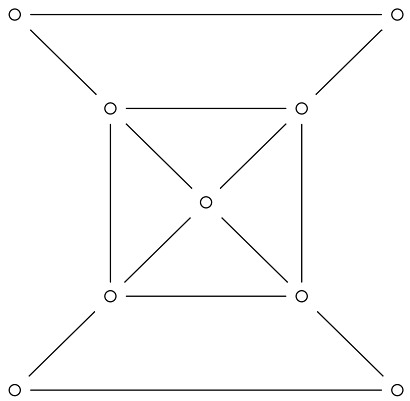
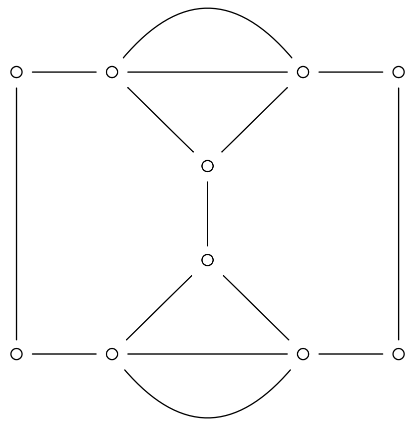
数学の探求「グラフ理論」 演習 2024.11.20 (水) ~~2024.11.15 (金)~~

1 次のグラフが一筆書き可能かどうかを判定し, 可能ならばその一筆書きを 1 つ与えよ.

(1)



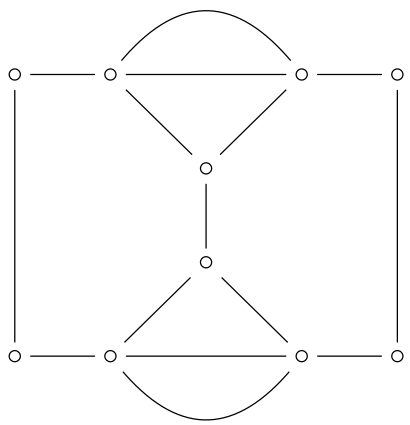
(2)



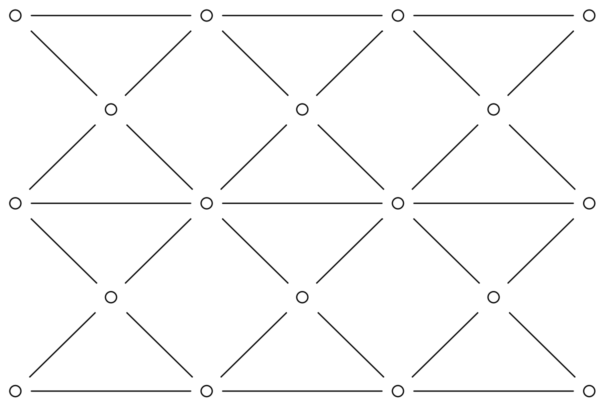
2 フラーリのアルゴリズムを改良し, 奇点がちょうど 2 個のグラフの一筆書きアルゴリズムを求めよ. また, それを用いて, 次のグラフの一筆書きを 1 つ与えよ.

2 つの奇点を新しい辺 a で結び (これですべて偶点になる), 元奇点 (どちらでも可) をスタート, 最初の一歩を a として, フラーリのアルゴリズムを適用する. 最後に辺 a を取り除けば完成 (もう一方の奇点がスタートになる).

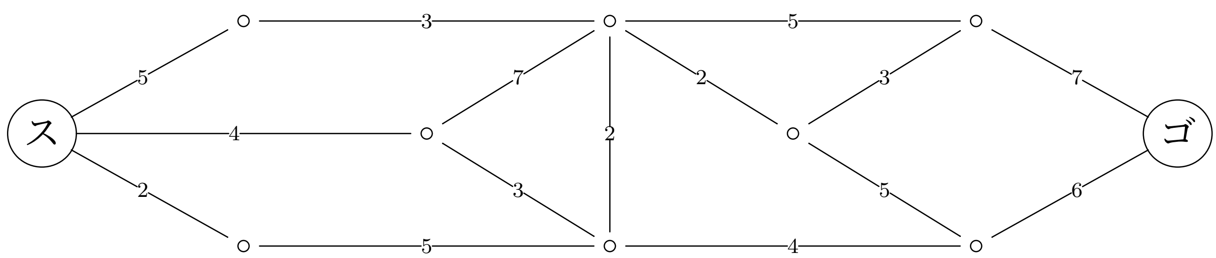
(1)



(2)



3 次の重みつきグラフに対して, スタートからゴールへの最短経路を求めよ.



