}(T_1^\bullet[-1], Y)$$

を得るが, $\mathrm{Hom}_{D^b(\text{mod-}A)}(T_1^\bullet[-1], Y) = 0$ より, 次の commutative daigram in $D^b(\text{mod-}A)$ をもつ.

$$\begin{tikzcd}
 & T^\bullet \arrow[r] \arrow[dr, "\delta"] & T_0 \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[ur, "\epsilon"] \arrow[r, "f"'] & Y &
\end{tikzcd}$$

よって, f は T_0 を通過するから, mono. であることがわかる.

(2) はその dual. ■

<u>proof.</u> of Thm 2.3.7. $F : \underline{\text{mod}}\text{-}A \to D^b(\text{mod-}A) \to D^b(\text{mod-}A)/K^b(\text{proj-}A)$ とする. $T_A := A_A$ でとり, A は self-inj. より, $\mathcal{D}(T) \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_A^{n>0}(T, -) = \text{mod-}A$ である. したがって, Lemma 2.3.10 より, F は full faithful である.

次に, F が exact であることを示す. $X \in \text{mod-}A$ に対して, exact : $0 \to X \to I(X) \to \Omega^{-1}(X) \to 0$ より, triangle : $X \to I(X) \to \Omega^{-1}(X) \to X[1]$ で, A は self-inj. より, $\Omega^{-1}(X) \simeq X[1]$ in $D^b(\text{mod-}A)/K^b(\text{proj-}A)$ となる. また, $X \to Y$ に対して, exact : $0 \to X \to Y \oplus I(X) \to$

$Z \to 0$ より, triangle : $X \to Y \oplus I(X) \to Z \to X[1]$ で, A は self-inj. より, $I(X) = 0$ in $D^b(\text{mod-}A)/K^b(\text{proj-}A)$ となるから主張を得る.

最後に, object 間の全射を示す. $X^\bullet \in K^{-,b}(\text{proj-}A)$ に対して, $X^i = 0$ $(i > 0)$, $H^i(X^\bullet) = 0$ $(i < n)$ としてよい. このとき, $Y^\bullet : 0 \to \operatorname{Cok} d^{n-1} \to X^{n+1} \to X^{n+2} \to \cdots \to X^0 \to 0$ は $X^\bullet$ と $D^b(\text{mod-}A)$ 内で iso. である. さらに, $Y^\bullet \to \operatorname{Cok} d^{n-1}[-n]$ の mapping cone は $K^b(\text{proj-}A)$ に属すから $Y^\bullet \simeq \operatorname{Cok} d^{n-1}[-n]$ in $D^b(\text{mod-}A)/K^b(\text{proj-}A)$ となる. したがって, $F(\operatorname{Cok} d^{n-1}[-n]) \simeq Y^\bullet \simeq X^\bullet$ in $D^b(\text{mod-}A)/K^b(\text{proj-}A)$ を得る. ■

2.3.3 Stable equivalence

次に, stable equivalence [stable module category が (additive categroy として) equivalent $\underline{\text{mod}}\text{-}A \simeq \underline{\text{mod}}\text{-}B$][*32] について解説する. 特に, Morita type の stable equivalence について述べる. ここでは, 次の 2 つのことを主な目標とする.

(1) Linckelmann の定理 (2) derived equivalence と stable equivalence の関係.

${}_AM_B$, ${}_BN_A$ が次を満たすとする.

(1) ${}_AM$, M_B は projective, ${}_BN$, N_A は projective
(2) ${}_AM \otimes_B N_A \simeq {}_AA_A \oplus {}_A(\text{projective module})_A$
(3) ${}_BN \otimes_A M_B \simeq {}_BB_B \oplus {}_B(\text{projective module})_B$

このとき, ${}_AM_B$, ${}_BN_A$ は stable equivalence $\underline{\text{mod}}\text{-}A \simeq \underline{\text{mod}}\text{-}B$ を導き, 互いに quasi-inverse になっている. このように与えられる stable equivalence を <u>Morita type の stable equivalence</u> という.

self-inj. 間では, stable equivalence と Morita type の stable equivalence の差はほとんどない. つまり, 次が成り立つ.

<u>**Prop**</u> **2.3.11** [16] A, B を self-injective algebra とし, $F : \text{mod-}A \to \text{mod-}B$ は stable equivalence $\underline{\text{mod}}\text{-}A \overset{\overline{F}}{\simeq} \underline{\text{mod}}\text{-}B$ を導く exact functor とする. このとき, $\overline{F}$ は Morita type の stable equivalence である.

<u>**Lemma**</u> **2.3.12** [16] A, B は self-injective algebra とし, ${}_AZ_B$ は ${}_AZ \in A\text{-proj}$, 任意の $X \in \text{mod-}A$ に対して, $X \otimes_A Z_B \in \text{proj-}B$ を満たす (A, B)-bimodule とする. このとき, ${}_AZ_B$ は

[*32] A と B が stable equivalent であるとき, A と B の simple module の個数が等しいかどうかは未だに知られていない.

projective module である.

proof. ${}_AZ_B$ を proj.-free とし, $Z = 0$ を示す. まず, $\mathrm{soc}(A)Z\mathrm{soc}(B) = 0$ であることに注意する. ${}_AZ$ は proj. より, ${}_A\mathrm{soc}(A)Z_B \simeq {}_A\mathrm{soc}(A) \otimes_A Z_B$ となり, 仮定より, これは proj. だから, $0 = {}_A\mathrm{soc}(A)Z\mathrm{soc}(B)_B \simeq {}_A\mathrm{soc}(A)Z \otimes_B \mathrm{soc}(B)_B$ を得る. しかし, B は self-inj. (すべての simple module は $\mathrm{soc}(B)$ の直和因子) より, $\mathrm{soc}(A)Z = 0$ となる. さらに, A が self-inj. より, $Z = 0$ であることがわかる. ■

proof. of Prop 2.3.11. $M_B := F(A)$ とおくと, F は functor : $\underline{\mathrm{mod}}\text{-}A \to \underline{\mathrm{mod}}\text{-}B$ を導くから $M \in \text{proj-}B$ である. また, alg. homo. : $A \simeq \mathrm{End}_A(A) \to \mathrm{End}_B(M)$ より, ${}_AM$ と見れる.

　このとき, $X \in \text{mod-}A$ に対して,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_B(X \otimes_A M, F(X)) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{Hom}_B(M, F(X))) \\ \Psi & & \Psi \\ \alpha(X) & \longleftrightarrow & [X \simeq \mathrm{Hom}_A(A, X) \to \mathrm{Hom}_B(M, F(X))] \end{array}$$

のように $\alpha : - \otimes_A M \to F$ を定義する. 明らかに, α は natural であり, さらに, $\alpha(A)$ は iso. だから任意の proj. に対して, $\alpha([\text{proj.}])$ は iso. である. また, 任意の $X \in \text{mod-}A$ に対して, X の proj. resolusion に $- \otimes_A M$, F を apply すると, F は exact より, exact 間の commutative diagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^A(X, M) \arrow[r] & \Omega(X) \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha(\Omega(X))"'] & P(X) \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha(P(X))", "\simeq"'] & X \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha(X)"] & 0 \\ & 0 \arrow[r] & F(\Omega(X)) \arrow[r] & F(P(X)) \arrow[r] & F(X) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

を得る. Snake lemma より, $\alpha(X)$ は epi. であるが, これは任意の module に対して成り立つから, $\alpha(\Omega(X))$ も epi. である. したがって, Snake lemma より, $\alpha(X)$ は iso. であることがわかる. よって, $\alpha : - \otimes_A M \simeq F$ を得る. また, $\mathrm{Tor}_{n>0}^A(X, M) = 0$ であるから, ${}_AM$ は proj. である.

　次に, $G := \mathrm{Hom}_B(M, -) : \text{mod-}B \to \text{mod-}A$ とおくと, M_B は proj. より, G は exact である. さらに, B は self-inj. より, $\mathrm{Hom}_B(M, B)_A \mid \oplus D(A)_A$ となるが, A が self-inj. より, $\mathrm{Hom}_A(M, B)$ は proj. であることがわかる. したがって, G は $\overline{G} : \underline{\mathrm{mod}}\text{-}B \to \underline{\mathrm{mod}}\text{-}A$ を導く. また, homo. と tensor の adjoint 性とその対応で proj. homo. は対応する (M_B : proj.) から, $\overline{G}$ は $\overline{F}$ の right adjoint である (adjoint については付録 B を参照). よって, $\overline{G}$ は $\overline{F}$ の quasi-inverse である. そこで, ${}_BN_A := \mathrm{Hom}_B(M, B)$ とおくと, N_A, ${}_BN$ は proj. である. ここで, 先ほどと同様に, $\beta : - \otimes_B N_A \simeq G$ であることに注意する.

あとは, ${}_AM\otimes_B N_A \simeq {}_AA_A \oplus_A(\mathrm{proj.})_A$ であることを示せばよい (${}_BN\otimes_A M_B \simeq {}_BB_B\oplus_B(\mathrm{proj.})_B$ も同様). つまり, ${}_AA_A \simeq {}_AM \otimes_B N_A$ in A-$\underline{\mathrm{mod}}$-A であることを示す. F, G の unit を $\epsilon : 1 \to GF$ とする. このとき, ϵ_A は (A, A)-homo. になるから (A, A)-bimodule としての PO diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_A"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & I(A) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^{-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \otimes_B N \arrow[r] & P \arrow[r] & \Omega^{-1}(A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

を考える. 明らかに, ${}_AP$ は proj. である. さらに, 任意の $X \in$ mod-A に対して, $X_A \simeq X \otimes_A M \otimes_B N_A$ in $\underline{\mathrm{mod}}$-A となるから, $X \otimes_A P_A$ は proj. である. よって, Lemma 2.3.12 より, ${}_AP_A$ は proj. であることがわかる. よって, 主張を得る. ■

Remark 2.3.13 上で, "ほとんど" と言ったが, 任意の stable equivalence が exact : mod-$A \to$ mod-B からきているとはいえないから, いつでも stable equivalence が Morita type の stable equivalence になるとはいえない.

次に, Linckelmann の定理 [7] (一般化 [9]) について解説する.

Thm 2.3.14 A, B は projective simple module をもたないとする. また, A と B は Morita type の stable equivalent とし, ${}_AM_B$, ${}_BN_A$ がその equivalence を導くとする. このとき, 任意の simple module $S \in$ mod-A に対して, $S \otimes_A M_B$ が simple module ならば, A と B は Morita equivalent である.

以下, A, B は Morita type の stable equivalent とし, ${}_AM_B$, ${}_BN_A$ がその equivalence を導くとする.

Lemma 2.3.15 ${}_AM$, M_B, ${}_BN$, N_A は progenerator である. 特に, $-\otimes_A M$: mod-$A \to$ mod-B は faithful functor である.

proof. N_A が progenerator であることを示す. proj-$A \supseteq$ add-N_A であることは明らか. また, ${}_AM \otimes_B N_A \simeq {}_AA_A \oplus {}_A(\mathrm{proj.})_A$ で, M_B は proj. より, $A_A \mid M \otimes_B N_A \mid \oplus B \otimes_B N_A \simeq \oplus N_A$ であるから, proj-$A \subseteq$ add-N_A を得る. 特に, alg. homo. : $B \to C := \mathrm{End}_A({}_AM)^{\mathrm{op}}$ を使って, mono. : $\mathrm{Hom}_A(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_C(X \otimes_A M, Y \otimes_A M) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_B(X \otimes_A M, Y \otimes_A M)$ であることがわかる. ■

Remark **2.3.16** 上の証明で, M_B は progenerator より, alg. mono. : $B \hookrightarrow C$ となるが, 一般に epi. にはならない. これが, Morita equivalence と Morita type の stable equivalence の差である.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_A &:= \{\text{non-isomorphic simple } A\text{-modules}\} \\ \mathcal{P}_A &:= \{\text{non-isomorphic projective indecomposable } A\text{-modules}\} \end{aligned}$$

Lemma **2.3.17** A, B は projective simple module をもたないとする. このとき, 任意の $S \in \mathcal{S}_A$ に対して, $S \otimes_A M \in \mathcal{S}_B$ ならば,

(1) $\mathcal{S}_B = \{S \otimes_A M \mid S \in \mathcal{S}_A\}$　　(2) $\mathcal{P}_B = \{P \otimes_A M \mid P \in \mathcal{P}_A\}$

proof. proj-B = add-M_B より, $Q \in \mathcal{P}_B$ に対して, $P \in \mathcal{P}_A$ が存在して, $Q \mid P \otimes_A M$ となる. よって, 任意の $T \in \mathcal{S}_B$ に対して, $P \in \mathcal{P}_A$ が存在して, T_B は $P \otimes_A M_B$ の composition factor になる. しかし, $- \otimes_A M_B$ は exact より, $P \otimes_A M_B$ の composition factor は simple module $S \otimes_A M_B$ ($S \in \mathcal{S}_A$) であるから, $T \simeq S \otimes_A M$ となる $S \in \mathcal{S}_A$ が存在する.

次に, (1) の右辺が non-isomorphic の集合であることを示す. $S, T \in \mathcal{S}_A$ に対して, $S \otimes_A M_B \simeq T \otimes_A M_B$ とすると, $- \otimes_B N_A$ を apply して, $S \otimes_A M \otimes_B N_A \simeq T \otimes_A M \otimes_A N_A$ となるが, ${}_AM_B$, ${}_BN_A$ は stable equivalence を導くから, $S \oplus (\text{proj.}) \simeq T \oplus (\text{proj.})$, S は non-projective だから, $S \mid T$ であることがわかる. しかし, T は simple module だから, $S \simeq T$ を得る.

$P \in \mathcal{P}_A$ に対して, $P \otimes_A M_B$ が indecomposable であることを示す. 一般に, simple top[*33] X_A に対して, $X \otimes_A M_B$ が simple top であることを示せばよい. $\ell(X) :=$ (composition length of X) とおき, $\ell(X)$ に関する induction で示す. $\ell(X) = 1$ ならば, X_A は simple module だから, $X \otimes_A M_B$ も simple module である. そこで, $\ell(X) > 1$ とする. $S \mid \mathrm{soc}(X)$ に対して, exact ($*$)

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow X \longrightarrow X/S \longrightarrow 0$$

を考える. この exact ($*$) に $- \otimes_A M_B$ を apply して, exact ($**$)

$$0 \longrightarrow S \otimes_A M \longrightarrow X \otimes_A M \longrightarrow X/S \otimes_A M \longrightarrow 0$$

[*33] $X \in$ mod-A が simple top であるとは, top(X) が simple module になるときにいう.

を得るが, $S \otimes_A M_B$ は simple module で, induction の仮定より, $X/S \otimes_A M_B$ は simple top である. もし, exact $(**)$ が split するならば, $- \otimes_B N_A$ を apply して,

$$X \otimes_A M \otimes_B N_A \simeq S \otimes_A M \otimes_B N_A \oplus X/S \otimes_A M \otimes_B N_A$$

となるが, ${}_AM_B$, ${}_BN_A$ は stable equivalence を導くから, $X \oplus (\text{proj.}) \simeq S \oplus X/S \oplus (\text{proj.})$ を得る. しかし, S_A は non-proj., X_A は indecomposable だから, $X \simeq S$ となるが, $\ell(X) > 1$ より, これは矛盾する. したがって, exact $(**)$ は non-split で, $S \subseteq \text{rad}(X \otimes_A M)$ となるから, $\text{top}(X) \simeq \text{top}(X/S)$ は simple top である.

したがって, 上で述べたように, $Q \in \mathcal{P}_B$ に対して, $Q \mid P \otimes_A M$ となる $P \in \mathcal{P}_A$ が存在するが, $P \otimes_A M$ が indecomposable より, $Q_B \simeq P \otimes_A M_B$ であることがわかる.

また, $P, Q \in \mathcal{P}_A$ に対して, $P \otimes_A M_B \simeq Q \otimes_A M_B$ ならば, $- \otimes_A M_B$ の exact 性より, (top を比べて) $P \simeq Q$ を得る. ■

proof. of Thm 2.3.14. $\mathcal{P}_A = \{P_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ とおく. $X \in \text{mod-}A$ に対して, $- \otimes_A M_B$ の exact 性と Lemma 2.3.17 より, $\dim \text{Hom}_A(P_i, X) = \dim \text{Hom}_B(P_i \otimes_A M, X \otimes_A M)$ となる. 特に, $\dim \text{Hom}_A(P_i, P_j) = \dim \text{Hom}_B(P_i \otimes_A M, P_j \otimes_A M)$ となる. したがって, Lemma 2.3.17 より, $- \otimes_A M_B : \text{proj-}A \to \text{proj-}B$ は fully faithful である. さらに, Lemma 2.3.17 より, object 間の全射が成り立つから, $- \otimes_A M_B : \text{proj-}A \to \text{proj-}B$ は equivalence を導く. したがって, A と B が Morita equivalent であることがわかる. ■

もちろん, $S \in \mathcal{S}_A$ に対して, $S \otimes_A M_B \in \mathcal{S}_B$ となるのはかなり特殊な case である. しかし, A が self-inj. である場合は, simple module は indecomposable module に対応することがわかっている.

Thm 2.3.18 [7] A は projective simple module をもたないとし, (A, A)-bimodule として, indecomposable とする. また, A と B は Morita type の stable equivalent とし, ${}_AM_B$, ${}_BN_A$ がその equivalence を導くとする. このとき, 次が成り立つ.

(1) ${}_AM_B$ が projective-free であることと ${}_AM_B$ が indecomposable であることは同値である.
(2) A, B が self-injective algebra, ${}_AM_B$ が projective-free ならば, $S \in \mathcal{S}_A$ に対して, $S \otimes_A M_B$ は non-projective indecomposable module である.

proof.

(1) ${}_AM_B$ は proj.-free と仮定する. ${}_AM_B = M_1 \oplus M_2$ とすると, $- \otimes_B N_A$ を apply して, ${}_AA_A \oplus {}_A(\text{proj.})_A \simeq {}_AM_1 \otimes_B N_A \oplus {}_AM_2 \otimes_B N_A$ を得る. しかし, ${}_AA_A$ が indecomposable より,

${}_AM_2 \otimes_B N_A$ は proj. としてよい. したがって, $-\otimes_A M_B$ を apply して, ${}_AM_{2B}$ が proj. であることがわかり, M は proj.-free より, $M_2 = 0$ を得る. 逆に, ${}_AM_B$ を indecomposable とする. ${}_AM_B$ が proj. であると仮定すると, $S \in \mathcal{S}_A$ に対して, $S \otimes_A M_B$ は proj. である. よって, S_A は proj. となるが, これは矛盾である.

(2) A, B は self-inj. とする. ${}_AM_B$ は proj.-free より, $\mathrm{soc}(A)M\mathrm{soc}(B) = 0$ となる. よって, B は self-inj. より, $\mathrm{soc}(A)M_B$ は proj.-free である. ${}_AM$ は proj. だから, $\mathrm{soc}(A)M_B \simeq \mathrm{soc}(A) \otimes_A M_B$ を得るが, A は self-inj. より, すべての $S \in \mathcal{S}_A$ に対して, $S \otimes_A M_B \mid \mathrm{soc}(A)M_B$ となっている. したがって, $S \otimes_A M_B$ は proj.-free であることがわかる. もし, $S \otimes_A M_B \simeq T_1 \oplus T_2$ と分解できたら, $-\otimes_B N_A$ を apply して, S_A が simple module より, $T_2 \otimes_B N_A$ は proj. としてよいから, T_{2B} は proj. となる. よって, $T_2 = 0$ を得るから S_A は indecomposable であることがわかる.

■

このように, Morita equivalence と Morita type の stable equivalence の差がわかったが, 次に derived equivalence と (Morita type の) stable equivalence の関係を見てみよう. しかし, Thm 2.3.7 のように, 一般には比べられていないようである.

<u>Thm</u> 2.3.19 [13, 22] A, B を self-injective algebra とする. このとき, A と B が derived equivalent ならば, A と B は Morita type の stable equivalent である.

<u>proof.</u> A と B を derived equivalent とすると, ${}_AM_B^\bullet \in D^b(A\text{-mod-}B)$ が存在して, $-\otimes_A^{\mathbf{L}} M_B^\bullet$ が $D^b(\text{mod-}A)$ と $D^b(\text{mod-}B)$ の間の equivalence を導く (付録 B を参照). ここで, ${}_AM^\bullet \in K^b(A\text{-proj})$ である.

したがって, Thm 2.3.7 より,

$$\begin{array}{ccc} D^b(A\text{-mod-}B)/K^b(A\text{-proj-}B) & \simeq & A\text{-}\underline{\mathrm{mod}}\text{-}B \\ \Psi & & \Psi \\ {}_AM_B^\bullet & \longleftrightarrow & {}_AM_B \end{array}$$

を得る. またもう一度, Thm 2.3.7 より,

$$\begin{array}{ccc} D^b(A\text{-mod})/K^b(A\text{-proj}) & \simeq & A\text{-}\underline{\mathrm{mod}} \\ \Psi & & \Psi \\ {}_AM^\bullet & \longleftrightarrow & {}_AM \end{array}$$

となるから, ${}_AM$ は proj. であることがわかる. さらに, Rickard の定理より, derived equivalence の制限は, $K^b(\text{proj-}A)$ と $K^b(\text{proj-}B)$ の間の equivalence を導くから, Thm 2.3.7

より,

$$\begin{array}{ccc} D^b(\text{mod-}A)/K^b(\text{proj-}A) & \xrightarrow[\simeq]{-\otimes_A^{\mathbf{L}} M_B^\bullet} & D^b(\text{mod-}B)/K^b(\text{proj-}B) \\ \wr & & \wr \\ \underline{\text{mod}}\text{-}A & \xrightarrow[-\otimes_A M_B]{\simeq} & \underline{\text{mod}}\text{-}B \end{array}$$

であることがわかるが, $-\otimes_A M_B$ は exact functor だから, 主張を得る. ■

Remark **2.3.20** 上の証明で, $-\otimes_A M_B$ が exact functor であることを使ったが, $M_B^\bullet \in K^b(\text{proj-}B)$ より, M_B は proj. であり, $-\otimes_A^{\mathbf{L}} M_B^\bullet$ の quasi-inverse を考えれば, $-\otimes_A M_B$ の quasi-inverse $-\otimes_B N_A$ を与えることができる.

これにより, category equivalence の関係が以下のようになることがわかった.

$$\text{Morita eq.} \Longrightarrow \text{Derived eq.} \overset{\text{self-inj.}}{\Longrightarrow} \text{Stable eq. of Morita type} \Longrightarrow \text{Stable eq.}$$

また, injective module でカットした injectively stable module category $\overline{\text{mod}}\text{-}A$ も同様に定義できる. 次のことがわかっている [3].

Prop **2.3.21** A と B が Morita type の stable equivalent ならば, $\overline{\text{mod}}\text{-}A \simeq \overline{\text{mod}}\text{-}B$ となる.

以下, ${}_AM_B$, ${}_BN_A$ は indecomposable とし, ${}_AM \otimes_B N_A \simeq {}_AA_A \oplus {}_AP_A$ (${}_AP_A$ は projective module), ${}_BN \otimes_A M_B \simeq {}_BB_B \oplus {}_BQ_B$ (${}_BQ_B$ は projective module) とおく.

Prop **2.3.22** 次が成り立つ.

$${}_AM_B \simeq {}_A\mathrm{Hom}_A(N, A)_B \simeq {}_A\mathrm{Hom}_B(N, B)_B$$

$${}_BN_A \simeq {}_B\mathrm{Hom}_A(M, A)_B \simeq {}_A\mathrm{Hom}_B(M, B)_A$$

よって, $(-\otimes_A M_B, -\otimes_B N_A)$ は left-right adjoint pair in module category になる.

proof. ${}_BN_A \simeq {}_B\mathrm{Hom}_B(M, B)_A$ を示す. まず, M_B は proj. より, $\mathrm{Hom}_B(M, -)_A \simeq -\otimes_B \mathrm{Hom}_B(M, B)$, $\mathrm{Hom}_B(M, B)$ はそれぞれ片側で proj. であることに注意する. よって, $(-\otimes_A M_B, \mathrm{Hom}_B(M, -))$ は adjoint pair in module category より, adjoint pair in stable module category である. したがって, ${}_BN_A \simeq {}_B\mathrm{Hom}_B(M, B)_A$ in B-$\underline{\text{mod}}$-A を得る. しかし, ${}_BN_A$ は

indecomposable より, ${}_B\mathrm{Hom}_B(M,B)_A \simeq {}_BN_A \oplus {}_B(\mathrm{proj.})_A$ となる. さらに, ${}_AM_B$ は indecomposable で, ${}_AM_B \simeq \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_B(M,B),B)$ より, 主張を得る. ■

Prop 2.3.23 次が成り立つ.

$$
{}_AP_A \simeq {}_A\mathrm{Hom}_A(P,A)_A \qquad , \qquad {}_BQ_B \simeq {}_B\mathrm{Hom}_B(Q,B)_B
$$

proof. ${}_AP_A \simeq \mathrm{Hom}_A(P,A)$ を示す.

$$
\begin{aligned}
{}_A\mathrm{Hom}_A(A,A)_A \oplus {}_A\mathrm{Hom}_A(P,A)_A &\simeq {}_A\mathrm{Hom}_A(A\oplus P,A)_A \\
&\simeq {}_A\mathrm{Hom}_A(M\otimes_B N,A)_A \\
&\simeq {}_AM\otimes_B N_A \\
&\simeq {}_AA_A \oplus {}_AP_A
\end{aligned}
$$

■

proof. of Prop 2.3.21. まず, $I_A \in \text{inj-}A$ に対して, $I\otimes_A M_B \in \text{inj-}B$ であることを示す. すなわち, $\mathrm{Hom}_B(-, I\otimes_A M)$ が exact functor であることを示せばよい. $-\otimes_A M_B$ は right adjoint of $-\otimes_B N_A$ より, $\mathrm{Hom}_B(-, I\otimes_A M) \simeq \mathrm{Hom}_A(-\otimes_B N, I)$ を得る. ${}_BN \in B\text{-proj}$, $I_A \in \text{inj-}A$ より, $\mathrm{Hom}_A(-\otimes_B N, I)$ は exact functor である.

次に, $X_A \in \text{mod-}A$ に対して, $X\otimes_A P_A \in \text{inj-}A$ であることを示す. すなわち, ${}_AP_A \simeq {}_A\mathrm{Hom}_A(P,A)_A$ より, $X\otimes P_A \simeq \mathrm{Hom}_A(P,X)$ となるから, $\mathrm{Hom}_A(-,\mathrm{Hom}_A(P,X))$ が exact functor であることを示せばよい. $\mathrm{Hom}_A(-,\mathrm{Hom}_A(P,X)) \simeq \mathrm{Hom}_A(-\otimes_A P, X)$ に対して, ${}_AP_A$ は proj. より, exact に $-\otimes_A P_A$ を apply すると, split exact を得るから, $\mathrm{Hom}_A(-\otimes_A P, X)$ は exact functor である. ■

2.3.4 奥山の方法

次に, Linckelmann の定理を使って, derived equivalence を調べる方法 [奥山の方法] [12, 17] を紹介する.

A, B を self-injective algebra とし, A と B は Morita type の stable equivalent と仮定する. このとき, B 上の tilting complex を作り, その endomorphism algebra を B_1 とすると, B と B_1 は derived equivalent (よって, Morita type の stable equivalent) である. これを繰り返して, B と derived equivalent (Morita type の stable equivalent) な algebra B_n を作る.

$$
A \underset{}{\overset{\text{stable of Morita type}}{\rightsquigarrow}} B \underset{\text{derived}}{\overset{\text{stable of Morita type}}{\rightsquigarrow}} B_1 \underset{\text{derived}}{\overset{\text{stable of Morita type}}{\rightsquigarrow}} \cdots\cdots \underset{\text{derived}}{\overset{\text{stable of Morita type}}{\rightsquigarrow}} B_n
$$

このとき, この equivalence で, simple A-module たちの対応を考え, それらがすべて simple B_n-module と対応していたら, Linckelmann の定理により, A と B_n が Morita equivalence になっていることがわかる. したがって, A と B の derived equivalence $[A \overset{\text{Morita}}{\sim} B_n \overset{\text{derived}}{\sim} B]$ を得ることができる.

この方法はもちろん, tilting complex の取り方による. 1 万回繰り返しても simple module が simple module に対応するとは限らないが, 1 万 1 回目で simple module に対応する可能性もある. 逆に, ”うまく” tilting complex をとれば, 1 回で simple module に対応する可能性もある. つまり, 長さ n は一意的ではない. しかし, 一発で tilting complex を与えることがとても困難なため, とても有効かつ画期的な方法である. また, 最初に与えられた algebra A, B が Morita type の stable equivalent であることを確かめなければいけないことに注意する.

Remark 2.3.24 この方法は, derived equivalent ならば, Morita type の stable equivalent であることを使っているので, 今のところ (self-inj. でない場合はこの関係がわかっていないから) A, B が self-inj. でないと使えない.

Example 2.3.25 group algebra (block[*34]) で奥山の方法を用いて derived equivalent であることを計算してみよう. ここでは小さい例として, 5 次交代群 A_5, $\mathrm{char}\, k = 2$ で実際に確かめてみる. 詳しくは, 私の修士論文 [23] (第 11 回若手研究集会報告集) を見ていただきたい.

$G := A_5$, $\mathrm{char}\, k = 2$ とする. このとき, ${}_{kG}kG_{kG} \simeq A \oplus A'$, $A' \simeq \mathrm{Mat}_4(k)$ となる. また, $P \simeq C_2 \times C_2 \in \mathrm{Syl}_2(G)$ とし, $H := N_G(P) \simeq A_4$ とおくと, kH は (kH, kH)-bimodule として indecomposable である. $B := kH$ とおく. このとき, A, B の quiver with relation は次のようになる.

A :

$$\begin{tikzcd} \overset{2}{\bullet} \arrow[r, shift right, "b_1"'] & \overset{1}{\bullet} \arrow[l, shift right, "a_1"'] \arrow[r, shift left, "a_2"] & \overset{3}{\bullet} \arrow[l, shift left, "b_2"] \end{tikzcd} \qquad b_1a_1 = b_2a_2 = 0,\ a_1b_1a_2b_2 = a_2b_2a_1b_1$$

*34 finite group G に対して, G の元を basis とした k 上の vector space は algebra になる (積は group の積). このとき, この algebra を kG と書き, group algebra という. また, kG を (kG, kG)-bimodule として, 直既約分解したときの因子を block とよぶ. group algebra や block は symmetric algebra になっている.

B :

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, shift right, "x_1"'] \arrow[dr, shift right, "y_3"'] & \\ 2 \arrow[ur, shift right, "y_1"'] \arrow[rr, shift right, "x_2"'] & & 3 \arrow[ll, shift right, "y_2"'] \arrow[ul, shift right, "x_3"'] \end{tikzcd} \qquad x^2 = y^2 = 0,\ xy = yx$$

まず, A と B は Morita type の stable equivalent である. 実際, この equivalence は, $-\otimes_A A_B : \underline{\mathrm{mod}}\text{-}A \to \underline{\mathrm{mod}}\text{-}B$ で与えられる (これは kG の作用を kH へ制限したものである). この対応で,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_A & \xrightarrow{-\otimes_A A_B} & \underline{\mathrm{mod}}\text{-}B \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ 3 & \longmapsto & \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

となっている.

そこで, B 上の tilting complex $P^\bullet$ を Prop 2.2.50 の $X_B = 1$ としてとり, その endomorphism algebra を B_1 とする. B と B_1 は derived equivalent である. このとき, この対応で,

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{mod}}\text{-}B & \longrightarrow & \underline{\mathrm{mod}}\text{-}B_1 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ 1 & \longmapsto & 1 \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} & \longmapsto & 2 \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} & \longmapsto & 3 \end{array}$$

となる. 実際, 次のように計算できる. ここで, $P_1^\bullet := [P(2) \oplus P(3) \to P(1)]$, $P_2^\bullet := [P(2) \to 0]$, $P_3^\bullet := [P(3) \to 0]$ とおく.

- 1_B について.
  $\mathrm{Hom}_{K^-(\mathrm{mod}\text{-}B)}(P^\bullet, 1[n]) = 0$ $(n \neq 0)$ より, 1_B は $\mathrm{Hom}_{K^-(\mathrm{mod}\text{-}B)}(P^\bullet, 1)_{B_1}$ に対応する. そ

こで, triangle : $\Omega^2(1)[1] \to P_1^\bullet \to 1 \to \Omega^2(1)[2]$ に, $\mathrm{Hom}_{K^-(\text{mod-}B)}(P^\bullet, -)$ を apply して, exact

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K^-(\text{mod-}B)}(P^\bullet, \Omega^2(1)[1]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K^-(\text{mod-}B)}(P^\bullet, P_1^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K^-(\text{mod-}B)}(P^\bullet, 1) \longrightarrow 0$$

を得る. $\mathrm{Hom}_{K^-(\text{mod-}B)}(P^\bullet, P_1^\bullet)$ は projective indecomposable B_1-module $P(1)$ で, $\mathrm{Hom}_{K^-(\text{mod-}B)}(P^\bullet, 1)$ は 1-dim. より, 主張を得る.

- $X_B := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ について.

  $\mathrm{Hom}_{K^-(\text{mod-}B)}(P^\bullet, X[n]) = 0$ $(n \neq 1)$ より, X_B は $\Omega(\mathrm{Hom}_{K^-(\text{mod-}B)}(P^\bullet, X[1]))$ に対応する. そこで, triangle : $\Omega(X)[1] \to P_2^\bullet \to X[1] \to \Omega(X)[2]$ に, $\mathrm{Hom}_{K^-(\text{mod-}B)}(P^\bullet, -)$ を apply して, exact

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K^-(\text{mod-}B)}(P^\bullet, \Omega(X)[1]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K^-(\text{mod-}B)}(P^\bullet, P_2^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K^-(\text{mod-}B)}(P^\bullet, X[1]) \longrightarrow 0$$

  を得る. $\mathrm{Hom}_{K^-(\text{mod-}B)}(P^\bullet, P_2^\bullet)$ は 5-dim. projective indecomposable B_1-module $P(2)$ で, $\mathrm{Hom}_{K^-(\text{mod-}B)}(P^\bullet, X[1])$ は 4-dim. より, 主張を得る.

- $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_B$ について. 上と同様.

したがって, simple A-module は simple B_1-module と対応するから, A と B_1 が Morita equivalent であることがわかる. よって, A と B は derived equivalent であることがわかる.

Remark 2.3.26 上は有限群のモジュラー表現論における大問題の一つで, Broué's conjecture と呼ばれている. G を有限群とし, A を kG の (non-simple な) block とする $(\mathrm{char}\, k = p > 0)$. また, P を A の defect group[*35]とし, $H := N_G(P)$ とおく. A はある対応で, kH の block と対応しており (Brauer 対応), それを B とする. このとき, P が abelian group ならば, A と B は derived equivalent になっているか？という予想である. 対称群 (交代群) や P が cyclic group などの場合は解決されている. また, P が non-abelian でも, A と B がよく似ていることがあるが, この場合は反例がある $(G := \mathrm{Sz}(8),\ p = 2)$. しかし, P が abelian という強い仮定をはずしたとき, A と B がどのくらい似ているか？ またはいつ derived equivalent になっているか？ ということはこれからの重要な研究課題である.

[*35] block A の defect group は, A の情報を操作する G の p-subgroup である. 例えば, P が cyclic group ならば, A は finite type になる.

3 Tilting module

ここでは, tilting module について解説する. 特に, tilting module T_A が与えられたとき, その endomorphism algebra $\mathrm{End}_A(T)$ と A が derived equivalent になることを示す [4].

3.1 Definition

Def 3.1.1 $T_A \in \text{mod-}A$ が tilting module であるとは, 次を満たすときにいう.

(1) T_A は self-orthogonal である. つまり, $\mathrm{Ext}_A^{n>0}(T,T) = 0$ となる. よって, $K^b(\text{add-}T_A)$ は $D^b(\text{mod-}A)$ の full subcategory と考えることができる.

(2) $K^b(\text{add-}T_A) = K^b(\text{proj-}A)$ in $D^b(\text{mod-}A)$

上の定義は, categorical な定義になっているが, これを module の言葉で言い換えると次のようになる.

Prop 3.1.2 $T_A \in \text{mod-}A$, T_A は self-orthogonal とする. このとき, 次は同値である.

(1) T_A は tilting module である.

(2) (i) T_A は finite projective dimension をもつ.

(ii) exact : $0 \to A_A \to T_0 \to T_1 \to \cdots \to T_n \to 0$, $T_i \in \text{add-}T_A$ をもつ.

Remark 3.1.3 上の (2)(ii) は, A_A の left T_A-dominant resolusion になっている. 実際, exact : $0 \to A_i \to T_i \to A_{i+1} \to 0$ (各 A_i は kernel) に, $\mathrm{Hom}_A(-,T)$ を apply して,

$$\begin{cases} \text{exact} : 0 \to \mathrm{Hom}_A(A_{i+1},T) \to \mathrm{Hom}_A(T_i,T) \to \mathrm{Hom}_A(A_i,T) \to \mathrm{Ext}_A^1(A_{i+1},T) \to 0 \\ \mathrm{Ext}_A^{m+1}(A_{i+1},T) \simeq \mathrm{Ext}_A^m(A_i,T) \end{cases}$$

を得るが, $n \gg 0$ に対して $A_n = 0$ より, $\mathrm{Ext}_A^1(A_{i+1},T) = 0$ であることがわかる.

また, A が self-inj. ならば, progenerator と tilting module は等しいことがわかる.

proof. 明らか. ■

3.2 Tilting module と category

tilting module は明らかに, progenerator の拡張になっている. しかし, tilting module では, Morita equivalence は導くことはできない. つまり, T_A を tilting module, $B := \mathrm{End}_A(T)$ とおくと,

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{mod-}A \arrow[rr, phantom, "\not\simeq"] & & \text{mod-}B \\
\text{proj-}A \arrow[ur] \arrow[r, phantom, "\neq"] & & \text{add-}T_A \arrow[ul] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \text{proj-}B \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Remark 3.2.1 tilting module のときも, module category のある full subcategory との間に equivalence が存在する. それについては, 次の章で述べる.

では, category を広げて, derived category で見てみよう. このとき, Rickard の定理より, equivalence が存在することがわかる.

$$
\begin{tikzcd}
 & D^b(\text{mod-}A) \arrow[rr, phantom, "\simeq"] & & D^b(\text{mod-}B) \\
K^b(\text{proj-}A) \arrow[ur] \arrow[r, phantom, "="] & & K^b(\text{add-}T_A) \arrow[ul] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & K^b(\text{proj-}B) \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

そこで, 実際に, tilting complex を与えてみよう.

3.2.1 Tilting module と tilting complex

T_A を tilting module, $B := \mathrm{End}_A(T)$ とする. また, T_A の proj. resolusion を $P^\bullet$ とおく. このとき, T_A は finite projective dimension をもつ ($K^b(\text{proj-}A) \supseteq K^b(\text{add-}T_A)$) から, $P^\bullet \in K^b(\text{proj-}A)$ である.

そこで, tilting complex の定義 (1)(2) を調べる.

(1) $n \neq 0$ に対して,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P^\bullet, P^\bullet[n]) &\simeq \mathrm{Hom}_{K^b(\text{mod-}A)}(P^\bullet, T[n]) \\ &\simeq \begin{cases} \mathrm{Ext}_A^n(T,T) & n > 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \\ &= 0\end{aligned}$$

(2) $K^b(\text{proj-}A) \subseteq K^b(\text{add-}T_A)$ より.

さらに, (1) のように, $B \simeq \mathrm{End}_{K^b(\text{proj-}A)}(P^\bullet)$ であることがわかる. よって, $P^\bullet$ は A と B の間の derived equivalence を導く tilting complex になっていることがわかる.

4 Wakamatsu tilting module

次に, tilting module の拡張である Wakamatsu tilting module について解説する [18, 19, 20].

4.1 Definition

Def 4.1.1 $T_A \in \text{mod-}A$ が Wakamatsu tilting module であるとは, 次の 2 条件を満たすときにいう.

(1) T_A は self-orthogonal である.

(2) $A_A \in \mathcal{D}(T_A)$

Wakamatsu tilting module は明らかに tilting module の拡張になっているが, tilting module と大きく違う点は, T_A の proj. resolusion, A_A の left T_A-dominant resolusion の長さが発散するところである. つまり, T_A の proj. resolusion をとっても, それが A 上の tilting complex にならない.

Wakamatsu tilting module は次のように言い換えることができる.

Prop 4.1.2 $T_A \in \text{mod-}A$, $B := \mathrm{End}_A(T)$ とする. また, 自然に $_BT$ とみる. このとき, 次は同値である.

(1) T_A は Wakamatsu tilting module である.

(2) $A^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{End}_B(T)$ $(a \mapsto [t \mapsto ta])$, $\mathrm{Ext}_B^{n>0}(T, T) = 0$

proof. $X_A \in \text{mod-}A$ に対して, A-homo. π_X^T を次のように定義する.

$$\begin{array}{cccc} \pi_X^T: & X & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(X, T), T) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & [f \mapsto f(x)] \end{array}$$

$X_A = T_A$ ならば, π_T^T は iso. である.

X_A は left T-dominant resolution をもつと仮定し, それを

$$\text{exact}: 0 \longrightarrow X \longrightarrow T_0 \xrightarrow{f_0} T_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} T_n$$

とする. $X_i := \mathrm{Ker}\, f_i$ $(0 \leq i \leq n-1)$ とおく.

$X \to T_0$ は left approximation より, exact : $0 \to X \to T_0 \to X_1 \to 0$ に $\mathrm{Hom}_A(-, T)$ を apply して, exact : $0 \to \mathrm{Hom}_A(X_1, T) \to \mathrm{Hom}_A(T_0, T) \to \mathrm{Hom}_A(X_0, T) \to 0$ を得るが, さらに, $\mathrm{Hom}_B(-, T)$ を apply して, exact 間の commutative diagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\pi_X^T"'] & T_0 \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"', "\pi_{T_0}^T"] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{X_1}^T"] & 0 & \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(X, T), T) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T_0, T), T) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(X_1, T), T) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_B^1(\mathrm{Hom}_A(X, T), T) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

を得る. また, $\mathrm{Ext}_B^{k+1}(\mathrm{Hom}_A(X, T), T) \simeq \mathrm{Ext}_B^k(\mathrm{Hom}_A(X_1, T), T)$ となる. Snake lemma より, $\mathrm{Ker}\, \pi_X^T = 0$, $\mathrm{Cok}\, \pi_X^T \simeq \mathrm{Ker}\, \pi_{X_1}^T$, $\mathrm{Cok}\, \pi_{X_1}^T \simeq \mathrm{Ext}_B^1(\mathrm{Hom}_A(X, T), T)$ であることがわかる. さらに,

- $n > 0$ ならば, X_1 について同様の操作をすることで, π_X^T は iso.
- $n > 1$ ならば, $X_1, X_2, \cdots$ について同様の操作をして, π_X^T は iso., $\mathrm{Ext}_B^j(\mathrm{Hom}_A(X, T), T) = 0$ $(0 < j < n)$.

であることがわかる.

逆に, $\mathrm{Ker}\, \pi_X^T = 0$ ならば, left approximation $f : X \to T_0$ が存在して ($\mathrm{Hom}_A(X, T)$ の proj. cover として, $\mathrm{Hom}_A(T_0, T)$ をとればよい), f は mono. である. 特に, π_X^T が iso. ならば, $X_1 := \mathrm{Cok}\, f$ に対して, $\mathrm{Ker}\, \pi_{X_1}^T = 0$ となるから (上と同じ議論), left T-dominant resolusion $0 \to X \to T_0 \to T_1$ を得る. さらに, π_X^T が iso. で, $n > 1$ に対して, $\mathrm{Ext}_B^j(\mathrm{Hom}_A(X, T), T) = 0$ $(0 < j < n)$ ならば, 上の議論より, left T-dominant resolusion $0 \to T_0 \to T_1 \to \cdots \to T_n$ を得ることができる.

このことから, X の left T-dominant resolusion $0 \to X \to T_0 \to \cdots \to T_n$ について次のことがわかったことになる.