ダイクストラ法 ス から次の要領で，各頂点に最短距離およびそこまでの最短経路を記入していく:

Step 1： スタートに 0 を記入する．

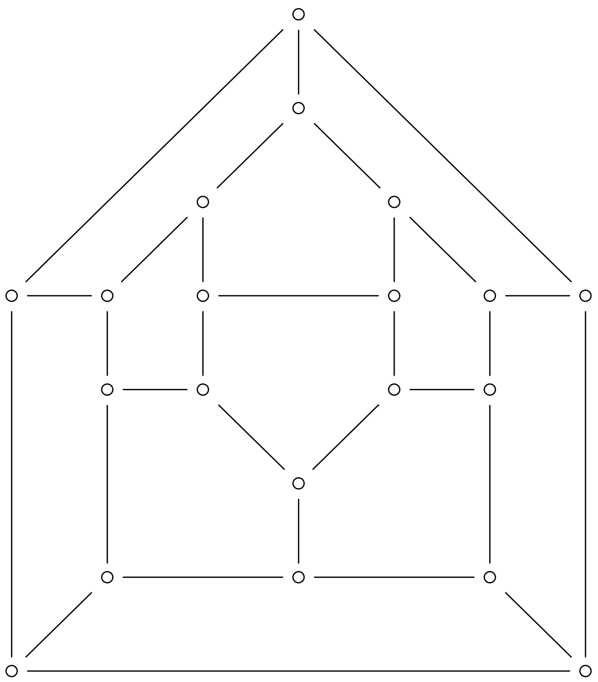
Step 2： それまでに通った頂点と辺で結ばれた頂点に，その辺を通ってかかった距離を (仮) として記入する: $x \overset{\ell}{\text{——}} \boxed{x+\ell}$

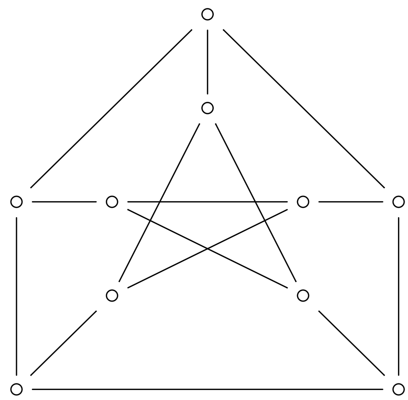
Step 3： (仮) の中で最小なものを選び，その頂点に距離およびそこまでの経路を記入する．

Step 4： これを繰り返せば，すべての頂点を選んだことになり，その頂点までの最短経路および最短距離が確定する．

4 次のグラフの彩色数を求めよ．

(1) 正 12 面体グラフ (5 角形，頂点の次数 3)　　(2) ペテルセングラフ





5 頂点彩色がちょうど 2 色となるグラフを分類せよ．(彩色数が 2 のグラフ = ○○ グラフ)

○ ○ グラフ = 二部グラフ = 奇数サイクルをもたないグラフ

6 オイラーの公式を用いて，正多面体グラフがちょうど 5 種類であることを示せ．ここで，**正 n 面体グラフ**とは，ある整数 $p, q \geq 3$ ですべての面が p 角形かつすべての頂点の次数が q である平面グラフである．

7 完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ をトーラス上に辺が交わることなく描け．

数学の探求 「グラフ理論」研究 2024.11.20 (水) ~~2024.11.15 (金)~~

研究の過程

① 疑問　② 例　③ 予想　④ 主張　⑤ 証明

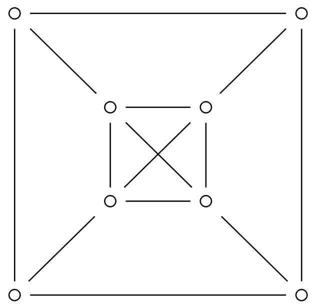
【疑問をもつことはとても難しい】 ⇝ 訓練と知識が必要 ☞ 疑問の "種類"