(i) $n \geq 0 \iff \operatorname{Ker} \pi_X^T = 0$ (ii) $n > 0 \iff \pi_X^T$は iso.

(iii) $n > 1 \iff \pi_X^T$は iso. かつ $\operatorname{Ext}_B^{n>j>0}(\operatorname{Hom}_A(X,T),T) = 0$

(1)⇒(2). $A_A \in \mathcal{D}(T)$ より, π_A^T は iso. だから, $A_A \simeq \operatorname{Hom}_B(\operatorname{Hom}_A(A,T),T) \simeq \operatorname{End}_B(T)$ を得るが, これは alg. iso. : $A^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\simeq} \operatorname{End}_B(T)$ $(a \mapsto [t \mapsto ta])$ を与える. さらに, $\operatorname{Ext}_B^{n>0}(T,T) \simeq \operatorname{Ext}_B^{n>0}(\operatorname{Hom}_A(A,T),T) = 0$ を得る. (2)⇒(1). 略 ■

このことから, T_A を Wakamatsu tilting module とすると, ${}_A D(T) \otimes_B T_A \simeq {}_A D(A)_A$, ${}_B T \otimes_A D(T)_B \simeq {}_B D(B)_B$ であることがわかる. さらに, DT_B も Wakamatsu tilting module になる. また, (progenerator でない) Wakamatsu tilting module の例としては, $D(A)_A$ などがあげられる. non-trivial な例はこの章の後半で与えることにする.

4.2 Wakamatsu tilting module と module category

ここでは, Wakamatsu tilting module によって導かれる module category の full subcategory 間の equivalence について解説する.

以下, T_A を Wakamatsu tilting module, $B := \operatorname{End}_A(T)$ とおく. このとき, 自然に ${}_B T$ とみる. また, $X_A \in \text{mod-}A$ に対して, 上と同様に, π_X^T を定める. さらに,

$$\operatorname{cog}^*(T) := \left\{ X \in \text{mod-}A \,\middle|\, X \text{ は left } T\text{-dominant resolusion をもち, その長さは無限} \right\}$$

$$\operatorname{gen}^*(T) := \left\{ X \in \text{mod-}A \,\middle|\, X \text{ は right } T\text{-dominant resolusion をもち, その長さは無限} \right\}$$

とおく. よって,

$$\mathcal{D}(T) = \operatorname{Ker} \operatorname{Ext}_A^{n>0}(-,T) \cap \operatorname{cog}^*(T)$$

$$C(T) = \operatorname{Ker} \operatorname{Ext}_A^{n>0}(T,-) \cap \operatorname{gen}^*(T)$$

となる.

adjoint pair $(- \otimes_B T_A, \operatorname{Hom}_A(T,-)_B)$ に対して, unit, counit をそれぞれ η^T, ϵ^T とおく.

Prop 4.2.1 次の equivalence が成り立つ.

(1) ${}_B T_A : \operatorname{Fix}(\epsilon^T) \cap \operatorname{Ker} \operatorname{Ext}_A^{n>0}(T,-) \simeq \operatorname{cog}^*(DT_B)$

(2) ${}_B T_A : \operatorname{gen}^*(T_A) \simeq \operatorname{Fix}(\eta^T) \cap \operatorname{Ker} \operatorname{Ext}_B^{n>0}(-,DT)$

proof. (1) $X \in \mathrm{Fix}(\epsilon^T) \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_A^{n>0}(T,-)$ とする. $Y_B := \mathrm{Hom}_A(T,X)$ とおくと, $X \in \mathrm{Fix}(\eta^T)$ より, $Y \otimes_B T_A \simeq X_A$ である. また, $\pi_{Y_B}^{DT_B} : Y := \mathrm{Hom}_A(T,X) \simeq \mathrm{Hom}_A(DX,DT) \simeq \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_B(Y,DT),DT)$, $\mathrm{Ext}_A^{n>0}(\mathrm{Hom}_A(Y,DT),DT) \simeq \mathrm{Ext}_A^{n>0}(DX,DT) \simeq \mathrm{Ext}_A^{n>0}(T,X) = 0$ より, $Y_B \in \mathrm{cog}^*(DT_B)$ となる. したがって, $\mathrm{Hom}_A(T,-) : \mathrm{Fix}(\epsilon^T) \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_A^{n>0}(T,-) \to \mathrm{cog}^*(DT_B)$ を得る. 逆に, $Y \in \mathrm{cog}^*(DT_B)$ に対して, $\pi_{Y_B}^{DT_B}$ は iso. より, $Y \simeq \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_B(Y,DT),DT) \simeq \mathrm{Hom}_A(T, Y \otimes_B T)$ となるから, $\mathrm{Hom}_A(T, Y \otimes_B T) \otimes_B T_A \simeq Y \otimes_B T_A$ を得る. よって, $Y \otimes_B T_A \in \mathrm{Fix}(\epsilon^T)$ となる. また, $0 = \mathrm{Ext}_A^{n>0}(\mathrm{Hom}_B(Y,DT),DT) \simeq \mathrm{Ext}_A^{n>0}(T, Y \otimes_B T)$ となるから, $Y \otimes_B T_A \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_A^{n>0}(T,-)$ を得る. したがって, $- \otimes_B T : \mathrm{cog}^*(DT_B) \to \mathrm{Fix}(\epsilon^T) \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_A^{n>0}(T,-)$ となる. (2) 同様. ■

Prop 4.2.2 次の equivalence が成り立つ.

(1) ${}_A DT_B : \mathrm{Fix}(\eta^{DT}) \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_A^{n>0}(-,T) \simeq \mathrm{gen}^*(DT_B)$
(2) ${}_A DT_B : \mathrm{cog}^*(T_A) \simeq \mathrm{Fix}(\epsilon^{DT}) \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_B^{n>0}(DT,-)$

上のことから次の equivalence を得る.

Prop 4.2.3 次の equivalence が成り立つ.

(1) ${}_B T_A : \mathcal{C}(T_A) \simeq \mathcal{D}(DT_B)$ (2) ${}_A DT_B : \mathcal{D}(T_A) \simeq \mathcal{C}(DT_B)$

mod-A の full subcategory $\mathcal{A}$ に対して,

$$\mathcal{P}\mathcal{A} := \left\{ X \in \text{mod-}A \,\middle|\, \text{任意の } M \in \mathcal{A} \text{ に対して}, \mathrm{Ext}_A^{n>0}(X,M) = 0 \right\}$$

$$\mathcal{I}\mathcal{A} := \left\{ X \in \text{mod-}A \,\middle|\, \text{任意の } M \in \mathcal{A} \text{ に対して}, \mathrm{Ext}_A^{n>0}(M,X) = 0 \right\}$$

とおく. また, $X, Y \in$ mod-A に対して,

$$\begin{array}{cccc} c_Y^X : & \mathrm{Hom}_A(T,Y) \otimes_B \mathrm{Hom}_A(X,T) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(X,Y) \\ & \Psi & & \Psi \\ & g \otimes f & \longmapsto & gf \end{array}$$

とする. X または Y が add-T_A に属せば, c_Y^X は (k-) iso. になる.

Prop 4.2.4 次の equivalence が成り立つ.

$${}_B T_A : \mathcal{I}\mathcal{D}(T_A) \simeq \mathcal{P}\mathcal{C}(DT_B)$$

proof. $X_A \in \mathcal{ID}(T_A)$ とする. $T_A \in \mathcal{D}(T_A)$ より, $\mathrm{Ext}_A^{n>0}(T, X)$ となる. $W_A \in \mathcal{D}(T_A)$ に対して, W の left T-dominant resolusion を $0 \to W \to T_0 \to \cdots$ とおく. exact : $0 \to W \to T_0 \to W_1 \to 0$ に $\mathrm{Hom}_A(-, T)$ を apply して, exact : $0 \to \mathrm{Hom}_A(W_1, T) \to \mathrm{Hom}_A(T_0, T) \to \mathrm{Hom}_A(W, T) \to 0$ を得る. さらに, $\mathrm{Hom}_A(T, X) \otimes_B -$ を apply して, exact 間の commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^B(\mathrm{Hom}_A(T,X), \mathrm{Hom}_A(W,T)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(T,X) \otimes_B \mathrm{Hom}_A(W_1,T) \arrow[r] \arrow[d, "c_X^{W_1}"'] & \mathrm{Hom}_A(T,X) \otimes_B \mathrm{Hom}_A(T_0,T) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"', "c_X^{T_0}"] & \mathrm{Hom}_A(T,X) \otimes_B \mathrm{Hom}_A(W,T) \arrow[r] \arrow[d, "c_T^W"] & 0 \\
& 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(W_1, X) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(T_0, X) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(W, X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

を得る. ここで, 下行の exact は, $W_1 \in \mathcal{D}(T_A)$, $X \in \mathcal{ID}(T_A)$ からわかる. よって, Snake lemma より, $\mathrm{Ker}\, c_X^{W_1} \simeq \mathrm{Tor}_1^B(\mathrm{Hom}_A(T, X), \mathrm{Hom}_A(W, T))$, $\mathrm{Ker}\, c_X^W \simeq \mathrm{Cok}\, c_X^{W_1}$, $\mathrm{Cok}\, c_X^W = 0$ であることがわかる. さらに, $W_1 \in \mathcal{D}(T_A)$ に同様の操作をすることで, c_X^W は iso. になる. 特に, $A \in \mathcal{D}(T_A)$ より, $\pi_X^T = c_X^A$ は iso. だから, $X_A \in \mathrm{Fix}(\epsilon^T)$ を得る. ゆえに, $X_A \in \mathrm{Fix}(\epsilon^T) \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_A^{n>0}(T, -)$ となる. また, 上の commutative diagram から $\mathrm{Tor}_{k+1}^B(\mathrm{Hom}_A(T, X), \mathrm{Hom}_A(W, T)) \simeq \mathrm{Tor}_k^B(\mathrm{Hom}_A(T, X), \mathrm{Hom}_A(W_1, X))$ であることがわかるが, $c_X^{W_1}$ は iso. だから, $\mathrm{Tor}_1^B(\mathrm{Hom}_A(T, X), \mathrm{Hom}_A(W, X)) = 0$ となり, 帰納的に, $\mathrm{Tor}_{n>0}^B(\mathrm{Hom}_A(T, X), \mathrm{Hom}_A(W, T)) = 0$ を得る. これは, $\mathrm{Ext}_B^{n>0}(\mathrm{Hom}_A(T, X), W \otimes_A DT) = 0$ であることを意味しているが, equivalence ${}_ADT_B : \mathcal{D}(T_A) \simeq \mathcal{C}(DT_B)$ より, $\mathrm{Hom}_A(T, X)_B \in \mathcal{PC}(DT_B)$ となる. 逆も同様に示すことができる. ■

Prop 4.2.5 次の equivalence が成り立つ.

$${}_ADT_B : \mathcal{PC}(T_A) \simeq \mathcal{IP}(DT_B)$$

上の証明から次のことがわかる.

Cor 4.2.6 $X, Y \in$ mod-A とする. このとき, $X \in \mathcal{D}(T_A)$, $Y \in \mathcal{ID}(T_A)$ または $X \in \mathcal{PC}(T_A)$, $Y \in \mathcal{C}(T_A)$ ならば, c_Y^X は iso. である.

Prop 4.2.7 次の包含関係が成り立つ.

(1) $\mathcal{ID}(T_A) \subseteq \mathcal{C}(T_A)$, $\mathcal{PC}(T_A) \subseteq \mathcal{D}(T_A)$

(2) $\mathcal{IPC}(T_A) = \mathcal{C}(T_A)$, $\mathcal{PID}(T_A) = \mathcal{D}(T_A)$

proof.

(1) $T_A \in \mathcal{D}(T_A)$ より, $\mathcal{ID}(T_A) \subseteq \operatorname{Ker}\operatorname{Ext}_A^{n>0}(T,-)$ である. また,

$$\mathcal{ID}(T_A) \overset{{}_BT_A}{\simeq} \mathcal{PC}(DT_B) \subseteq \operatorname{Fix}(\eta^T) \cap \operatorname{Ker}\operatorname{Ext}_B^{n>0}(-,DT) \overset{{}_BT_A}{\simeq} \operatorname{gen}^*(T_A)$$

より, $\mathcal{ID}(T_A) \subseteq \operatorname{gen}^*(T_A)$ を得る. 後半はこの dual.

(2) 定義より, $\mathcal{IPC}(T_A) \supseteq \mathcal{C}(T_A)$ である. 逆に, $T_A \in \mathcal{PC}(T_A)$ より, $\mathcal{IPC}(T_A) \subseteq \operatorname{Ker}\operatorname{Ext}_A^{n>0}(T,-)$ である. また,

$$\mathcal{IPC}(T_A) \overset{{}_BT_A}{\simeq} \mathcal{PID}(DT_B) \subseteq \operatorname{Fix}(\eta^T) \cap \operatorname{Ker}\operatorname{Ext}_B^{n>0}(-,DT) \overset{{}_BT_A}{\simeq} \operatorname{gen}^*(T_A)$$

となるから, $\mathcal{IPC}(T_A) \subseteq \mathcal{C}(T_A)$ であることがわかる. ここで, 上の式の一つ目の eq., 二つ目の包含関係は前 Prop と同様に示すことができる. 後半はこの dual.

■

Prop 4.2.8 次が成り立つ.

(1) (i) inj-$A \subseteq \mathcal{ID}(T_A) \subseteq \mathcal{C}(T_A)$
 (ii) $\mathcal{ID}(T_A), \mathcal{C}(T_A)$ は直和因子, monomorphism の cokernel, extension で閉じている.

(2) (i) proj-$A \subseteq \mathcal{PC}(T_A) \subseteq \mathcal{D}(T_A)$
 (ii) $\mathcal{PC}(T_A), \mathcal{D}(T_A)$ は直和因子, epimorphism の kernel, extension で閉じている.

proof. (1) (i) は明らか. (ii) $\mathcal{ID}(T_A)$ のときは明らかだから, $\mathcal{C}(T_A)$ のときを示す. 直和因子で閉じていることは, 前の equivalence を考えれば明らか.

exact : $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ とする.

- $X, Z \in \mathcal{C}(T_A)$ のとき, $Y \in \operatorname{Ker}\operatorname{Ext}_A^{n>0}(T,-)$ であることは明らかだから, Y の right T-dominant resolusion を作れればよい. X_A の right T-dominant resolusion を $\cdots \to T_0^X \to X \to 0$ とおく (Z_A に対しても同様におく). PO, PB による exact 間の commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_0^X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & T_0 \arrow[r] \arrow[d] & T_0^Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & \overline{Y} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & T_0^Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

に対して, Snake lemma より, 次のような exact 間の commuatative diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dotted] & X_1 \arrow[r, dotted] \arrow[d] & Y_1 \arrow[r, dotted] \arrow[d] & Z_1 \arrow[d] \arrow[dddll, dotted] & \\
0 \arrow[r] & T_0^X \arrow[r] \arrow[d] & T_0 \arrow[r] \arrow[d] & T_0^Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

を得る. $T_0 \in \text{add-}T_A$, $\mathrm{Ext}_A^{n>0}(T, Y_1)$ より, $T_0 \to Y \to 0$ は right approximation である. よって, 同様の操作を繰り返せば, Y の right T-dominant resolusion を作ることができる.

- X, $Y \in C(T_A)$ のとき, $Z \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_A^{n>0}(T, -)$ だから, Z_A の right T-dominant resolusion を作れればよい. PB により, commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & W \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y_1 \arrow[r] & T_0^Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & Z \arrow[r, equal] & Z &
\end{tikzcd}$$

を得るが, $Y_1, X \in C(T_A)$ より, $W \in C(T_A)$ となるから, $T_0^Y \to Z \to 0$ は right approximation である. したがって, Z_A の right T-dominant resolusion をとることができた (これは Z_A の minimal right resolusion ではない).

(2) (1) と同様. ■

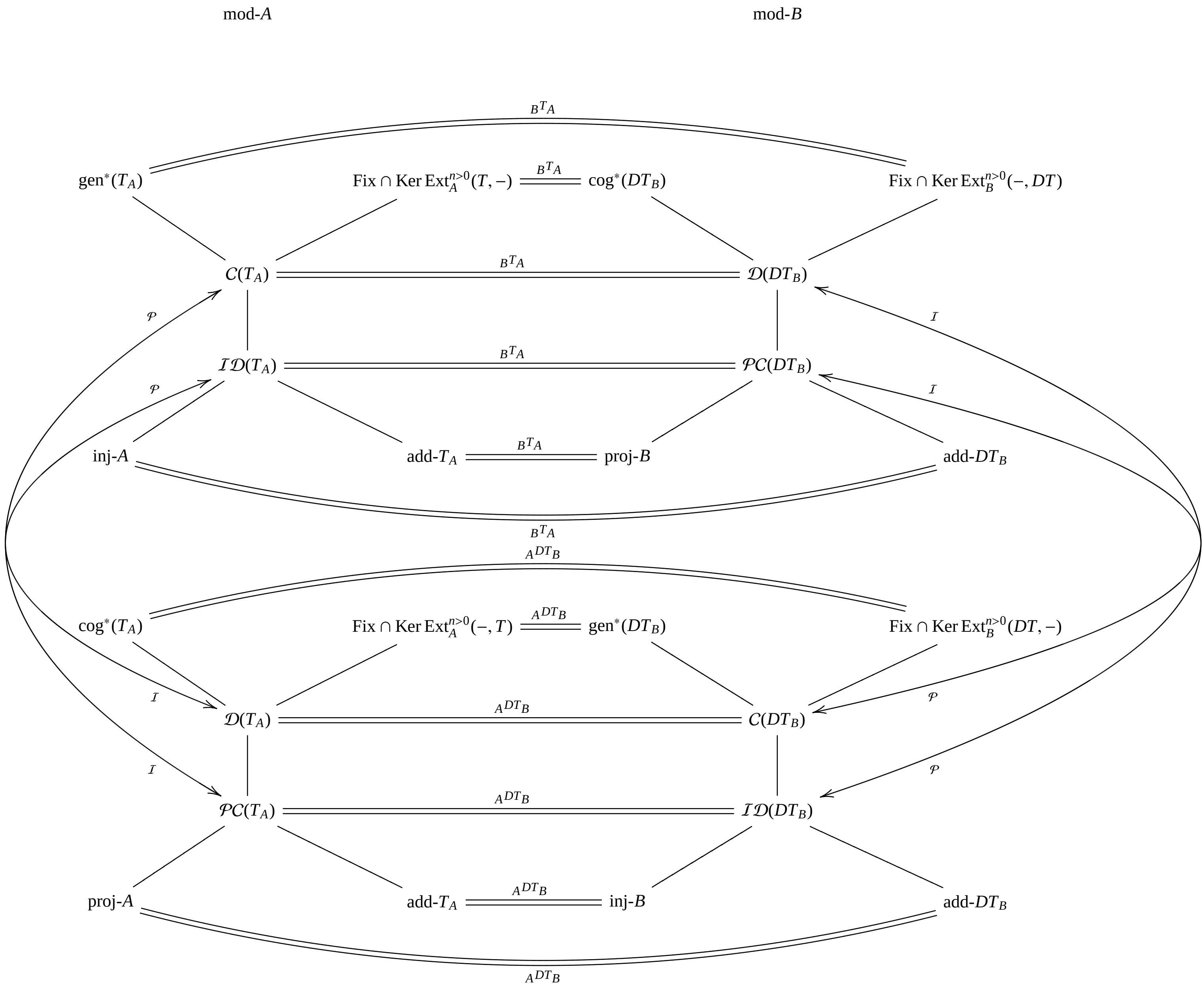
Prop 4.2.9 次が成り立つ.

$$\mathcal{ID}(T_A) \cap \mathcal{D}(T_A) = \text{add-}T_A = \mathcal{PC}(T_A) \cap C(T_A)$$

proof. 明らか. ■

このことから, projective injective module は add-T_A に属すことがわかる．特に, indecomposable projective injective module は Wakamatsu tilting module の直和因子になる．

ここまでのことをまとめると次のようになる．



このように, Wakamatsu tilting module とその endomorphism algebra に対して, module category の full subcategory 間にいくつかの equivalence は存在する．しかし, derived category 間では equivalence が見つからない. それは 2 つの épaisse subcategory, $K^b(\text{proj-}A)$, $K^b(\text{add-}T_A)$ がうまく比べられないところにあるのだと思う (上でも述べたように, Wakamatsu tilting module に対しての resolusion が bounded でとれない). では, Wakamatsu tilting module T_A をとったときの 2 つの algebra A, $B := \mathrm{End}_A(T)$ はどのくらい似ているのか？ また, どのくらいの条件をつければ, derived equivalence (または T_A が tilting module) になるのだろうか？

例えば, (一般に) tilting module でない trivial な Wakamatsu tilting module の例として DA_A があげられるが, このときは, A と B はよく似ている (同型). それでは, non-trivial な例を見てみよう.

Example 4.2.10 Example 2.1.9 (2) に対して, Wakamatsu tilting module を作る. T_A を次のようにおく.

$$T_A := \begin{bmatrix} 1 & & 2 & \\ & 1 & & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

このとき, T_A が Wakamatsu tilting module になっていることを確かめる.

(1) T_A が self-orthogonal であることは省略する.

(2) A_A の left T-dominant resolusion を構成する.

$$\text{exact} : 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & & 2 & \\ & 1 & & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow 0$$

$$\text{exact} : 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & & 2 & \\ & 1 & & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & & 2 & \\ & 1 & & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow T_A \longrightarrow T_A \longrightarrow \cdots$$

また, T_A の projective dimension は無限である.

$$\text{exact} : \cdots \longrightarrow P(1) \longrightarrow P(1) \longrightarrow P(1) \oplus P(2) \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & & 2 & \\ & 1 & & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow 0$$

$$\text{exact} : \cdots \longrightarrow P(1) \longrightarrow P(1) \longrightarrow P(2) \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow 0$$

$B := \mathrm{End}_A(T)$ とおくと, B は Example 2.1.9 (3) の algebra になることが確かめられる. よって, Example 2.2.49 で見たように, A と B は derived equivalent である.

しかし, T_A と Example 2.2.49 でとった tilting complex との関係がまったくわからない.

4.3 Wakamatsu tilting module with finite projective dimension

上で述べたように, Wakamatsu tilting module T_A がどのくらいの条件を持てば, tilting module になっているかを考える. 次のことが予想されている.

Conjecture 4.3.1 [Wakamatsu tilting conjecture (WTC)]
Wakamatsu tilting module T_A が finite projective dimension を持てば, T_A は tilting module か？

以下, T_A を Wakamatsu tilting module, $B := \mathrm{End}_A(T)$ とする. また, π_X^T も前と同様に定める.

Prop 4.3.2 $X_A \in \text{mod-}A$ に対して, 次の exact sequence が存在する.

$$
\begin{aligned}
&0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Ext}_A^1(X,T),T) \longrightarrow \mathrm{Cok}\,\pi_{\Omega(X)}^T \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\pi_X^T \\
&\longrightarrow \mathrm{Ext}_B^1(\mathrm{Ext}_A^1(X,T),T) \longrightarrow \mathrm{Ext}_B^1(\mathrm{Hom}_A(\Omega(X),T),T) \longrightarrow \mathrm{Cok}\,\pi_X^T \\
&\longrightarrow \mathrm{Ext}_B^2(\mathrm{Ext}_A^1(X,T),T) \longrightarrow \mathrm{Ext}_B^2(\mathrm{Hom}_A(\Omega(X),T),T) \longrightarrow \mathrm{Ext}_B^1(\mathrm{Hom}_A(X,T),T) \\
&\longrightarrow \mathrm{Ext}_B^3(\mathrm{Ext}_A^1(X,T),T) \longrightarrow \mathrm{Ext}_B^3(\mathrm{Hom}_A(\Omega(X),T),T) \longrightarrow \mathrm{Ext}_B^2(\mathrm{Hom}_A(X,T),T) \\
&\longrightarrow \mathrm{Ext}_B^4(\mathrm{Ext}_A^1(X,T),T) \longrightarrow \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

proof. X_A の projective resolusion : $0 \to \Omega(X) \to P(X) \to X \to 0$ に $\mathrm{Hom}_A(-,T)$ を apply して,

$$
\text{exact} : 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X,T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P(X),T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\Omega(X),T) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(X,T) \longrightarrow 0
$$

を得る. そこで, 2 つの exact を

$$(*1) \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\Omega(X), T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P(X), T) \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

$$(*2) \qquad 0 \longrightarrow L \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\Omega(X), T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(X, T) \longrightarrow 0$$

とする. このとき, exact $(*1)$ に $\mathrm{Hom}_B(-, T)$ を apply して, Snake lemma より,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dotted] & \mathrm{Ker}\,\delta\cdot\pi^T_{\Omega(X)} \arrow[r, dotted] \arrow[d] & 0 \arrow[r, dotted] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\,\pi^T_X \arrow[d] \arrow[ddddll, dotted] & & \\
0 \arrow[r] & \Omega(X) \arrow[r] \arrow[d, "\pi^T_{\Omega(X)}"'] & P(X) \arrow[r] \arrow[dd, "\simeq\ \pi^T_{P(X)}"] & X \arrow[r] \arrow[dd, "\pi^T_X"] & 0 & \\
& \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(\Omega(X), T), T) \arrow[d, "\delta"'] & & & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(L, T) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(P(X), T), T) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(X, T), T) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1_B(L, T) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
& \mathrm{Cok}\,\delta\cdot\pi^T_{\Omega(X)} \arrow[r, dotted] & 0 \arrow[r, dotted] & \mathrm{Cok}\,\pi^T_X \arrow[r, dotted] & \mathrm{Ext}^1_B(L, T) \arrow[r, dotted] & 0
\end{tikzcd}$$

を得る. ここで, $P \in \text{proj-}A$ に対して, $P \in \mathcal{D}(T_A)$ より, π^T_P は iso., $\mathrm{Hom}_A(P, T) \in \text{add-}_BT$ であることに注意する. よって, $\mathrm{Ker}\,\delta\cdot\pi^T_{\Omega(X)} = 0$, $\mathrm{Ker}\,\pi^T_X \simeq \mathrm{Cok}\,\delta\cdot\pi^T_{\Omega(X)}$, $\mathrm{Cok}\,\pi^T_X \simeq \mathrm{Ext}^1_B(L, T)$, $\mathrm{Ext}^{i+1}_B(L, T) \simeq \mathrm{Ext}^i_B(\mathrm{Hom}_A(X, T), T)$ $(i > 0)$ であることがわかる. したがって, exact $(*2)$ に

$\mathrm{Hom}_B(-,T)$ を apply して,

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r, dotted] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Ext}^1_A(X,T),T) \arrow[r, dotted] \arrow[d] & \mathrm{Cok}\,\pi^T_{\Omega(X)} \arrow[d, equal] \arrow[dddll, dotted] & \\
0 \arrow[r] & \Omega(X) \arrow[r, "\pi^T_{\Omega(X)}"] \arrow[d, "\delta\cdot\pi^T_{\Omega(X)}"'] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(\Omega(X),T),T) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & \mathrm{Cok}\,\pi^T_{\Omega(X)} \arrow[r] & 0 \\
 & \mathrm{Hom}_B(L,T) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_B(L,T) \arrow[d] & & \\
 & \mathrm{Ker}\,\pi^T_X \arrow[r, dotted] & \mathrm{Cok}\,\delta \arrow[r, dotted] \arrow[d, hook] & 0 & \\
 & & \mathrm{Ext}^1_B(\mathrm{Ext}^1_A(X,T),T) \arrow[d] & & \\
 & & \vdots & &
\end{tikzcd}$$

を得る. ■

Prop 4.3.3 次の exact sequence をもつ.

(1) $X_A \in \text{mod-}A$ に対して,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Tor}^B_2(\mathrm{Hom}_A(T,X),T) \arrow[r] & \mathrm{Tor}^B_3(\mathrm{Hom}_A(T,\Omega^{-1}(X)),T) \arrow[r] & \mathrm{Tor}^B_3(\mathrm{Ext}^1_A(T,X),T) \arrow[dll] & \\
 & \mathrm{Tor}^B_1(\mathrm{Hom}_A(T,X),T) \arrow[r] & \mathrm{Tor}^B_2(\mathrm{Hom}_A(T,\Omega^{-1}(X)),T) \arrow[r] & \mathrm{Tor}^B_2(\mathrm{Ext}^1_A(T,X),T) \arrow[dll] & \\
 & \mathrm{Ker}\,\epsilon^T_X \arrow[r] & \mathrm{Tor}^B_1(\mathrm{Hom}_A(T,\Omega^{-1}(X)),T) \arrow[r] & \mathrm{Tor}^B_1(\mathrm{Ext}^1_A(T,X),T) \arrow[dll] & \\
 & \mathrm{Cok}\,\epsilon^T_X \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,\epsilon^T_{\Omega^{-1}(X)} \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_A(T,X)\otimes_B T \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(2) $Y_B \in \text{mod-}B$ に対して,

$$
\begin{aligned}
0 &\to \mathrm{Hom}_A(T, \mathrm{Tor}_1^B(Y, T)) \to \mathrm{Cok}\,\eta^T_{\Omega(X)} \to \mathrm{Ker}\,\eta^T_Y \\
&\to \mathrm{Ext}^1_A(T, \mathrm{Tor}_1^B(Y, T)) \to \mathrm{Ext}^1_A(T, \Omega(Y) \otimes_B T) \to \mathrm{Cok}\,\eta^T_Y \\
&\to \mathrm{Ext}^2_A(T, \mathrm{Tor}_1^B(Y, T)) \to \mathrm{Ext}^2_A(T, \Omega(Y) \otimes_B T) \to \mathrm{Ext}^1_A(T, Y \otimes_B T) \\
&\to \mathrm{Ext}^3_A(T, \mathrm{Tor}_1^B(Y, T)) \to \mathrm{Ext}^3_A(T, \Omega(Y) \otimes_B T) \to \mathrm{Ext}^2_A(T, Y \otimes_B T) \to \cdots
\end{aligned}
$$

ここで, η^T, ϵ^T はそれぞれ adjoint pair $(- \otimes_B T_A, \mathrm{Hom}_A(T, -))$ の unit, counit である.

Prop 4.3.4 次が成り立つ.

(1) $\mathrm{pd}({}_BT) < \infty$ ならば, $\mathcal{C}(T_A) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_A^{n>0}(T, -)$

(2) $\mathrm{pd}(T_A) < \infty$ ならば, $\mathcal{D}(DT_B) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_B^{n>0}(-, DT)$

proof. (1) 定義より, $\mathcal{C}(T_A) \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_A^{n>0}(T, -)$ である. そこで, 逆を示す.

$X_A \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_A^{n>0}(T, -)$ とする. Prop 4.3.3 より,

(a) $\mathrm{Cok}\,\epsilon_X^T \simeq \mathrm{Ker}\,\epsilon^T_{\Omega^{-1}(X)}$　　(b) $\mathrm{Ker}\,\epsilon_X^T \simeq \mathrm{Tor}_1^B(\mathrm{Hom}_A(T, \Omega^{-1}(X)), T)$

(c) $\mathrm{Tor}_i^B(\mathrm{Hom}_A(T, X), T) \simeq \mathrm{Tor}_{i+1}^B(\mathrm{Hom}_B(T, \Omega^{-1}(X)), T)$ $(i > 0)$

を得るが, $\Omega^{-1}(X) \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_A^{n>0}(T, -)$ より, 同様の操作を繰り返して,

- $\mathrm{Cok}\,\epsilon_X^T \simeq \mathrm{Tor}_\ell^B(\mathrm{Hom}_A(T, \Omega^{-\ell-1}(X)), T)$ $(\ell > 0)$
- $\mathrm{Ker}\,\epsilon_X^T \simeq \mathrm{Tor}_\ell^B(\mathrm{Hom}_A(T, \Omega^{-\ell}(X)), T)$ $(\ell > 0)$

を得る.

よって, $\mathrm{pd}({}_BT) < \infty$ ならば, ϵ_X^T は iso. である. したがって,

$$\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_A^{n>0}(T, -) \subseteq \mathrm{Fix}(\epsilon^T) \subseteq \mathrm{gen}^1(T_A)$$

を得る. ここで, $\mathrm{gen}^1(T_A) := \left\{ X_A \in \text{mod-}A \,\middle|\, \text{right } T\text{-dominant resolusion} : T_0 \to X \to 0 \text{ をもつ.} \right\}$ である. ゆえに, exact : $0 \to X_1 \to T_0 \xrightarrow{f} X \to 0$ (f : right T-approximation) に対して, $X_1 \in \mathrm{Ext}_A^{n>0}(T, -)$ だから, 同じ操作を繰り返して, $X \in \mathrm{gen}^*(T_A)$ を得る.

(2) 同様. ■

Prop 4.3.5 [10] $\mathrm{pd}(T_A) < \infty$ ならば, 次は同値である.

(1) T_A は tilting module である. (2) $\sup\left\{\mathrm{pd}(X_A) \,\middle|\, X_A \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_A^{n>0}(-, T) \cap \mathcal{P}^\infty\right\} < \infty$

ここで, $\mathcal{P}^\infty := \left\{X_A \in \text{mod-}A \,\middle|\, \mathrm{pd}(X_A) < \infty\right\}$ である.

proof. A_A の left T-dominant resolusion を $0 \to A_A \to T_0 \xrightarrow{f_0} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} T_n \to \cdots$, $A_i := \mathrm{Ker}\ f_i$ とおく.

(1)⇒(2) $T_{n+1} = 0$ とする. $X_A \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_A^{n>0}(-, T)$ とし, exact : $0 \to A_i \to T_i \to A_{i+1} \to 0$ に $\mathrm{Hom}_A(X, -)$ を apply することで, $\mathrm{Ext}_A^{j+1}(X, A_i) \simeq \mathrm{Ext}_A^j(X, A_{i+1})$ $(j > 0)$ を得るから, $\mathrm{Ext}_A^{i>n}(X, A) = 0$ であることがわかる.

よって, 任意の $M_A \in \text{mod-}A$ に対して, exact : $0 \to \Omega(M) \to P(M) \to M \to 0$ に $\mathrm{Hom}_A(X, -)$ を apply して, $\mathrm{Ext}_A^i(X, M) \simeq \mathrm{Ext}_A^{i+1}(X, \Omega(M))$ $(i > n)$ を得る. これを繰り返せば, $\mathrm{pd}(X) < \infty$ ならば, $\mathrm{Ext}_A^{i>n}(X, -) = 0$ を得る. したがって, $\mathrm{pd}(X) \leq n$ であることがわかる.

(2)⇒(1) exact : $0 \to A_i \to T_i \to A_{i+1} \to 0$ に $\mathrm{Hom}_A(A_\ell, -)$ $(\ell > 0)$ を apply して, $\mathrm{Ext}_A^{j+1}(A_\ell, A_i) \simeq \mathrm{Ext}_A^j(A_\ell, A_{i+1})$ を得る. よって, $\mathrm{pd}(T_A) < \infty$ より, $A_\ell \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_A^{n>0}(-, T) \cap \mathcal{P}^\infty$ となるから, $\mathrm{pd}(A_\ell) \leq m$ とすると (仮定より $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}_A^{n>0}(-, T) \cap \mathcal{P}^\infty$ に属する任意の module の projective dimension はある自然数 m で抑えられる), $\mathrm{Ext}_A^{n>0}(A_\ell, A_m) = 0$ を得る. したがって, $n = 1$, $\ell = m + 1$ のときを考えれば, exact : $0 \to A_m \to T_m \to A_{m+1} \to 0$ は split するから, $A_m \in \text{add-}T_A$ となる. ■

4.4 Wakamatsu tilting module と stable equivalence

Wakamatsu tilting module (+ 条件) が与えられたとき, ある symmetric algebra 間に stable equivalence が存在する. ここではこのことについて解説する.

4.4.1 Algebra の extension

${}_AM_A$ に対して, (A, A)-bimodule homo $\varphi : M \otimes_A M \to M$, $\psi : M \otimes_A M \to DA$ を次を満たすものとする.

(1) φ は associative [$\varphi(m \otimes \varphi(m' \otimes m'')) = \varphi(\varphi(m \otimes m') \otimes m'')$] かつ nilpotent [ある i が存在して, $\varphi^i = 0$] である.

(2) ψ は φ-associative $[\psi(m \otimes \varphi(m' \otimes m'')) = \psi(\varphi(m \otimes m') \otimes m'')]$ かつ non-degenerate $[\psi(m \otimes M) = 0$ または $\psi(M \otimes m) = 0$ ならば, $m = 0]$ である.

(3) $\psi(m \otimes m')(1_A) = \psi(m' \otimes m)(1_A)$

このとき, ${}_A\Lambda_A := A \oplus M \oplus DA$ とおき, 積を次のように定める.

$$(a, m, f) \cdot (a', m', f') := (aa', am' + ma' + \varphi(m \otimes m'), af' + fa' + \psi(m \otimes m'))$$

Λ は symmetric algebra になり[*36], nilpotent symmetric algebra という. 特に, $M = 0$ のとき, trivial extension という.

また, ${}_BT_A$ に対して,

$$ {}_BM^T_B := {}_BT \otimes_A \mathrm{Hom}_A(T, M)$$

$$\begin{array}{rccc} \varphi^T : & {}_BM^T \otimes_B M^T_B & \longrightarrow & {}_BM^T_B \\ & \Downarrow & & \Downarrow \\ & (t \otimes f) \otimes (t' \otimes f') & \longmapsto & t \otimes [t'' \mapsto \varphi(f(t') \otimes f'(t''))] \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \psi^T : & {}_BM^T \otimes_B M^T_B & \longrightarrow & {}_BDB_B \\ & \Downarrow & & \Downarrow \\ & (t \otimes f) \otimes (t' \otimes f') & \longmapsto & [b \mapsto \psi(f(t') \otimes f'(bt))(1_A)] \end{array}$$

とおくと, ψ^T の non-degenerate 性を除いて, 上の (1)〜(3) を満たす. そこで, ${}_B\Gamma_B := \Lambda^T := B \oplus M^T \oplus DB$ とおき, 積を上と同様に定める. また,

$$\begin{array}{rccc} \theta_{T,M} : & {}_BM^T_B & \longrightarrow & {}_BD(M^T)_B \\ & \Downarrow & & \Downarrow \\ & t \otimes f & \longmapsto & [t' \mapsto t \otimes f(t')] \end{array}$$

とおくと, Γ が symmetric algebra であることと $\theta_{T,M}$ が iso. であることは同値である.

Prop 4.4.1 T_A を Wakamatsu tilting module とし, $\cdots \to P_1 \to P_0 \to T_A \to 0$ を T_A の projective resolusion とする. このとき, M_A, $T \otimes_A M_A \in C(T_A)$ ならば, 次は同値である.

(1) $\theta_{T,M}$ は isomorphism である.

---

*36

$$\begin{array}{rccc} \chi_\psi : & {}_AM_A & \longrightarrow & {}_ADM_A \\ & \Downarrow & & \Downarrow \\ & m & \longmapsto & [m' \mapsto \psi(m \otimes m')(1_A)] \end{array}$$

により, ${}_AM_A \simeq {}_ADM_A$ となる (ψ の non-degenerate 性から χ_ψ は mono. であることがわかる).

(2) exact : $\cdots \to \mathrm{Hom}_A(T, P_1 \otimes_A M) \to \mathrm{Hom}_A(T, P_0 \otimes_A M) \to \mathrm{Hom}_A(T, T \otimes_A M) \to 0$

(3) $\Omega^n(T) \otimes_A M_A \in \mathcal{C}(T_A)$ $(n > 0)$

(4) functor : $- \otimes_A M_A : \mathcal{PC}(T_A) \to \mathcal{C}(T_A)$

<u>**proof.**</u> まず, $\Omega^n(T_A) \in \mathcal{PC}(T_A)$ であることに注意する. よって, (4)⇒(3) は明らか. また, $X_A \in \text{mod-}A$ に対して,

$$\begin{array}{cccc} \theta_{X,M}: & X \otimes_A \mathrm{Hom}_A(T,M)_B & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(T, X \otimes_A M)_B \\ & \Psi & & \Psi \\ & x \otimes f & \longmapsto & [t \mapsto x \otimes f(t)] \end{array}$$

と定義する. $X_A = T_A$ のときは上の $\theta_{T,M}$ と一致する. $X_A \in \text{proj-}A$ ならば, $\theta_{X,M}$ は iso. である.

(1)⇔(2) 次の commutative diagram

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & P_1 \otimes_A \mathrm{Hom}_A(T,M) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"', "\theta_{P_1,M}"] & P_0 \otimes_A \mathrm{Hom}_A(T,M) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"', "\theta_{P_0,M}"] & T \otimes_A \mathrm{Hom}_A(T,M) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_{T,M}"] & 0 \\ \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(T, P_1 \otimes_A M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(T, P_0 \otimes_A M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(T, T \otimes_A M) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

に対して, 上行は $\Omega^n(T) \in \mathcal{PC}(T_A)$, $T_A \otimes_A M_A \in \mathcal{C}(T_A)$ より, exact である. よって, (1) と (2) が同値であることがわかる.

(3)⇒(2) $\Omega^n(T) \in \mathcal{PC}(T_A)$, $M_A \in \mathcal{C}(T_A)$ より,

$$\text{exact} : \cdots \longrightarrow P_1 \otimes_A M_A \longrightarrow P_0 \otimes_A M_A \longrightarrow T \otimes_A M_A \longrightarrow 0$$

を得るが, (3) より $\Omega^n(T) \otimes_A M_A \in \mathcal{C}(T_A)$ となるから, (2) を得る.

(1)⇒(4) $W \in \mathcal{PC}(T_A)$ とする. W の left T-dominant resolusion を $0 \to W \to T_0 \to T_1 \to \cdots$ とおき, 各 kernel を W_i とする $(W = W_0)$. このとき, $W_i \in \mathcal{PC}(T_A)$, $M_A \in \mathcal{C}(T_A)$ より,

$$\text{exact}\,(*1) : 0 \longrightarrow W_i \otimes_A M_A \longrightarrow T_i \otimes_A M_A \longrightarrow W_{i+1} \otimes_A M_A \longrightarrow 0$$

また, $W_i \in \mathcal{PC}(T_A)$, $T \otimes_A M_A \in \mathcal{C}(T_A)$ より,

$$\text{exact}\,(*2) : 0 \longrightarrow W_i \otimes_A \mathrm{Hom}_A(T,M)_B \longrightarrow T_i \otimes_A \mathrm{Hom}_A(T,M)_B \longrightarrow W_{i+1} \otimes_A \mathrm{Hom}_A(T,M)_B \longrightarrow 0$$

を得る. そこで, $(*1)$ に $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ を apply して $(*2)$ と組み合わせることで, exact 間の commutative diagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & W_i \otimes_A \mathrm{Hom}_A(T,M)_B \arrow[r] \arrow[d, "\theta_{W_i,M}"'] & T_i \otimes_A \mathrm{Hom}_A(T,M)_B \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"', "\theta_{T_i,M}"] & W_{i+1} \otimes_A \mathrm{Hom}_A(T,M)_B \arrow[r] \arrow[d, "\theta_{W_{i+1},M}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(T, W_i \otimes_A M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(T, T_i \otimes_A M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(T, W_{i+1} \otimes_A M) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_A(T, W_i \otimes_A M) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

を得る. よって, Snake lemma より,

(a) $\operatorname{Ker}\theta_{W_i,M}=0$ (b) $\operatorname{Cok}\theta_{W_i,M}\simeq\operatorname{Ker}\theta_{W_{i+1},M}$ (c) $\operatorname{Cok}\theta_{W_{i+1},M}\simeq\operatorname{Ext}^1_A(T,W_i\otimes_A M)$
(d) $\operatorname{Ext}^{j+1}_A(T,W_i\otimes_A M)\simeq\operatorname{Ext}^j_A(T,W_{i+1}\otimes_A M)$ $(j>0)$

であることがわかる. これは $i\geq 0$ に対して成り立つから,

(i) $\theta_{W,M}$ は iso. よって, $W\otimes_A M_A\in\operatorname{Fix}(\epsilon^T)$ (ii) $W\otimes_A M_A\in\operatorname{Ker}\operatorname{Ext}^{n>0}_A(T,-)$

を得る. ゆえに,

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Fix}(\epsilon^T)\cap\operatorname{Ker}\operatorname{Ext}^{n>0}_A(T,-) & \overset{{}_BT_A}{\simeq} & \operatorname{cog}^*(DT_B)\\
\Cup & & \Cup\\
W\otimes_A M & \longleftrightarrow & \operatorname{Hom}_A(T,W\otimes_A M)
\end{array}$$

であることがわかる.

さらに, W の proj. resol. : $\cdots\to Q_1\to Q_0\to W\to 0$ に対して, $\Omega^n(W)\in\mathcal{PC}(T_A)$, $T\otimes_A M_A\in\mathcal{C}(T_A)$ より,

$$\text{exact}: 0\longrightarrow\Omega^{n+1}(W)\otimes_A\operatorname{Hom}_A(T,M)\longrightarrow Q_n\otimes_A\operatorname{Hom}_A(T,M)\longrightarrow\Omega^n(W)\otimes_A\operatorname{Hom}_A(T,M)\longrightarrow 0$$

を得るが, さらに, $-\otimes_B T_A$ を apply して ($M_A\in\mathcal{C}(T_A)$ より, $\operatorname{Hom}_A(T,M)\in\mathcal{D}(DT_B)$ となるから, $\operatorname{Tor}^B_{n>0}(\operatorname{Hom}_A(T,M),T)=0$),

$$0\longrightarrow\operatorname{Tor}^B_1(\Omega^n(W)\otimes_A\operatorname{Hom}_A(T,M),T)\longrightarrow\Omega^{n+1}(W)\otimes_A\operatorname{Hom}_A(T,M)\otimes_B T\longrightarrow Q_n\otimes_A\operatorname{Hom}_A(T,M)\otimes_B T\longrightarrow\Omega^n(W)\otimes_A\operatorname{Hom}_A(T,M)\otimes_B T\longrightarrow 0$$

$$\operatorname{Tor}^B_{j+1}(\Omega^n(W)\otimes_A\operatorname{Hom}_A(T,M),T)\simeq\operatorname{Tor}^B_j(\Omega^{n+1}(W)\otimes_A\operatorname{Hom}_A(T,M),T)\ (j>0)$$

であることがわかる. これは $n\geq 0$ で成り立つから, $\operatorname{Tor}^B_{j>0}(W\otimes_A\operatorname{Hom}_A(T,M),T)=0$ を得る. したがって, $\operatorname{Hom}_A(T,W\otimes_A M)\simeq W\otimes_A\operatorname{Hom}_A(T,M)\in\operatorname{Ker}\operatorname{Ext}^{n>0}_B(-,DT)$ である. ゆえに,

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{gen}^*(T_A) & \overset{{}_BT_A}{\simeq} & \operatorname{Fix}(\eta^T)\cap\operatorname{Ker}\operatorname{Ext}^{n>0}_B(-,DT)\\
\Cup & & \Cup\\
W\otimes_A T & \longleftrightarrow & \operatorname{Hom}_A(T,W\otimes_A M)
\end{array}$$

を得る.

よって, $W_A\in\mathcal{C}(T_A)$ であることがわかる. ■

<u>**Cor**</u> **4.4.2** T_A を Wakamatsu tilting module with finite projective dimension とする. このとき, $M_A\in\mathcal{C}(T_A)$ ならば, 任意の $\ell\geq 0$ に対して, $\Omega^\ell(T)\otimes_A M_A\in\mathcal{C}(T_A)$ となる. よって, $\theta_{T,M}$ は isomorphism である.

4.4.2 Ker$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, Cok$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

$\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq$ mod-A に対して,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &:= \left\{ X_A \in \text{mod-}A \,\middle|\, {}^{\exists}\text{exact} : 0 \to X \to V \to W \to 0,\ V \in \mathcal{A},\ W \in \mathcal{B} \right\} \\ \mathrm{Cok}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &:= \left\{ X_A \in \text{mod-}A \,\middle|\, {}^{\exists}\text{exact} : 0 \to V \to W \to X \to 0,\ V \in \mathcal{A},\ W \in \mathcal{B} \right\} \end{aligned}$$

とおく.

以下, T_A を Wakamatsu tilting module, $B := \mathrm{End}_A(T)$ とおく.

Prop 4.4.3 次が成り立つ.

(1) $\mathrm{Ker}(\mathcal{C}(T_A), \mathcal{PC}(T_A)) = \mathrm{Cok}(\mathcal{C}(T_A), \mathcal{PC}(T_A))$

(2) $\mathrm{Ker}(\mathcal{ID}(T_A), \mathcal{D}(T_A)) = \mathrm{Cok}\,\mathcal{ID}(T_A), \mathcal{D}(T_A))$

proof. (1) ”$\subseteq$” $X_A \in \mathrm{Ker}(\mathcal{C}(T_A), \mathcal{PC}(T_A))$ に対して, exact : $0 \to X \to V \to W \to 0$, $V \in \mathcal{C}(T_A)$, $W \in \mathcal{PC}(T_A)$ とする. また, $V \in \mathcal{C}(T_A)$ より, right T-approximation : $T_0 \to V \to 0$ が存在する. よって, exact 間の commutative diagram

$$\begin{tikzcd} & V_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & V_1 \arrow[d] & & \\ 0 \arrow[r] & W_1 \arrow[r] \arrow[d] & T_0 \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r] & V \arrow[r] & W \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

を得る. ここで, V_1 は $T_0 \twoheadrightarrow V$ の kernel, W_1 は $T_0 \twoheadrightarrow V \twoheadrightarrow W$ の kernel である. したがって, exact : $0 \to V_1 \to W_1 \to X \to 0$ を得るが, $V \in \mathcal{C}(T_A)$ より, $V_1 \in \mathcal{C}(T_A)$, また, $\mathcal{PC}(T_A)$ は epi. の kernel で閉じているから, $W_1 \in \mathcal{PC}(T_A)$ となることがわかる. ”$\supseteq$” $X_A \in \mathrm{Cok}(\mathcal{C}(T_A), \mathcal{PC}(T_A))$ に対して, exact : $0 \to V \to W \to X \to 0$, $V \in \mathcal{C}(T_A)$, $W \in \mathcal{PC}(T_A)$ とすると, $W \in \mathcal{PC}(T_A) \subseteq \mathcal{D}(T_A)$ より, left T-dominant resolusion $0 \to W \to T_0$ が存在する.

よって, exact 間の commutative diagram

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V \arrow[r] \arrow[d, equal] & W \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & V \arrow[r] & T_0 \arrow[r] \arrow[d] & V_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & W_1 \arrow[r, equal] & W_1 &
\end{tikzcd}
$$

を得る. ここで, W_1, V_1 はそれぞれ $W \hookrightarrow T_0$, $V \hookrightarrow W \hookrightarrow T_0$ の cokernel である. したがって, exact : $0 \to X \to V_1 \to W_1 \to 0$ を得るが, $W \in \mathcal{PC}(T_A)$ より, $W_1 \in \mathcal{PC}(T_A)$, また, $\mathcal{C}(T_A)$ は mono. の cokernel で閉じているから, $V_1 \in \mathcal{C}(T_A)$ となることがわかる. (2) 同様. ■

Prop 4.4.4 exact : $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ に対して, X, Y, Z のうち 2 つが $\operatorname{Ker}(\mathcal{C}(T_A), \mathcal{PC}(T_A))$ に属せば, 残りの 1 つも $\operatorname{Ker}(\mathcal{C}(T_A), \mathcal{PC}(T_A))$ に属す.

proof. $X_A \in \operatorname{Ker}(\mathcal{C}(T_A), \mathcal{PC}(T_A))$ に対して, exact : $0 \to X \to V_X \to W_X \to 0$, $V_X \in \mathcal{C}(T_A)$, $W_X \in \mathcal{PC}(T_A)$, また, 前 Prop により $\operatorname{Ker}(\mathcal{C}(T_A), \mathcal{PC}(T_A)) = \operatorname{Cok}(\mathcal{C}(T_A), \mathcal{PC}(T_A))$ だから, exact : $0 \to V^X \to W^X \to X \to 0$, $V^X \in \mathcal{C}(T_A)$, $W_X \in \mathcal{PC}(T_A)$ と書くことにする.

(1) X, $Z \in \operatorname{Ker}(\mathcal{C}(T_A), \mathcal{PC}(T_A))$ のとき

PO, PB による commutative diagram

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & V_X \arrow[r] \arrow[d, equal] & \overline{Y} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & V_X \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d] & V_Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & W_X \arrow[r] & W \arrow[r] & W_Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

より, exact : $0 \to Y \to V \to W \to 0$ を得るが, $\mathcal{C}(T_A)$, $\mathcal{PC}(T_A)$ は extension で閉じているから, 主張を得る.

(2) X, $Y \in \operatorname{Ker}((\mathcal{C}(T_A), \mathcal{PC}(T_A)))$ のとき

exact 間の commutative diagram

$$
\begin{tikzcd}
 & V^Y \arrow[r, equal] \arrow[d] & V^Y \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \overline{X} \arrow[r] \arrow[d] & W^Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

を得る. ここで, $\overline{X}$ は $W^Y \twoheadrightarrow Y \twoheadrightarrow Z$ の kernel である. exact : $0 \to V^Y \to \overline{X} \to X \to 0$ に対して, (1) から $\overline{X} \in \mathrm{Ker}\,(\mathcal{C}(T_A), \mathcal{PC}(T_A))$ である. よって, PO により

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \overline{X} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & W^Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & V_{\overline{X}} \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] & 0 \\
 & W_{\overline{X}} \arrow[r, equal] & W_{\overline{X}} & &
\end{tikzcd}
$$

を得るが, $W \in \mathcal{PC}(T_A)$ だから $Z \in \mathrm{Cok}\,(\mathcal{C}(T_A), \mathcal{PC}(T_A)) = \mathrm{Ker}\,(\mathcal{C}(T_A), \mathcal{PC}(T_A))$ を得る.

(3) $Y, Z \in \mathrm{Ker}\,(\mathcal{C}(T_A), \mathcal{PC}(T_A))$ のとき
exact 間の commutative diagram

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & V_Y \arrow[r] \arrow[d] & \overline{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & W_Y \arrow[r, equal] & W_Y &
\end{tikzcd}
$$

を得る. ここで, $\overline{Z}$ は $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow V_Y$ の cokernel である. exact : $0 \to Z \to \overline{Z} \to W_Y \to 0$ に対して, (1) から $\overline{Z} \in \mathrm{Ker}\,(\mathcal{C}(T_A), \mathcal{PC}(T_A)) = \mathrm{Cok}\,(\mathcal{C}(T_A), \mathcal{PC}(T_A))$ である. よって,

PB により,

$$\begin{tikzcd} & & V^{\overline{Z}} \arrow[r, equal] \arrow[d] & V^{\overline{Z}} \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & V \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & W^{\overline{Z}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r] & V_Y \arrow[r] & \overline{Z} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

を得るが, $V \in \mathcal{C}(T_A)$ より, 主張を得る.

■

Cor 4.4.5 次が成り立つ.

(1) すべての simple A-module が $\mathrm{Ker}\,(\mathcal{C}(T_A), \mathcal{PC}(T_A))$ に属せば, $\mathrm{Ker}\,(\mathcal{C}(T_A), \mathcal{PC}(T_A)) = \text{mod-}A$ となる.

(2) $X_A \in \text{mod-}A$ に対して, $\mathrm{pd}(X_A) < \infty$ または $\mathrm{id}(X_A) < \infty$ ならば, $X_A \in \mathrm{Ker}\,(\mathcal{C}(T_A), \mathcal{PC}(T_A))$ である.

4.4.3 Stable equivalence

T_A を Wakamatsu tilting module, $B := \mathrm{End}_A(T)$ とし, 上のように ${}_AM_A$, Λ (nilpotent symmetric algebra over M), Γ を定義する. また, $\theta_{T,M}$ も上と同じとする.

Thm 4.4.6 次を仮定する.

(1) M_A, $T \otimes_A M_A \in \mathcal{C}(T_A)$

(2) $\theta_{T,M}$ は isomorphism である.

(3) $\text{mod-}A = \mathrm{Ker}\,(\mathcal{C}(T_A), \mathcal{PC}(T_A))$, $\text{mod-}B = \mathrm{Cok}\,(\mathcal{ID}(DT_B), \mathcal{D}(DT_B))$

このとき, Λ と Γ は stable equivalent である. 特に, T_A が tilting module ならば, Λ と Γ は derived equivalent である.

Remark 4.4.7 T_A が tilting module のとき,

(i) (Λ 上の) tilting complex は T_A の projective resolusion : $0 \to P^\bullet \to T_A \to 0$ に対して, $P^\bullet \otimes_A \Lambda$ で与えられる. 実際, 任意の proj. Λ-module は proj. A-module に $-\otimes_A \Lambda$ を apply することで得られるから, $P^\bullet \otimes_A \Lambda \in K^b(\text{proj-}\Lambda)$ であり, $\text{add-}(P^\bullet \otimes_A \Lambda)$ は

(triangulated cat. として) $K^b(\text{proj-}\Lambda)$ を生成する．また,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}\Lambda)}(P^\bullet \otimes_A \Lambda, P^\bullet \otimes_A \Lambda[n]) \\
&= \mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P^\bullet, P^\bullet \otimes_A \Lambda_A[n]) \\
&= \mathrm{Hom}_{K^b(\text{mod-}A)}(P^\bullet, P^\bullet[n]) \oplus \mathrm{Hom}_{K^b(\text{mod-}A)}(P^\bullet, P^\bullet \otimes_A M[n]) \oplus \mathrm{Hom}_{K^b(\text{mod-}A)}(P^\bullet, P^\bullet \otimes_A DA[n]) \\
&= \mathrm{Hom}_{K^b(\text{mod-}A)}(P^\bullet, P^\bullet[n]) \oplus \mathrm{Hom}_{K^b(\text{mod-}A)}(P^\bullet, P^\bullet \otimes_A M[n]) \oplus D\mathrm{Hom}_{K^b(\text{mod-}A)}(P^\bullet[n], P^\bullet) \\
&= \mathrm{Hom}_{D^b(\text{mod-}A)}(T, T[n]) \oplus \mathrm{Hom}_{D^b(\text{mod-}A)}(T, T \otimes_A M[n]) \oplus D\mathrm{Hom}_{D^b(\text{mod-}A)}(T[n], T) \\
&= \begin{cases} B \oplus M^T \oplus DB & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases} = \begin{cases} \Gamma & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}
\end{aligned}$$

(ii) 仮定 (1)〜(3) のうち, $M_A \in \mathcal{C}(T_A)$ だけを仮定すればよい．実際, T_A が tilting module ならば, 上の corollary から $T \otimes_A M_A \in \mathcal{C}(T_A)$ と (2) を得る．また, 任意の $X_A \in \text{mod-}A$ に対して, $\mathrm{pd}(T_A) < \infty$ より, ある自然数 m が存在して, $\mathrm{Ext}_A^{n>0}(T, \Omega^{-m}(X)) = 0$ (m は $\mathrm{pd}(T_A)$ で決まる) となるから, $\mathrm{pd}({}_BT) < \infty$ より, $\Omega^{-m}(X) \in \mathrm{Ext}_A^{n>0}(T, -) = \mathcal{C}(T_A)$ を得る．よって, $X_A \in \mathrm{Ker}\,(\mathcal{C}(T_A), \mathcal{PC}(T_A))$ であることがわかる．

付録 A　Derived category on Mod-A

ここでは, $D(\text{Mod-}A)$ が homotopy cat. $K(\text{Mod-}A)$ 内に引き戻せることをを証明する．なお, 2.2.2 でのことは有限生成でなくても成り立つ．また, Mod-A の full subcat. Proj-A, Inj-A をそれぞれ projective mod. , injective mod. の category とする (有限生成以外も全部とる).

A.1　準備

Def A.1.1 $\mathcal{C}$ を category (additive category でなくてもよい) とする.

(1) $\mathcal{C}$ が small category であるとは, $\mathcal{C}$ の object の集まりが集合になるときにいう.
(2) $I \in \mathcal{C}$ が initial object であるとは, 任意の $C \in \mathcal{C}$ に対して, set : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I, C)$ がただ 1 つの元からなるときにいう.
(3) $T \in \mathcal{C}$ が terminal object であるとは, 任意の $C \in \mathcal{C}$ に対して, set : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, T)$ がただ 1 つの元からなるときにいう.

(4) $0 \in \mathcal{C}$ が zero object であるとは, initial かつ terminal object であるときにいう.

Remark A.1.2 category $\mathcal{C}$ (additive category でなくてもよい) に対して, initial または terminal object が存在するとは限らない. よって, 0 が存在するとは限らない. また, initial object は存在したら一意的である. terminal object に対しても同様.

Def A.1.3 $\mathcal{C}$ を category, Λ を small category とする (additive category でなくてもよい). functor category $\mathcal{C}^\Lambda$ を次のように定義する.

- object F
  $F : \Lambda \to \mathcal{C}$: functor
- morphism $t : F \to G$
  $\alpha : \lambda \to \mu \in \Lambda$ に対して,

$$\begin{tikzcd} F(\lambda) \arrow[r, "F(\alpha)"] \arrow[d, "t_\lambda"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F(\mu) \arrow[d, "t_\mu"] \\ G(\lambda) \arrow[r, "G(\alpha)"'] & G(\mu) \end{tikzcd}$$

Def A.1.4 $\mathcal{C}$ を category, Λ を small category とする (additive category でなくてもよい). $F \in \mathcal{C}^\Lambda$ に対して, category $\mathcal{C}_F$ (additive category とは限らない) を次のように定義する.

- object $(X, \{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$
  $X \in \mathcal{C}$, $f_\lambda : X \to F(\lambda) \in \mathcal{C}$ で, 任意の $\alpha : \lambda \to \mu$ に対して,

$$\begin{tikzcd} & F(\lambda) \arrow[dr, "F(\alpha)"] & \\ X \arrow[ur, "f_\lambda"] \arrow[rr, "f_\mu"'] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "\circlearrowleft"] & & F(\mu) \end{tikzcd}$$

- morphism $h : (X, \{f_\lambda\}) \to (Y, \{g_\lambda\})$
  $h : X \to Y \in \mathcal{C}$, $\lambda \in \Lambda$ に対して,

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "g_\lambda"] & \\ X \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "f_\lambda"'] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "\circlearrowleft"] & & F(\lambda) \end{tikzcd}$$

また, C_F の terminal object を F の limit といい, $\varprojlim F$ とかく. 特に, Λ が集合のとき (object は Λ の元, morphism は identity だけとして small category とみる), F の limit を product という (直積). またこのとき, $\varprojlim F := (X, \{p_\lambda\})$ に対して, p_λ を projection という.

Remark A.1.5 (1) $C(\text{Mod-}A)$ の object と morphism の列 : $\cdots \to X^\bullet_{n+1} \xrightarrow{f^\bullet_{n+1}} X^\bullet_n \to \cdots \to X^\bullet_0$ とこの列により与えられる functor $F : \mathbb{N} \to C(\text{Mod-}A)$ (ここでは, $0 \in \mathbb{N}$ とする) に対して, その limit $\varprojlim F$ が存在する. $p_m : \prod X^\bullet_n \to X^\bullet_m$ を projection とすると, $\varprojlim F = (X^\bullet, \{p_n\})$, $X^\bullet \subseteq \prod X^\bullet_n$ である. また, shift : $\prod X^\bullet_n \to \prod X^\bullet_n$ を

$$\begin{tikzcd}
\prod X^\bullet_n \arrow[r, "\mathrm{shift}"] \arrow[d, "p_{m+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \prod X^\bullet_n \arrow[d, "p_m"] \\
X^\bullet_{m+1} \arrow[r, "f^\bullet_{m+1}"'] & X^\bullet_m
\end{tikzcd}$$

となる morphism とすると,

$$0 \longrightarrow X^\bullet \longrightarrow \prod X^\bullet_n \xrightarrow{1-\mathrm{shift}} \prod X^\bullet_n$$

は exact である. 逆に, $\mathrm{Ker}\,(1-\mathrm{shift})$ は limit になる. つまり, F の limit は $1-\mathrm{shift}$ の kernel で与えられる. $\varprojlim X^\bullet_n := X^\bullet$ とおく. また, $1-\mathrm{shift}$ で作られる triangle ((TR2) でずらして) を

$$\prod X^\bullet_n[-1] \longrightarrow h\varprojlim X^\bullet_n \longrightarrow \prod X^\bullet_n \xrightarrow{1-\mathrm{shift}} \prod X^\bullet_n$$

つまり, $h\varprojlim X^\bullet_n := C(1-\mathrm{shift})[-1]$ とおく.

(2) $X^\bullet \in C(\text{Mod-}A)$, $n \in \mathbb{N}$ に対して, $X^\bullet_n \in C(\text{Mod-}A)$ を

$$0 \longrightarrow \mathrm{Cok}\, d^{-n-1}_{X^\bullet} \xrightarrow{d^{-n}_{X^\bullet}} X^{-n+1} \xrightarrow{d^{-n+1}_{X^\bullet}} X^{-n+2} \longrightarrow \cdots$$

とする. このとき, 列 : $\cdots \to X^\bullet_{n+1} \to X^\bullet_n \to \cdots \to X^\bullet_0$ が作れて, $X^\bullet \simeq \varprojlim X^\bullet_n$ となる. なぜなら, $X^\bullet \simeq \mathrm{Ker}\,(1-\mathrm{shift})$ となるから ($X^\bullet \to \prod X^\bullet_m$ は daigonal に入れる).

Def A.1.6 C を category, Λ を small category とする (additive category でなくてもよい). $F \in C^\Lambda$ に対して, category C^F (additive category とは限らない) を次のように定義する.

- object $(\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}, X)$
  $X \in \mathcal{C}$, $f_\lambda : F(\lambda) \to X \in \mathcal{C}$ で, 任意の $\alpha : \lambda \to \mu$ に対して,

$$\begin{tikzcd} & F(\mu) \arrow[dr, "f_\mu"] & \\ F(\lambda) \arrow[ur, "F(\alpha)"] \arrow[rr, "f_\lambda"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4, "\circlearrowright"] & & X \end{tikzcd}$$

- morphism $h : (\{f_\lambda\}, X) \to (\{g_\lambda\}, Y)$
  $h : X \to Y \in \mathcal{C}$, $\lambda \in \Lambda$ に対して,

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "h"] & \\ F(\lambda) \arrow[ur, "f_\lambda"] \arrow[rr, "g_\lambda"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4, "\circlearrowright"] & & Y \end{tikzcd}$$

また, $\mathcal{C}^F$ の initial object を F の <u>colimit</u> といい, $\varinjlim F$ とかく. 特に, Λ が集合のとき, F の colimit を <u>coproduct</u> という (直和). またこのとき, $\varinjlim F := (\{i_\lambda\}, X)$ に対して, i_λ を <u>injection</u> という.

A.2 $D(\text{Mod-}A)$ の $K(\text{Mod-}A)$ への引き戻し

<u>Def</u> A.2.1

$$K(\text{Inj-}A)_L := \left\{ I^\bullet \in K(\text{Inj-}A) \,\middle|\, I^\bullet \text{は } \mathcal{U}\text{-local} \right\}$$

とおく. Lemma 2.2.2 より, $K^b(\text{Inj-}A) \subseteq K^+(\text{Inj-}A) \subseteq K(\text{Inj-}A)_L$ となる.

<u>Lemma</u> A.2.2 次が成り立つ.

(1) $K(\text{Inj-}A)_L$ は $K(\text{Mod-}A)$ の full triangulated subcategory である. さらに, 直積で閉じている.

(2) $\mathcal{U} \cap K(\text{Inj-}A)_L = 0$

<u>proof.</u> 明らか.

<u>Lemma</u> A.2.3 $X^\bullet \in K(\text{Mod-}A)$ に対して, $I^\bullet \in K(\text{Inj-}A)_L$ が存在して, $X^\bullet \simeq I^\bullet$ in $D(\text{Mod-}A)$ となる.
<u>proof.</u> 次の step で示す.

(Step 1) $X^\bullet \simeq h\varprojlim X_m^\bullet$ in $D(\text{Mod-}A)$

proof. triangle $(*)$: $\prod X_m^\bullet[-1] \to h\varprojlim X_m^\bullet \to \prod X_m^\bullet \xrightarrow{1-\text{shift}} \prod X_m^\bullet$ に $\mathrm{Hom}_{K(\text{Mod-}A)}(X^\bullet, -)$ を apply して,

$$\text{exact}: \mathrm{Hom}_{K(\text{Mod-}A)}(X^\bullet, h\varprojlim X_m^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K(\text{Mod-}A)}(X^\bullet, \prod X_m^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K(\text{Mod-}A)}(X^\bullet, \prod X_m^\bullet)$$

を得るが, $X^\bullet = \mathrm{Ker}\,(1-\text{shift})$ であることに注意して, 次の commutative diagram in $K(\text{Mod-}A)$ を得る.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & \prod X_m^\bullet \arrow[r, "1-\text{shift}"] \arrow[d, equal] & \prod X_m^\bullet \arrow[d, equal] \\
h\varprojlim X_m^\bullet \arrow[r] & \prod X_m^\bullet \arrow[r, "1-\text{shift}"'] & \prod X_m^\bullet
\end{tikzcd}$$

よって, $Q(\phi)$ が iso. となることを示せばよい. さらに, $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $H^n(\phi)$ が iso. となることを示せばよい. 各 $X_m^\bullet$ の作り方より,

$$H^n(X_m^\bullet) := \begin{cases} H^n(X^\bullet) & (-m \leq n) \\ 0 & (-m > n) \end{cases}$$

となるから,

$$\text{exact}: 0 \longrightarrow H^n(X^\bullet) \longrightarrow \prod X_m^\bullet \xrightarrow{H^n(1-\text{shift})} \prod X_m^\bullet \longrightarrow 0$$

を得る. したがって, triangle $(*)$ に $H^n(-)$ を apply した exact と合わせて次の commutative diagram を得る.

$$\begin{tikzcd}
\text{exact}: 0 \arrow[r] & H^n(X) \arrow[r] \arrow[d, "H^n(\phi)"'] & H^n(\prod X_m^\bullet) \arrow[r, "H^n(1-\text{shift})"] \arrow[d, equal] & H^n(\prod X_m^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\text{exact}: 0 \arrow[r] & H^n(h\varprojlim X_m^\bullet) \arrow[r] & H^n(\prod X_m^\bullet) \arrow[r, "H^n(1-\text{shift})"'] & H^n(\prod X_m^\bullet) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

よって, 主張を得る. ■

(Step 2) $I_m^\bullet \in K^+(\text{Inj-}A)$ が存在して, $X_m^\bullet \simeq I_m^\bullet$ in $D(\text{Mod-}A)$

proof. $X_m^\bullet \in K^+(\text{Mod-}A)$ であることに注意して, Lemma 2.2.3 より. ■

(Step 3) $I^\bullet_{m+1} \to I^\bullet_m$ が存在して,
$$\begin{tikzcd} X^\bullet_{m+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X^\bullet_m \arrow[d] \\ I^\bullet_{m+1} \arrow[r] & I^\bullet_m \end{tikzcd} \quad \text{in } K(\text{Mod-}A)$$

proof. $\psi_m : X^\bullet_m \Rightarrow I^\bullet_m$ とする. ψ_{m+1} で作られる triangle に $\mathrm{Hom}_{K(\text{Mod-}A)}(-, I^\bullet_m)$ を apply して,

$$\text{exact} : \mathrm{Hom}_{K(\text{Mod-}A)}(I^\bullet_{m+1}, I^\bullet_m) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K(\text{Mod-}A)}(X^\bullet_{m+1}, I^\bullet_m) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K(\text{Mod-}A)}(C(\psi_{m+1})[-1], I^\bullet_m)$$

を得るが, $C(\psi_{m+1}) \in \mathcal{U}$, $I^\bullet_m \in K^+(\text{Inj-}A)$ は $\mathcal{U}$-local より, $\mathrm{Hom}_{K(\text{Mod-}A)}(C(\psi_{m+1})[-1], I^\bullet_m) = 0$ である. ■

(Step 4) $h\varprojlim X^\bullet_m \simeq h\varprojlim I^\bullet_m$ in $D(\text{Mod-}A)$

proof. (Step 3), (TR3) より, 次の commutative diagram in $K(\text{Mod-}A)$ をもつ.

$$\begin{tikzcd} \prod X^\bullet_m[-1] \arrow[r] \arrow[d] & h\varprojlim X^\bullet_m \arrow[r] \arrow[d] & \prod X^\bullet_m \arrow[r, "1-\text{shift}"] \arrow[d, "\prod \psi_m"'] & \prod X^\bullet_m \arrow[d, "\prod \psi_m"] \\ \prod I^\bullet_m[-1] \arrow[r] & h\varprojlim I^\bullet_m \arrow[r] & \prod I^\bullet_m \arrow[r, "1-\text{shift}"'] & \prod I^\bullet_m \end{tikzcd}$$

$Q(\prod \psi_m)$ は iso. だから, 主張を得る. ■

(Step 5) $h\varprojlim I^\bullet_m$ は $\mathcal{U}$-local である.

proof. $\prod I^\bullet_m$ は $\mathcal{U}$-local より. ■

よって, $I^\bullet := h\varprojlim I^\bullet_m$ とすれば主張を得る. ■

Remark A.2.4 この証明を見てもわかるように, $X^\bullet \in K(\text{mod-}A)$ に対して, $I^\bullet$ を有限生成の中ではとれない.

Prop A.2.5 $Q : K(\text{Inj-}A)_L \to D(\text{Mod-}A)$ は equivalence である.

proof. Prop 2.0.34 より, $K(\text{Inj-}A)_L \to D(\text{Mod-}A)$ は fully faithful である. また, Lemma A.2.3 より object 間の全射も成り立つ. ■

これらの dual も成り立つ.

Def A.2.6

$$K(\text{Proj-}A)_L := \left\{ P^\bullet \in K(\text{Proj-}A) \,\middle|\, P^\bullet \text{は } \mathcal{U}\text{-colocal} \right\}$$

とおく. $K^b(\text{Proj-}A) \subseteq K^-(\text{Proj-}A) \subseteq K(\text{Proj-}A)_L$ となる.

Lemma **A.2.7** 次が成り立つ.

(1) $K(\text{Proj-}A)_L$ は $K(\text{Mod-}A)$ の full triangulated subcategory である. さらに, 直積で閉じている.

(2) $\mathcal{U} \cap K(\text{Proj-}A)_L = 0$

Lemma **A.2.8** $X^\bullet \in K(\text{Mod-}A)$ に対して, $P^\bullet \in K(\text{Proj-}A)_L$ が存在して, $X^\bullet \simeq P^\bullet$ in $D(\text{Mod-}A)$ となる.

Prop **A.2.9** $Q : K(\text{Proj-}A)_L \to D(\text{Mod-}A)$ は equivalence である.

付録 B　Proof of Rickard's theorem

ここでは, Rickard の定理 (Theorem 2.2.46) を証明する [14, 15, 22, 21]. この定理は Morita の定理や tilting module の拡張になっているが, tilting complex を両側で見ることができないため, 同様には証明できない. それを解消することがこの定理の証明の難しいところである.

B.1　準備

B.1.1　Adjoint functor と fully faithful

$\mathcal{K}, \mathcal{H}$ を triangulated category とする. また, 考える functor は exact とする.

Def **B.1.1** $F : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$, $G : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ を functor とする. F が G の left adjoint functor (G が F の right adjoint functor) であるとは, $X \in \mathcal{K}$, $Y \in \mathcal{H}$ に対して,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(F(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, G(Y))$$

を満たし, さらに, $f : X \to M \in \mathcal{K}$, $g : Y \to N \in \mathcal{H}$ に対して, 次の commutative diagram をもつときにいう.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(F(M), Y) \arrow[r, "-\circ F(f)"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(F(X), Y) \arrow[r, "g\circ -"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(F(X), N) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(M, G(Y)) \arrow[r, "-\circ f"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, G(Y)) \arrow[r, "G(g)\circ -"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, G(N))
\end{tikzcd}$$

また,

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(F(X),F(X)) & \simeq & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X,GF(X)) & , & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(G(Y),G(Y)) & \simeq & \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(FG(Y),Y) \\
\Psi & & \Psi & & \Psi & & \Psi \\
1_{F(X)} & \longleftrightarrow & \epsilon_X & & 1_{G(Y)} & \longleftrightarrow & \delta_Y
\end{array}
$$

となるような $\epsilon : 1_{\mathcal{K}} \to GF$ を <u>unit</u>, $\delta : FG \to 1_{\mathcal{H}}$ を <u>counit</u> とよぶ. ここで, ϵ, δ が natural であることは, 同型と可換性から簡単にわかる.

Prop B.1.2 $F : \mathcal{K} \to \mathcal{H}, G : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ を functor とし, F は G の left adjoint とする. また, $\epsilon : 1_{\mathcal{K}} \to GF, \delta : FG \to 1_{\mathcal{H}}$ をそれぞれ unit, counit とする. このとき,

(1) G が fully faithful であることと $\delta : FG \simeq 1_{\mathcal{H}}$ であることは同値である.
(2) F が fully faithful であることと $\epsilon : 1_{\mathcal{K}} \simeq GF$ であることは同値である.
(3) F が exact であることと G が exact であることは同値である.

proof.

(1) G を fully faithful とすると, $Y \in \mathcal{H}$ に対して,

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(Y,FG(Y)) & \simeq & \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(G(Y),GFG(Y)) & \simeq & \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(FG(Y),FG(Y)) \\
\Psi & & \Psi & & \Psi \\
{}^{\exists}\tau_Y & \longleftrightarrow & G(\tau_Y) = \epsilon_{G(Y)} & \longleftrightarrow & 1_{FG(Y)}
\end{array}
$$

可換性を使って, $\tau_Y \delta_Y = 1_{FG(Y)}, \delta_Y \tau_Y = 1_Y$ であることが簡単に確かめられる. 逆は明らか.

(2) (1) の dual.

(3) F を exact とする. $X \in \mathcal{H}$ に対して, F が exact であることと adjoint の定義より,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,G(X)[1]) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-[-1],G(X)) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(F(-)[-1],X) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(F(-),X[1]) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,G(X[1]))
\end{aligned}
$$

を得る. Yoneda's lemma から $G(X)[1] \simeq G(X[1])$ となる. また, $f : X \to Y \in \mathcal{H}$ に対して, triangle : $X \to Y \to Z \to X[1]$ とする. また, triangle : $G(X) \xrightarrow{G(f)} G(Y) \to W \to$

$G(X)[1]$ とおく. このとき, F が exact であることと (TR3) から次の triangle の間の commutative diagram を得る.

$$\begin{tikzcd} FG(X) \arrow[r, "FG(f)"] \arrow[d, "\delta_X"'] & FG(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\delta_Y"] & F(W) \arrow[r] \arrow[d, "h"] & FG(X)[1] \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r] & X[1] \end{tikzcd}$$

さらに, adjoint の定義から,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(F(W), Z) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Hom}_{H}(W, G(Z)) \\ \Psi & & \Psi \\ h & \longleftrightarrow & {}^{\exists}\alpha \end{array}$$

が存在して, 次の commutative diagram を得る.

$$\begin{tikzcd} G(X) \arrow[r, "G(f)"] \arrow[d, equal] & G(Y) \arrow[r] \arrow[d, equal] & W \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & G(X)[1] \arrow[d, equal] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y) \arrow[r, "G(g)"'] & G(Z) \arrow[r] & G(X)[1] \end{tikzcd}$$

注意として, この commutative diagram の下行はまだ triangle とはわからない. これに, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-, ?)$ を apply して, 次の commutative diagram を得る.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-, G(X)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-, G(Y)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-, W) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,\alpha)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-, G(X)[1]) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-, G(Y)[1]) \arrow[d, equal] & \text{exact} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-, G(X)) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-, G(Y)) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-, G(Z)) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-, G(X)[1]) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-, G(Y)[1]) \arrow[d, phantom, "\wr"] & \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(F(-), X) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(F(-), Y) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(F(-), Z) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(F(-), X[1]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(F(-), Y[1]) & \text{exact} \end{tikzcd}$$

したがって, 5-lemma から, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-, \alpha)$ は iso. になるから, Yoneda's lemma より α は iso. であることがわかる.

■

Prop B.1.3 $F : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ を full functor とする. このとき, 次は同値である.

(1) 任意の $X \in \mathcal{K}$ に対して, $F(X) = 0$ ならば, $X = 0$ である.

(2) F は faithful である.

proof. (2)⇒(1) 明らか. (1)⇒(2) $X \xrightarrow{f} Y$ に対して, $F(f) = 0$ と仮定する. $Z := C(f)$ とおく. triangle : $F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \to F(X)[1] \xrightarrow{0} F(Y)[1]$ に対して, Prop 2.0.9 と F が full であることから, $h : Z \to Y$ が存在して, $F(h)F(g) = 1_{F(Y)}$ となる. $\alpha := hg$ とおくと, $F(\alpha) = 1_{F(Y)}$ となる. よって, F が exact であることから, $F(C(\alpha)) \simeq C(F(\alpha)) \simeq C(1_{F(Y)}) = 0$ となり, 仮定より, $C(\alpha) = 0$ であることがわかる. したがって, α は iso. であるが, $\alpha f = hgf = 0$ より, $f = 0$ を得る. ■

B.1.2 $K^{-}(\text{add-}P^{\bullet})$

$P^{\bullet} \in K^{-}(\text{proj-}A)$ とする. ここでは, category $K^{-}(\text{add-}P^{\bullet})$ について考え, functor : $K^{-}(\text{add-}P^{\bullet}) \to K^{-}(\text{proj-}A)$ を定義する. この category $K^{-}(\text{add-}P^{\bullet})$ は通常の $K^{-}(\text{mod-}A)$ と同様に定義できるわけだが, $C^{-}(\text{add-}P^{\bullet})$ の object $X^{\bullet\bullet}$ は,

$$\cdots \to X^{\bullet\, n-1} \to X^{\bullet\, n} \to X^{\bullet\, n+1} \to \cdots \to 0$$

で, 各 $X^{\bullet\, n}$ は add-$P^{\bullet}$ の object である. 注意として, $X^{\bullet\bullet}$ の differential δ は $\delta^2 = 0$ in $K^{-}(\text{mod-}A)$ となる. しかし, $X^{\bullet\, n}$ の differential d は $d^2 = 0$ in mod-A となる.

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
X^{\bullet\, n-1} : \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & X^{m-1,n-1} \arrow[r] \arrow[d] & X^{m,n-1} \arrow[r] \arrow[d] & X^{m+1,n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
X^{\bullet\, n} : \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & X^{m-1,n} \arrow[r] \arrow[d] & X^{m,n} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"'] & X^{m+1,n} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
X^{\bullet\, n+1} : \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & X^{m-1,n+1} \arrow[r] \arrow[d] & X^{m,n+1} \arrow[r] \arrow[d] & X^{m+1,n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

また, $C^{-}(\text{add-}P^{\bullet})$ での morphism による可換性も $K^{-}(\text{mod-}A)$ の中で考えていることに注意する.

Remark **B.1.4** $X^{\bullet\bullet} \in K^{-}(\text{add-}P^{\bullet})$ を double complex と考えて, 通常の意味で total complex (第 p 項は $p = m+n$ となるところで直積, differential は縦 + 横 $[\delta + d]$) をとっても縦 δ を homotopy cat. 内で考えているため, それは complex にならない. そこでここでは, "うまく" total complex をとることで, functor : $K^{-}(\text{add-}P^{\bullet}) \to K^{-}(\text{proj-}A)$ を作る.

Def **B.1.5** $\alpha : \{X^{m,n}\} \to \{Y^{m,n}\}$ が degree (p, q) の morphism であるとは, 各 m, n に対して, $\alpha \in \mathrm{Hom}_A(X^{m,n}, Y^{m+p,n+q})$ となるときにいう. これはもちろん index が異なれば, $\alpha : X^{m,n} \to Y^{m+p,n+q}$ と $\alpha : X^{\ell,k} \to Y^{\ell+p,k+q}$ は異なる homomorphism だから, 厳密に書くとすれば " $\alpha^{m,n}$ " と書くべきだが, 簡単のため, すべてまとめて"α"と書くことにする. また, $X := \{X^{m,n}\}$ と書くことにする.

例えば, $d : X \to X$ は degree (1, 0), $\delta : X \to X$ は degree (0, 1) の morphism である.

以下, $\mathrm{Hom}_{K(\text{proj-}A)}(P^{\bullet}, P^{\bullet}[n]) = 0$ $(n \neq 0)$ を仮定する.

Lemma **B.1.6** $X^{\bullet\bullet}$, $Y^{\bullet\bullet} \in C^{-}(\text{add-}P^{\bullet})$ とし, $\alpha : X \to Y$ を degree (p, q), $p \neq 0$ の morphism とし, $\alpha d = d\alpha$ を満たすとする. このとき, $h : X \to Y$: degree $(p-1, q)$ が存在して, $\alpha = hd + dh$ を満たす.

proof. 各 n に対して, $\alpha^{\bullet n} \in \mathrm{Hom}_{K(\text{proj-}A)}(X^{\bullet n}, Y^{\bullet n+q}[p])$ より. ■

Lemma **B.1.7** $X^{\bullet\bullet} \in C^{-}(\text{add-}P^{\bullet})$ とする. このとき, $d : X \to X$: degree $(1-i, i)$, $i \geq 0$ が存在して, $\sum_{0 \leq i \leq \ell} d_i d_{\ell - i} = 0$ を満たす.

proof. $d_0 := d$, $d_1 := (-1)^{m+n}\delta : X^{m,n} \to X^{m,n+1}$ とする. 明らかに, $d_0 d_1 + d_1 d_0 = 0$ となる. そこで, $\ell > 2$ に対して, d_i $(0 \leq i \leq \ell - 1)$, 各 d_i は degree $(1-i, i)$ が存在して, $\sum_i d_i d_{k-i} = 0$, $k < \ell$ を満たすと仮定する. このとき,

$$
\begin{aligned}
d_0 \left(\sum_{1 \leq i \leq \ell-1} d_i d_{\ell-1} \right) &= - \sum_{1 \leq i \leq \ell-1} \sum_{1 \leq j \leq i} d_j d_{i-j} d_{\ell-i} \\
&= - \sum_{1 \leq j \leq \ell-1} d_j \left(\sum_{j \leq i \leq \ell-1} d_{i-j} d_{\ell-j} \right) \\
&= \sum_{1 \leq j \leq \ell-1} d_j d_{\ell-j} d_0 \\
&= \left(\sum_{1 \leq i \leq \ell-1} d_i d_{\ell-1} \right) d_0
\end{aligned}
$$

よって, $\sum_{1\le i\le \ell-1} d_i d_{\ell-1}$ は degree $(-\ell+2, \ell)$ だから, Lemma B.1.6 より, 主張を得る. ■

Def **B.1.8** $X^{\bullet\bullet} \in C^-(\text{add-}P^\bullet)$ に対して, $t(X^{\bullet\bullet}) \in K^-(\text{proj-}A)$ を次のように定義する.

$$t(X^{\bullet\bullet}) := \begin{cases} t(X^{\bullet\bullet})^n := \bigoplus_{n=p+q} X^{p,q} \\ \text{differential} := \sum_i d_i \end{cases}$$

Lemma B.1.7 より, これは complex になる.

Lemma **B.1.9** $\alpha^{\bullet\bullet} : X^{\bullet\bullet} \to Y^{\bullet\bullet} \in C^-(\text{add-}P^\bullet)$ とする. このとき, $t(\alpha^{\bullet\bullet}) : t(X^{\bullet\bullet}) \to t(Y^{\bullet\bullet}) \in K^-(\text{proj-}A)$ が存在する.

proof. α_0 を $\alpha^{\bullet\bullet}$ の degree $(0, 0)$ の morphism とおく. $\alpha^{\bullet\bullet}$ の可換性より, $\beta^i := (-1)^{i+j}(\alpha_0 d_1 - d_1\alpha_0) : X^{i,j} \to Y^{i,j+1}$ とすると, $\beta^\bullet : X^{\bullet j} \to Y^{\bullet j+1}$ は 0 に homotophic であるから, $h_1 : X \to Y$: degree $(-1, 1)$ が存在する. そこで, $\alpha_1 := (-1)^{i+j}h_1 : X^{i,j} \to Y^{i-1,j+1}$ とおくと, $\alpha_0 d_1 + \alpha_1 d_0 = d_0\alpha_1 + d_1\alpha_0$ となる.

$n > 2$, α_i $(0 \le i \le n-1)$, 各 α_i は degree $(-i, i)$, $\sum_{0\le i\le k} \alpha_i d_{k-i} = \sum_{0\le i\le k} d_i \alpha_{k-i}$, $k < n$ と仮定する. このとき,

$$\begin{aligned}
&d_0\left(\sum_{0\le i\le n-1} \alpha_i d_{n-1} - \sum_{1\le i\le n} d_i\alpha_{n-i}\right) \\
&= \sum_{0\le i\le n-1}\sum_{0\le j\le i} \alpha_j d_{i-j} d_{n-i} - \sum_{1\le i\le n-1}\sum_{1\le j\le i} d_j \alpha_{i-j} d_{n-i} + \sum_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le i} d_j d_{i-j}\alpha_{n-i} \\
&= (1) - (2) + (3) \\
&= \left(\sum_{1\le j\le n} d_j\alpha_{n-j} - \sum_{0\le j\le n-1} \alpha_j d_{n-j}\right) d_0
\end{aligned}$$

ここで,

(1)

$$\sum_{0\le i\le n-1}\sum_{0\le j\le i}\alpha_j d_{i-j}d_{n-i}$$

$$= \sum_{0\le j\le n-1}\alpha_j\sum_{j\le i\le n-1}d_{i-j}d_{n-i}$$

$$= -\sum_{0\le j\le n-1}\alpha_j d_{n-j}d_0$$

(3)

$$\sum_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le i}d_j d_{i-j}\alpha_{n-i}$$

$$= \sum_{1\le j\le n}d_j\sum_{j\le i\le n}d_{i-j}\alpha_{n-i}$$

$$= \sum_{1\le j\le n}d_j\sum_{j\le i\le n}\alpha_{i-j}d_{n-i}$$

$$= \sum_{1\le j\le n-1}\sum_{j\le i\le n-1}d_j\alpha_i d_{n-i} + \sum_{1\le j\le n}d_j\alpha_{n-j}d_0$$

したがって, $(-1)^{i+j}\left(\sum_{0\le i\le n-1}\alpha_i d_{n-1} - \sum_{1\le i\le n}d_i\alpha_{n-i}\right)$ に対して, Lemma B.1.6 より, degree $(-n, n)$ の morphism h_n が存在する. このとき, $\alpha_n := (-1)^{i+j}h^n$ とおけば, $\left(\sum_i \alpha_i\right)\left(\sum_i d_i\right) = \left(\sum_i d_i\right)\left(\sum_i \alpha_i\right)$ を得る. よって, $t(\alpha^{\bullet\bullet}) := \sum_i \alpha_i$ とおけば主張を得る. ■

Lemma B.1.10 $\alpha^{\bullet\bullet} : X^{\bullet\bullet} \to Y^{\bullet\bullet} \in C^-(\text{add-}P^\bullet)$ とする. このとき, 各 n に対して, $\alpha^{\bullet n}$ が 0 に homotopic (すなわち, $\alpha^{\bullet\bullet} = 0$ in $C^-(\text{add-}P^\bullet)$) ならば, $t(\alpha^{\bullet\bullet})$ は 0 に homotopic である.

proof. 仮定より, degree $(-1, 0)$ の morphism h_0 が存在して, $\alpha_0 = d_0h_0 + h_0d_0$ を満たす. そこで, degree $(-1-i, i)$ の morphism h_i が存在して, $\alpha_k = \sum_{0\le i\le k}(d_ih_{k-i} + h_id_{k-i})$ を満たすと

仮定する. このとき,

$$d_0\left(\alpha_n - \sum_{0\le i\le n-1} h_i d_{n-i} - \sum_{1\le i\le n} d_i h_{n-i}\right)$$

$$= \sum_{0\le i\le n} \alpha_i d_{n-i} - \sum_{1\le i\le n} d_i \alpha_{n-i}$$

$$- \sum_{0\le i\le n-1} \alpha_i d_{n-i} + \sum_{1\le i\le n-1} \sum_{1\le j\le i} d_j h_{i-j} d_{n-i}$$

$$+ \sum_{0\le i\le n-1} \sum_{0\le j\le i} h_j d_{i-j} d_{n-i} + \sum_{1\le i\le n} \sum_{1\le j\le i} d_j d_{i-j} h_{n-i}$$

$$= (1) - (2) - (3) + (4) + (5) + (6)$$

$$= \{(1) - (3)\} + \{-(2) + (4) + (6)\} + (5)$$

$$= \alpha_n d_0 + \left\{-d_n \alpha_0 - \sum_{1\le j\le n-1} d_j h_{n-j} d_0 + d_n d_0 h_0\right\} - \sum_{0\le j\le n-1} h_j d_{n-j} d_0$$

$$= \left(\alpha_n - \sum_{0\le i\le n-1} h_i d_{n-i} - \sum_{1\le i\le n} d_i h_{n-i}\right) d_0$$

ここで, (4) + (6) は次のように計算できる.

$$\sum_{1\le i\le n-1}\sum_{1\le j\le i} d_j h_{i-j} d_{n-i} + \sum_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le i} d_j d_{i-j} h_{n-i}$$

$$= \sum_{1\le i\le n-1}\left(\sum_{1\le j\le i} d_j h_{i-j} d_{n-i} + d_j d_{i-j} h_{n-i}\right) + \sum_{1\le j\le n} d_j d_{n-j} h_0$$

$$= \sum_{1\le j\le n-1} d_j \left(\sum_{j\le i\le n-1} h_{i-j} d_{n-i} + d_{i-j} h_{n-i}\right) + \sum_{1\le j\le n} d_j d_{n-j} h_0$$

$$= \sum_{1\le j\le n-1} d_j \left(\alpha_{n-j} - h_{n-j} d_0 - d_{n-j} h_0\right) + \sum_{1\le j\le n} d_j d_{n-j} h_0$$

$$= \sum_{1\le j\le n-1} d_j \alpha_{n-j} - \sum_{1\le j\le n-1} d_j h_{n-j} d_0 + d_n d_0 h_0$$

したがって, Lemma B.1.6 より, h_n が存在して, $\alpha_n = \sum_{0\le i\le n} d_i h_{n-i} + h_i d_{n-i}$ となる. ■

Lemma B.1.9, B.1.10 より, functor $t : C^-(\text{add-}P^\bullet) \to K^-(\text{proj-}A)$ が得られる. さらに, t は mapping cone を mapping cone にうつすから, functor $t : K^-(\text{add-}P^\bullet) \to K^-(\text{proj-}A)$ を得る.

B.2 Proof

まずは, tilting complex と Rickard の定理の復習をしよう.

Def B.2.1 $P^\bullet \in K(\text{mod-}A)$ が tilting complex であるとは, 次を満たすときにいう.

(0) $P^\bullet \in K^b(\text{proj-}A)$

(1) $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P^\bullet, P^\bullet[n]) = 0 \ \ (n \neq 0)$

(2) add-$P^\bullet$ は $K^b(\text{proj-}A)$ を triangulated category として生成する.

Thm B.2.2 次は同値である.

(1) A と B は derived equivalent である.

(2) $K^b(\text{proj-}A) \simeq K^b(\text{proj-}B)$ (as triangulated category)

(3) tilting complex $P^\bullet \in K^b(\text{proj-}A)$ が存在して, $B \simeq \mathrm{End}_{K^b(\text{proj-}A)}(P^\bullet)$ となる.

B.2.1　(1) $\Longrightarrow$ (2)

次のことを示せばよい.

Prop **B.2.3** $X^\bullet \in K^{-,b}(\text{proj-}A)$ とする. このとき, $X^\bullet \in K^b(\text{proj-}A)$ であることと任意の $Y^\bullet \in K^{-,b}(\text{proj-}A)$ に対して, $\mathrm{Hom}_{K^{-,b}(\text{proj-}A)}(X^\bullet, Y^\bullet[i]) = 0$ $(i \gg 0)$ であることは同値である.

proof. $X^\bullet \in K^{-,b}(\text{proj-}A)$ とする. 任意の $Y^\bullet \in K^{-,b}(\text{proj-}A)$ に対して, $\mathrm{Hom}_{K^{-,b}(\text{proj-}A)}(X^\bullet, Y^\bullet[i]) = 0$ $(i \gg 0)$ と仮定する. このとき, $i \ll 0$ に対して, $\mathrm{Ker}\, d^i_{X^\bullet}$ が proj. になることを示せばよい.
$Y^\bullet := \mathrm{Ker}\, d^i_{X^\bullet}$ とおくと,

$$
\begin{tikzcd}
X^\bullet : \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "d^{i-2}_{X^\bullet}"] & X^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}_{X^\bullet}"] \arrow[d, "d^{i-1}_{X^\bullet}"] & X^i \arrow[r, "d^i_{X^\bullet}"] & \cdots \\
Y^\bullet[-i+1] : & 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\, d^i_{X^\bullet} \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}
$$

は $\mathrm{Hom}_{K^{-,b}(\text{proj-}A)}(X^\bullet, Y^\bullet[-i+1])$ に属すから, 0 に homotopic である. したがって, $\mathrm{Ker}\, d^i_{X^\bullet} \hookrightarrow X^i$ は split mono. である. よって, $\mathrm{Ker}\, d^i_{X^\bullet}$ は proj. である. 逆は明らか. ■

B.2.2　(2) $\Longrightarrow$ (3)

$G : K^b(\text{proj-}B) \xrightarrow{\simeq} K^b(\text{proj-}A)$ とする. このとき, $P^\bullet := G(B)$ とおき, $P^\bullet$ が tilting complex であることを示す. tilting complex の定義 (0) は明らかだから, (1)(2) を示す.

(1) $n \neq 0$ に対して, $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P^\bullet, P^\bullet[n]) = \mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}B)}(B, B[n]) = 0$

(2) add-B は $K^b(\text{proj-}B)$ を triangulated cat. として生成するから, 明らか.

さらに, $B \simeq \mathrm{End}_B(B) \simeq \mathrm{End}_{K^b(\text{proj-}B)}(B) \simeq \mathrm{End}_{K^b(\text{proj-}A)}(P^\bullet)$ であることがわかる.

B.2.3　(3) $\Longrightarrow$ (1)

$P^\bullet \in K^b(\text{proj-}A)$ を $n \neq 0$ で $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P^\bullet, P^\bullet[n]) = 0$ を満たす complex とし, $B := \mathrm{End}_{K^b(\text{proj-}A)}(P^\bullet)$ とする. ここで, $P^\bullet \in K^b(\text{proj-}A)$ より, B は finite dimensional である.

先に述べたように, functor : $K^-(\text{add-}P^\bullet) \to K^-(\text{proj-}A)$ が作れたが, さらに, $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P^\bullet, -)$: add-$P^\bullet \to$ proj-B は equivalence を導く. ここでも同様に, $Q^\bullet \in K^b(\text{proj-}A)$ に対して, $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P^\bullet, Q^\bullet)$ は finite dimensional である.

そこで, $F : K^-(\text{proj-}B) \simeq K^-(\text{add-}P^\bullet) \to K^-(\text{proj-}A)$ とする. ここで, $F|_{K^b(\text{proj-}B)}$ は fully faithful である (Cor 2.2.10 と同様に確認できる).

まずは, F が fully faithful であることを確かめよう.

Def **B.2.4** $X^\bullet \in K^-(\text{mod-}A)$ に対して, $X^\bullet(n)$ を次のような complex とする.

$$0 \to X^{-n} \to X^{-n+1} \to \cdots \to 0$$

Prop **B.2.5** F は fully faithful である.

proof. $X^{\bullet\bullet}, Y^{\bullet\bullet} \in K^-(\text{add-}P^\bullet)$ とする. (full) $f^\bullet : t(X^{\bullet\bullet}) \to t(Y^{\bullet\bullet}) \in K^-(\text{proj-}A)$ とすると, f は $X^{i,j} \to Y^{i-m,j+m}$ の homomorphism と見れる. そこで, $m \in \mathbb{Z}$ に対して, f_m を $X \to Y$ の degree $(-m, m)$ の morphism とすると, $f^\bullet$ の可換性から, $\sum_{i \le n} f_i d_{n-i} = \sum_{0 \le i} d_i f_{n-i}$ となる. $P^\bullet \in K^b(\text{proj-}A)$ より, $f_i = 0$ $(i < m)$ としてよい. このとき, $f_m d_0 = d_0 f_m$ より, $f_m \in \text{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(X^{\bullet j}, Y^{\bullet j+m}[-m])$ となるから, $m < 0$ に対して, f_m は 0 に homotopic である. これは, F が full であることを示している. (faithful) $X^\bullet \in K^-(\text{proj-}B)$ を $X^{\bullet\bullet}$ と対応する complex とし, $F(X^\bullet) = 0$ とする. また, $X^i = 0$ $(i > 0)$ としてよい. $F|_{K^b(\text{proj-}B)}$ が fully faithful, $F(X^\bullet(0)) \in \text{add-}P^\bullet \subseteq K^b(\text{proj-}A)$ より, $j \gg 0$ に対して, $\text{Hom}_{K^b(\text{proj-}B)}(X^\bullet(0), X^\bullet(j)) \simeq \text{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(F(X^\bullet(0)), F(X^\bullet(j))) \simeq \text{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(F(X^\bullet(0)), F(X^\bullet)) = 0$ より, $X^{-1} \to X^0$ は split epi. になる. したがって, induction より, $X^\bullet = 0$ となるから, F が faithful であることを得る. ■

次に, F の right adjoint functor G を作る.

$X^\bullet \in K^-(\text{proj-}A)$ とする. $P^\bullet \in K^b(\text{proj-}A)$ より, $N \ge 0$ が存在して, $\text{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(P^\bullet, X^\bullet[n]) = 0$ $(n > N)$ となる. $X_N^\bullet := X^\bullet[N]$ とおく. $P\left(\text{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(P^\bullet, X_N^\bullet)\right) \in \text{proj-}B$ に対して, $S^{\bullet N} \in \text{add-}P^\bullet$ が存在して, $P\left(\text{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(P^\bullet, X_N^\bullet)\right) \simeq \text{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(P^\bullet, S^{\bullet N})$ となる. このとき, $\text{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(P^\bullet, X_N^\bullet) \simeq \text{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(P^\bullet, X_N^\bullet(i))$ $(i \gg 0)$ であることに注意して, $\text{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(P^\bullet, S^{\bullet N}) \twoheadrightarrow \text{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(P^\bullet, X_N^\bullet)$ となる morphism $S^{\bullet N} \to X_N^\bullet$ が存在する. このとき, triangle : $X_{N-1}^\bullet \to S^{\bullet N} \to X_N^\bullet \to X_{N-1}^\bullet[1]$ とおく. これを繰り返して, $i \le N$ に対

して, $S^{\bullet i}$ が定義できる. そこで,

$$\begin{tikzcd}
 & & & & X_i^\bullet \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & & \\
S^{\bullet\bullet}: & \cdots \arrow[r] & S^{\bullet i-1} \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & S^{\bullet i} \arrow[u] \arrow[r, "\delta"'] & S^{\bullet i+1} \arrow[r] & \cdots \\
 & & & X_{i-1}^\bullet \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

とおくと, triangle の性質により, $\delta^2 = 0$ in $K^-(\text{proj-}A)$ となるから, $S^{\bullet\bullet} \in K^-(\text{add-}P^\bullet)$ となる. この $S^{\bullet\bullet} \in K^-(\text{add-}P^\bullet)$ を $X^\bullet \in K^-(\text{proj-}A)$ の $\underline{P^\bullet\text{-resolusion}}$ という.

このとき, $X^\bullet \in K^-(\text{proj-}A)$ に対して, その $P^\bullet$-resolusion $S^{\bullet\bullet} \in K^-(\text{add-}P^\bullet)$ (よって, $K^-(\text{proj-}B)$) と対応させたいわけだが, その対応が functor, さらに, F の right adjoint になっていることを示す.

Lemma B.2.6 $X^\bullet \in K^-(\text{proj-}A)$, $i \le N$, $n > 0$ に対して,

$$\text{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(P^\bullet, X_i^\bullet[n]) = 0$$

proof. $N = 0$ としてよい. $i \le 0$ とする. (induction on i) $i = 0$ のときは明らか. $n > 0$ に対して, triangle : $X_{i-1}^\bullet[n] \to S^{\bullet i}[n] \to X_i^\bullet[n] \to X_{i-1}^\bullet[n+1]$ に $\text{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(P^\bullet, -)$ を apply して, exact :

$$\text{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(P^\bullet, X_i^\bullet[n-1]) \longrightarrow \text{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(P^\bullet, X_{i-1}^\bullet[n]) \longrightarrow \text{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(P^\bullet, S^{\bullet i}[n])$$

を得る. よって, induction の仮定より, $n > 1$ のときは主張を満たす. $n = 1$ のときは, epi : $\text{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(P^\bullet, S^{\bullet i}) \twoheadrightarrow \text{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(P^\bullet, X_i^\bullet)$ と $\text{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(P^\bullet, S^{\bullet i}[1]) = 0$ であることからわかる. ■

Lemma B.2.7 $X^\bullet \in K^-(\text{proj-}A)$, $X^\bullet$ の $P^\bullet$-resolusion を $S^{\bullet\bullet} \in K^-(\text{add-}P^\bullet)$ とおき, $S^{\bullet\bullet}$ の $K^-(\text{add-}P^\bullet) \simeq K^-(\text{proj-}B)$ での対応を $S^\bullet \in K^-(\text{proj-}B)$ とする. このとき, $Q^\bullet \in K^-(\text{proj-}B)$ に対して, $F(S^\bullet) \to X^\bullet$ が存在して, $\text{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(F(Q^\bullet), F(S^\bullet)) \simeq \text{Hom}_{K^-(\text{proj-}A))}(F(Q^\bullet), X^\bullet)$ を満たす.

proof. $X^\bullet \in K^-(\text{proj-}A)$, $\text{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(P^\bullet, X^\bullet[n]) = 0$ $(n > 0)$ としてよい. よって, $S^{\bullet n} = 0$

($n > 0$) である. また, $n \geq 0$ に対して, 次の triangle を得る.

$$X^\bullet_{-n-1} \longrightarrow S^{\bullet -n} \longrightarrow X^\bullet_{-n} \longrightarrow X^\bullet_{-n-1}[1]$$

$$S^{\bullet -n}[n-1] \longrightarrow S^{\bullet\bullet}(n-1) \longrightarrow S^{\bullet\bullet}(n) \longrightarrow S^{\bullet -n}[n]$$

まず, 次のことを示す.

Claim : $n > 0$ に対して,

$$\text{triangle :}\quad \begin{tikzcd} X^\bullet_{-n}[n-1] \arrow[rr] & & F(S^{\bullet\bullet}(n-1)) \arrow[rr] & & X^\bullet \arrow[r] & X^\bullet_{-n}[n] \\ & F(S^{\bullet -n}[n-1]) \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & & F(S^{\bullet\bullet}(n-2)) \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & & \end{tikzcd}$$

(induction on n) $n = 1$ のとき, $X^\bullet_{-1}$ の作り方から, triangle : $X^\bullet_{-1} \to S^{\bullet 0} \to X^\bullet_0 \to X^\bullet_{-1}[1]$ を得る. そこで, $n \leq m$ に対して主張を満たすと仮定する.
$$\begin{tikzcd} F(S^{\bullet -m}[m-1]) \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X^\bullet_{-m}[m-1] \arrow[d] \\ F(S^{\bullet -m}[m-1]) \arrow[r] & F(S^{\bullet\bullet}(m-1)) \end{tikzcd}$$
に対して, (TR4) より, commutative diagram ($*$)

$$\begin{tikzcd} F(S^{\bullet -m}[m-1]) \arrow[r] \arrow[d, equal] & X^\bullet_{-m}[m-1] \arrow[r] \arrow[d] & X^\bullet_{-m-1}[m] \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(*1)"] & F(S^{\bullet -m}[m]) \arrow[d, equal] \\ F(S^{\bullet -m}[m-1]) \arrow[r] \arrow[d] & F(S^{\bullet\bullet}(m-1)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & F(S^{\bullet\bullet}(m)) \arrow[r, "u"'] \arrow[d] & F(S^{\bullet -m}[m]) \arrow[d] \\ X^\bullet_{-m}[m-1] \arrow[r] \arrow[d] & F(S^{\bullet\bullet}(m-1)) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(*2)"] & X^\bullet \arrow[r] \arrow[d, equal] & X^\bullet_{-m}[m] \arrow[d] \\ X^\bullet_{-m-1}[m] \arrow[r] & F(S^{\bullet\bullet}(m)) \arrow[r] & X^\bullet \arrow[r] & X^\bullet_{-m-1}[m+1] \end{tikzcd}$$

をもつ. したがって, triangle : $X^\bullet_{-m-1}[m] \to F(S^{\bullet\bullet}(m)) \to X^\bullet \to X^\bullet_{-m-1}[m+1]$ を得る. また, ($*2$) により, Claim の 2 つ目の可換性を得る. そこで, Claim の 1 つ目の可換性を考える. commutative diagram ($*$) の 2 行目の triangle : $F(S^{\bullet -m}[m-1]) \to F(S^{\bullet\bullet}(m-1)) \to F(S^{\bullet\bullet}(m)) \xrightarrow{u} F(S^{\bullet -m}[m])$ に $\mathrm{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(F(S^{\bullet -m-1}[m]), -)$ を applay して, $\mathrm{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(F(S^{\bullet -m-1}[m]), F(S^{\bullet\bullet}(m-1))) = 0$ より,

$$\text{mono} : \mathrm{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(F(S^{\bullet -m-1}[m]), F(S^{\bullet\bullet}(m))) \xhookrightarrow[u\circ -]{} \mathrm{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(F(S^{\bullet -m-1}[m]), F(S^{\bullet -m}[m]))$$

であることがわかる. さらに,

$$\begin{tikzcd} F(S^{\bullet\, -m-1}[m]) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\delta"'] & F(S^{\bullet\bullet}(m)) \arrow[r, "u"] & F(S^{\bullet\, -m}[m]) \end{tikzcd}$$

に対して, $S^{\bullet\bullet}$ の differential の作り方から, commutative diagram

$$\begin{tikzcd} F(S^{\bullet\, -m-1}[m]) \arrow[r] \arrow[dr] & F(S^{\bullet\bullet}(m)) \arrow[r, "u"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & F(S^{\bullet\, -m}[m]) \\ & X^{\bullet}_{-m-1}[m] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

をもち, $(*1)$ より, $F(S^{\bullet\, -m-1}[m])$ から $F(S^{\bullet\, -m}[m])$ への u を通る 2 つの道

$$\begin{tikzcd} F(S^{\bullet\, -m-1}[m]) \arrow[r] \arrow[dr] & F(S^{\bullet\bullet}(m)) \arrow[r, "u"] & F(S^{\bullet\, -m}[m]) \\ & X^{\bullet}_{-m-1}[m] \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

は等しい. したがって, 上の mono 性より, commutative diagram

$$\begin{tikzcd} F(S^{\bullet\, -m-1}[m]) \arrow[rr] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & F(S^{\bullet\bullet}(m)) \\ & X^{\bullet}_{-m-1}[m] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

を得る.

よって, ($F(S^{\bullet\bullet})$ を $F(S^{\bullet\bullet}(n))$ の homotopy colimit と思って) morphism $f^{\bullet} : F(S^{\bullet\bullet}) \to X^{\bullet}$ を得る. そこで, $Z^{\bullet} := C(f^{\bullet})$ とおく. triangle : $X^{\bullet}_{-n-1}[n] \to F(S^{\bullet\bullet}(n)) \to X^{\bullet} \to X^{\bullet}_{-n-1}[n+1]$ に $\mathrm{Hom}_{K^{-}(\text{proj-}A)}(P^{\bullet}[p], -)$ を apply して, Lemma B.2.6 より, $n > p$ に対して, $\mathrm{Hom}_{K^{-}(\text{proj-}A)}(P^{\bullet}[p], F(S^{\bullet\bullet}(n))) \simeq \mathrm{Hom}_{K^{-}(\text{proj-}A)}(P^{\bullet}[p], X^{\bullet})$ であることがわかる. したがって, ($F(S^{\bullet\bullet})$ を $F(S^{\bullet\bullet}(n))$ の homotopy colimit と思って) 任意の p に対して, $\mathrm{Hom}_{K^{-}(\text{proj-}A)}(P^{\bullet}[p], Z^{\bullet}) = 0$ となる. これは, add-$P^{\bullet}$ により生成される triangulated cat. に属する object に対して, $\mathrm{Hom}_{K^{-}(\text{proj-}A)}(-, Z^{\bullet}) = 0$ となることを意味している. よって, $Q^{\bullet} \in K^{-}(\text{proj-}B)$ に対して, $F(Q^{\bullet}(n))$ は add-$P^{\bullet}$ により生成される triangulated cat. に属するから, $\mathrm{Hom}_{K^{-}(\text{proj-}A)}(F(Q^{\bullet}(n)), Z^{\bullet}) = 0$ となる. ゆえに, ($F(Q^{\bullet})$ を $F(Q^{\bullet}(n))$ の homotopy colimit と思って) $\mathrm{Hom}_{K^{-}(\text{proj-}A)}(F(Q^{\bullet}), Z^{\bullet}) = 0$ となるから, $\mathrm{Hom}_{K^{-}(\text{proj-}A)}(F(Q^{\bullet}), F(S^{\bullet})) \simeq \mathrm{Hom}_{K^{-}(\text{proj-}A)}(F(Q^{\bullet}), X^{\bullet})$ を得る. ■

そこで, $X^\bullet \in K^-(\text{proj-}A)$ に対して, $X^\bullet$ の $P^\bullet$-resolusion を対応させることで $G : K^-(\text{proj-}A) \to K^-(\text{proj-}B)$ を作る. Lemma B.2.7 より, G が functor であることと F の right adjoint であることを次のように確かめることができる.

Prop B.2.8 F は right adjoint functor G をもつ.

proof. $X^\bullet \in K^-(\text{proj-}A)$ に対して, $G(X^\bullet) := (P^\bullet\text{-resolusion of } X^\bullet)$ とする. (well-definded であること) $X^\bullet \in K^-(\text{proj-}A)$ に対して, その $P^\bullet$-resolusion を $S^{\bullet\bullet}, T^{\bullet\bullet}$ とおく. Lemma B.2.7 より, $f^\bullet : F(S^{\bullet\bullet}) \to X^\bullet, g^\bullet : F(T^{\bullet\bullet}) \to X^\bullet$ が存在して,

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(F(T^{\bullet\bullet}), F(S^{\bullet\bullet})) & \xrightarrow[f^\bullet\circ-]{\simeq} & \mathrm{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(F(T^{\bullet\bullet}), X^\bullet) \\
\Cup & & \Cup \\
\alpha^\bullet & \longleftrightarrow & g^\bullet = f^\bullet\alpha^\bullet
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(F(S^{\bullet\bullet}), F(T^{\bullet\bullet})) & \xrightarrow[g^\bullet\circ-]{\simeq} & \mathrm{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(F(S^{\bullet\bullet}), X^\bullet) \\
\Cup & & \Cup \\
\beta^\bullet & \longleftrightarrow & f^\bullet = g^\bullet\beta^\bullet
\end{array}$$

をもつ. よって, $g^\bullet = f^\bullet\alpha^\bullet = g^\bullet\beta^\bullet\alpha^\bullet$ より, $g^\bullet(\beta^\bullet\alpha^\bullet - 1_{F(T^{\bullet\bullet})}) = 0$ となる. したがって, $g^\bullet \circ -$ の mono 性より, $\beta^\bullet\alpha^\bullet = 1_{F(T^{\bullet\bullet})}$ であることがわかる. 同様に, $\alpha^\bullet\beta^\bullet = 1_{F(S^{\bullet\bullet})}$ であることがわかる. ゆえに, F は fully faithful だから, $S^{\bullet\bullet} \simeq T^{\bullet\bullet}$ であることを得る. (morphism の対応) Lemma B.2.7 と F が fully faithful であることから, $Q^\bullet \in K^-(\text{proj-}B)$ に対して,

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(F(Q^\bullet), X^\bullet) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(F(Q^\bullet), FG(X^\bullet)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{K^-(\text{proj-}B)}(Q^\bullet, G(X^\bullet))$$

を得る. 特に, $Q^\bullet = G(X^\bullet)$ のとき, $1_{G(X^\bullet)}$ に対して, $\eta_{X^\bullet} : FG(X^\bullet) \to X^\bullet, \varphi(\eta_{X^\bullet}) = 1_{G(X^\bullet)}$ が存在する. このとき, $u^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet \in K^-(\text{proj-}A)$ に対して,

$$\begin{array}{cccc}
\varphi : & \mathrm{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(FG(X^\bullet), Y^\bullet) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Hom}_{K^-(\text{proj-}B)}(G(X^\bullet), G(Y^\bullet)) \\
& \Cup & & \Cup \\
& u^\bullet\eta_{X^\bullet} & \longmapsto & G(u^\bullet)
\end{array}$$

で $G(u^\bullet)$ を定める. (G が functor であること) additive であることは明らか. また, φ が natural であることから $G(v^\bullet u^\bullet) = G(v^\bullet)G(u^\bullet)$, η の取り方から $G(1) = 1$ であることがわかる. (adjoint であること) Lemma B.2.7 と F が fully faithful であることからしたがう. (G が exact であること) F が exact で G はその right adjoint より. ■

ここまでのことをまとめておく.

Prop **B.2.9** $P^\bullet \in K^b(\text{proj-}A)$, $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{proj-}A)}(P^\bullet, P^\bullet[n]) = 0$ $(n \neq 0)$ とし, $B := \mathrm{End}_{K^b(\text{proj-}A)}(P^\bullet)$ とおく. このとき, fully faithful exact functor $F : K^-(\text{proj-}B) \to K^-(\text{proj-}A)$ が存在して, F は right adjoint exact functor G をもつ.

また, F は equivalence $\mathrm{Hom}_{K^-(\text{proj-}B)}(P^\bullet, -) : \text{add-}P^\bullet \to \text{proj-}B$ の quasi-inverse の拡張, G は $P^\bullet$-resolusion により与えられた.

そこで, F が equivalence であることを示す.

Prop **B.2.10** add-$P^\bullet$ が $K^b(\text{proj-}A)$ を triangulated category として生成するならば, F は equivalence である.

proof. F が fully faithful であることは示した. よって, object 間の全射が示せればよい. また, right adjoint functor G が存在するから, $\delta : FG \to 1_{K^-(\text{proj-}A)}$ を counit とする. $X^\bullet \in K^-(\text{proj-}A)$, triangle $FG(X^\bullet) \overset{\delta_{X^\bullet}}{\to} X^\bullet \to Y^\bullet \to FG(X^\bullet)[1]$ に対して, exact functor G を apply して, triangle : $GFG(X^\bullet) \overset{G(\delta_{X^\bullet})}{\to} G(X^\bullet) \to G(Y^\bullet) \to GFG(X^\bullet)[1]$ を得る. このとき, $G(\delta_{X^\bullet})$ は iso. だから, $G(Y^\bullet) = 0$ となる. したがって, 任意の n に対して, $\mathrm{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(P^\bullet, Y^\bullet[n]) \simeq \mathrm{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(F(B), Y^\bullet) \simeq \mathrm{Hom}_{K^-(\text{proj-}B)}(B, G(Y^\bullet)) = 0$ となるから, triangulated category として, add-$P^\bullet$ で生成される object $Q^\bullet$ に対して, $\mathrm{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(Q^\bullet, Y^\bullet) = 0$ となる. しかし, 仮定より, A は add-$P^\bullet$ で生成されるから, $Y^\bullet = 0$ である. よって, $X^\bullet \simeq F(G(X^\bullet))$ であることがわかる. ■

最後に, $F|_{K^{-,b}(\text{proj-}B)} : K^{-,b}(\text{proj-}B) \to K^{-,b}(\text{proj-}A)$ であることを示す. それは次のことが示せればよい.

Prop **B.2.11** $X^\bullet \in K^-(\text{proj-}A)$ とする. このとき, $X^\bullet \in K^{-,b}(\text{proj-}A)$ であることと任意の $Y^\bullet \in K^-(\text{proj-}A)$ に対して, $\mathrm{Hom}_{K^{-,b}(\text{proj-}A)}(Y^\bullet, X^\bullet[n]) = 0$ $(n \ll 0)$ となることは同値である.

proof. $X^\bullet \in K^-(\text{proj-}A)$ が任意の $Y^\bullet \in K^-(\text{proj-}A)$ に対して, $\mathrm{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(Y^\bullet, X^\bullet[n]) = 0$ $(n \ll 0)$ とする. 特に, $Y^\bullet = A$ とすると, A は proj. より,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{Hom}_{K^-(\text{proj-}A)}(A, X^\bullet[n]) \\ &\simeq H^n(\mathrm{Hom}^\bullet(A, X^\bullet)) \\ &\simeq H^n(\mathrm{Hom}_A(A, X^\bullet)) \\ &\simeq H^n(X^\bullet) \end{aligned}$$

となるから, $X^\bullet \in K^{-,b}(\text{proj-}A)$ であることがわかる. 逆は明らか. ■

B.3 Two-sided tilting complex

ここで, derived equivalence を与える functor が left derived functor $- \otimes^{\mathbf{L}}_A M^\bullet_B$ になっていることを解説する.

A と B は derived equivalent とし, $P^\bullet \in K^b(\text{proj-}A)$ は tilting complex with $B \simeq \mathrm{End}_{K^b(\text{proj-}A)}(P^\bullet)$, $Q^\bullet \in K^b(\text{proj-}B)$ は tilting complex with $A \simeq \mathrm{End}_{K^b(\text{proj-}B)}(Q^\bullet)$ とする. つまり,

$$\begin{array}{ccc} D^b(\text{mod-}A) & \simeq & D^b(\text{mod-}B) \\ \Cup & & \Cup \\ P^\bullet & \longleftrightarrow & B_B \\ & & \\ A_A & \longleftrightarrow & Q^\bullet \end{array}$$

このとき, ${}_A A \otimes_k P^\bullet_A \in K^b(A\text{-proj-}A)$ は tilting complex with $A^{\mathrm{op}} \otimes_k B \simeq \mathrm{End}_{K^b(A\text{-proj-}A)}(A \otimes_k P^\bullet)$ となっている. よって,

$$\text{equivalent } (*) : \qquad D^b(A\text{-mod-}A) \simeq D^b(A\text{-mod-}B)$$

であることがわかる. つまり, $A^{\mathrm{op}} \otimes_k A$ と $A^{\mathrm{op}} \otimes_k B$ は derived equivalent である. そこで, equivalence $(*)$ による ${}_A A_A$ の対応として, ${}_A M^\bullet_B \in D^b(A\text{-proj-}B)$ をとる.

$$\begin{array}{lccc} \text{equivalent}(*) : & D^b(A\text{-mod-}A) & \simeq & D^b(A\text{-mod-}B) \\ & \Cup & & \Cup \\ & {}_A A_A & \longleftrightarrow & {}_A M^\bullet_B \end{array}$$

このとき, $M^\bullet_B \simeq Q^\bullet_B$ in $D^b(\text{mod-}B)$, ${}_A M^\bullet \simeq {}_A\mathbf{R}\mathrm{Hom}^\bullet(P^\bullet_A, {}_A A_A)$ in $D^b(A\text{-mod})$ となっている.

よって, $Q^\bullet_B$ からの functor : $D^b(\text{mod-}A) \to D^b(\text{mod-}B)$ の構成

$$\begin{tikzcd} K^-(\text{proj-}A) \arrow[r] & K^-(\text{proj-}B) \\ K^{-,b}(\text{proj-}A) \arrow[r] \arrow[u] & K^{-,b}(\text{proj-}B) \arrow[u] \\ \text{proj-}A \arrow[u] & \text{add-}Q^\bullet_B \arrow[u] \arrow[l, "\simeq"', "{\begin{array}{l}\mathrm{Hom}_{K^-(\text{proj-}B)}(Q^\bullet, -)_A \\ \simeq \mathrm{Hom}_{K^-(\text{proj-}B)}(M^\bullet, -)_A\end{array}}"] \end{tikzcd}$$

より, $- \otimes^{\mathbf{L}}_A M^\bullet_B : D^b(\text{mod-}A) \to D^b(\text{mod-}B)$ で与えられることがわかる.

Remark **B.3.1** 上のように, 片側の tilting complex $Q^\bullet_B$ を両側の complex に取れ直せたことが重要であるが, ここでは体 k 上で考えているため, すべての k-module は projective になることからこれらのことが従う. しかし, 一般に, commutative ring 上の algebra に対してはこのようなことが成り立つかはわかっていない. 今の場合のように, $- \otimes^{\mathbf{L}}_A M^\bullet_B$ で与えられる derived equivalence を standard derived equivalence という. non-standard な derived equivalence の例は知られていない.

Def **B.3.2** 上で与えられた complex ${}_A M^\bullet_B$ を two-sided tilting complex という.

付録 C　Example 2.2.49 の derived equivalence について

Example 2.2.49 でみたように, Example 2.1.9 (2) と (3) (それぞれ A, B とおく) は derived equivalent である. ここではその derived equivalence での simple module の対応を与える.

$$\begin{array}{ccc} D^b(\text{mod-}A) & \xrightarrow{\simeq} & D^b(\text{mod-}B) \\ \text{⋓} & & \text{⋓} \\ 1 & \longleftrightarrow & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & & \\ 2 & \longleftrightarrow & 1[1] \end{array}$$

(1) 1_A について.

$\mathrm{Hom}_{K^b(\text{mod-}A)}(P^\bullet, 1[n]) = 0$ $(n \neq 0)$ より, $1_A \in D^b(\text{mod-}A)$ は $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{mod-}A)}(P^\bullet, 1)_B \in D^b(\text{mod-}B)$ に対応する. A での triangle : $\Omega(1) \to P(1) \to 1 \to \Omega(1)[1]$ に $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{mod-}A)}(P^\bullet, -)$ を apply して, B での exact : $0 \to \mathrm{Hom}_{K^b(\text{mod-}A)}(P^\bullet, \Omega(1)) \to \mathrm{Hom}_{K^b(\text{mod-}A)}(P^\bullet, P(1)) \to \mathrm{Hom}_{K^b(\text{mod-}A)}(P^\bullet, 1) \to 0$ を得る. $P(1) \mid P^\bullet$ より, $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{mod-}A)}(P^\bullet, P(1)) \simeq P(2)_B$ であり, さらに, $\Omega(1)_A \simeq 1_A$ より, $\mathrm{Hom}_{K^b(\text{mod-}A)}(P^\bullet, 1)_B \simeq \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ であることがわかる.

(2) 2_A について.

$\mathrm{Hom}_{K^b(\text{mod-}A)}(P^\bullet, 2[n]) = 0$ $(n \neq -1)$ より, $2[-1]_A \in D^b(\text{mod-}A)$ は $\mathrm{Hom}_{D^b(\text{mod-}B)}(P^\bullet, 2[-1])_B \in D^b(\text{mod-}B)$ に対応する. $Y_B := \mathrm{Hom}_{D^b(\text{mod-}B)}(P^\bullet, 2[-1])_B$ とおくと, $\dim Y = 1$ だから, Y_B は simple module である. さらに, $Z_B := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ に対して, $\mathrm{Hom}_B(Y, Z) \simeq$

$\mathrm{Hom}_{D^b(\text{mod-}B)}(Y,Z) \simeq \mathrm{Hom}_{D^b(\text{mod-}A)}(2[-1],1) \simeq \mathrm{Ext}^1_A(2,1)$ より, $\mathrm{Hom}_B(Y,Z)$ は 1-dim. である. したがって, $2[-1]_A$ は 1_B に対応することがわかる. よって, 2_A は $1[1]_B$ に対応する.

このことから, 2_B の対応も与えることができる. 2_B の対応を $X^\bullet_A$ とおく. B での triangle : $1 \to \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \to 2 \to 1[1]$ に対して, derived equivalence で triangle は triangle にうつるから, A での triangle : $2[-1] \to 1 \to X^\bullet \to 2$ を得る. さらに (TR2) より, triangle : $1 \to X^\bullet \to 2 \to 1[1]$ を得るが, triangle の一意性より, $X^\bullet \simeq \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_A$ であることがわかる.

参考文献について

- finite dimensional algebra, Morita theory, quiver [11, 2]
- 有限群のモジュラー表現 [1, 11]
- triangulated category, derived category, derived functor, derived equivalence [6, 14, 15, 13, 22, 21, 4, 5]
- stable module category, stable equivalence, stable equivalence of Morita type, 奥山の方法 [5, 16, 7, 8, 9, 3, 12, 17]
- tilting module, Wakamatsu tilting module [4, 5, 18, 19, 20, 10]

参考文献

[1] J. L. Alperin. *Local Representation Theory*. Cambridge University Press, 1986.

[2] Y. A. Drozd and V. V. Kirichenko. *Finite dimensional algebras*. Springer-Verlag, 1980.

[3] A. S. Dugas and R. Martinez-Villa. *A note on stable equivalences of Morita type*. J. Pure. Appl. **208**, 421-433, 2007.

[4] D. Happel. *On the derived category of a finite-dimensional algebra*. Comm. Math. Helv. **62**, 339-456, 1987.

[5] D. Happel. *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebra*. (LMS Lecture Note Series 119) Cambridge Unibersity Press, 1988.

[6] M. Hoshino. *Derived category*.

[7] M. Linckelmann. *Stable equivalences of Morita type for self-injective algebras and p-groups*. Math. Z. **223**, 87-100, 1996.

[8] M. Linckelmann. *On stable equivalences of Morita type*. in ”Derived Equivalences for Group Rings”, by S. König and A. Zimmermann, Springer Lecture Note in Mathematics, Vol. 1685 pp.221-232, 1998.

[9] Y. Liu. *On stable equivalences of Morita type for finite dimensional algebras*. Proceedings of the American mathematical society **131**, Number 9, 2657-2662, 2003.

[10] F. Mantese and I. Reiten. *Wakamatsu tilting modules*. J. Alg. **278** 532-522, 2004.

[11] 永尾 汎・津島行男. 有限群の表現. 裳華房, 1987.

[12] T. Okuyama. *Some examples of derived equivalent blocks of finite groups*. 第 6 回多元環と表現論シンポジウム報告集, 1996.

[13] J. Rickard. *Derived categories and stable equivalence*. J. Pure. Appl. **61**, 303-317, 1989.

[14] J. Rickard. *Morita theory for derived categories*. J. London Math. Soc. **39**, 436-456, 1989.

[15] J. Rickard. *Derived equivalences as derived functors*. J. London Math. Soc. **43**, 37-48, 1991.

[16] J. Rickard. *Some recent advances in modular representation theory*. Canadian mathematical society conference proceedings **23**, 1998.

[17] J. Rickard. *Equivalences of derived categories for symmetric algebras*. J. Alg. **257** 460-481, 2002.

[18] T. Wakamatsu. *Stable equivalences induced from generalized tilting modules*. Proceedings of the 36th Symposium on Ring Theory and Representation Theory, 147-156, Symp. Ring Theory Represent Theory Organ. Comm., Yamanashi, 2004.

[19] T. Wakamatsu. *Stable equivalences induced from generalized tilting modules II*. Proceedings of the 37th Symposium on Ring Theory and Representation Theory, 113-115, Symp. Ring Theory Represent Theory Organ. Comm., Osaka, 2005.

[20] T. Wakamatsu. *Stable equivalences induced from generalized tilting modules III*. Proceedings of the 39th Symposium on Ring Theory and Representation Theory, 96-104, Symp. Ring Theory Represent Theory Organ. Comm., Yamaguchi, 2007.

[21] A. Zimmermann. *Onesided tilting complexes for group rings*. in ”Derived Equivalences for Group Rings”, by S. König and A. Zimmermann, Springer Lecture Note in Mathematics, Vol. 1685 pp.81-104, 1998.

[22] A. Zimmermann. *Tilting with additional strucure : twosided tilting complexes*. in ”Derived Equivalences for Group Rings”, by S. König and A. Zimmermann, Springer

Lecture Note in Mathematics, Vol. 1685 pp.105-149, 1998.

[23] 相原琢磨. 位数 9 の基本アーベル群を不足群にもつ非主ブロックについてのブルエ予想. 修士論文, 2006.