✓ なぜ? どうして?　✓ 一般化　✓ 高次元化　✓ 抽象化　✓ 分類問題　✓ 数値解析

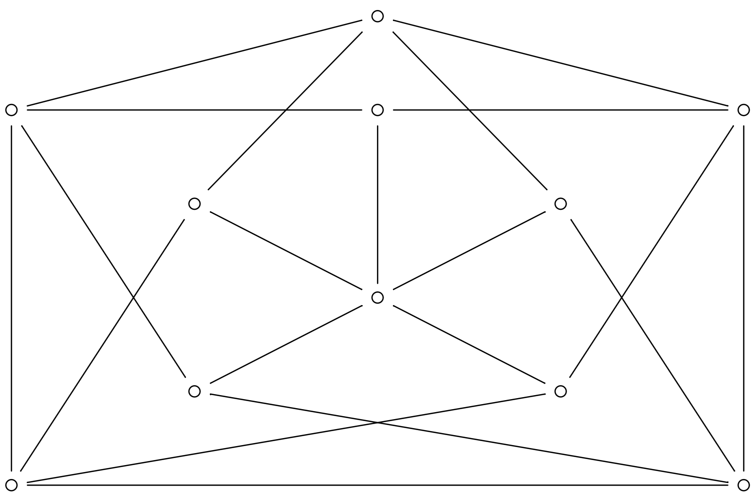
$\boxed{1}$ **一般化正多面体グラフ**とは, ある整数 $\overset{p \geq 2,\, q \geq 1}{\cancel{p, q \geq 2}}$ ですべての面が p 角形かつすべての頂点の次数が q のときにいう. ここで, **2 角形**とは, C_2 : ○⌒○ および ○—○ (大外の多角形が 2 角形) をさす. また, すべての頂点の次数が 2 であるグラフはサイクルである. このとき, 正多面体グラフでない一般化正多面体グラフをすべて分類せよ.

$\boxed{2}$ **トーラス上正多面体グラフ**とは, 種数 1 のグラフで, トーラス上に辺が交わることなく描いたとき, ある整数 $p, q \geq 3$ ですべての面が p 角形かつすべての頂点の次数が q となるグラフをいう. このようなグラフはどのくらい存在するか.

$\boxed{3}$ 次 (種数は高々1) は平面グラフか. (K_5 または $K_{3,3}$ の細分を含むか?) 平面グラフならば平面上に, 平面グラフでないならばトーラス上に, 辺が交わることなく描け. (解決済み H)



$\boxed{4}$ 次のグラフを**グレッチグラフ**とよび, これは平面グラフでない. そこで, K_5 または $K_{3,3}$ の細分を含むことを観察せよ. (解決済み D)



$\boxed{5}$ グレッチグラフはトーラス上に辺が交わることなく描けるか. (解決済み D)

$\boxed{6}$ 完全 2 部グラフ $K_{m,n}$ $(m \leq n)$ が種数 1 以下となる m, n の組 (m, n) をすべて求めよ. (解決済み F)

$(m, n) = (1, \text{何でも}),\ (2, \text{何でも}),\ (3, n)\ (n = 3, 4, 5, 6),\ (4, 4)$
(実際に, これらはすべて種数 1 以下でトーラス上に埋め込める.)

7 6色問題(平面グラフは高々6色で頂点彩色できる)を示せ. (解決済み B) (5色問題はどうか?)

8 木の最大彩色数はいくつか. (解決済み G) また, K_3 を含まない平面グラフの最大彩色数はいくつか. (K_3 を含まない彩色数が3や4となる平面グラフはあるか?)

9 頂点彩色にちょうど7色必要な種数1のグラフを挙げ, それをトーラス上に辺が交わることなく描け. (解決済み C)

10 頂点彩色にちょうど4色必要な平面グラフは K_4 を含むか. そうでないグラフがあれば, そのようなグラフのうち, 頂点数が最小のグラフを求めよ.

11 K_3 を含まないグラフで頂点彩色に5色必要なグラフを求めよ. (任意の自然数 k ではどうか?) (A)

12 重みつきグラフの2頂点の間の最短経路を求めるアルゴリズムを求めよ. (解決済み E)

□ 左に問題番号をかき, 議論をまとめよう.

✔ グラフ理論について自由に考え, 疑問やわからないこと, 成り立ちそうな性質などをかいてみよう.

(数学や東京学芸大学についての質問や疑問があればいつでもどうぞ: `aihara@u-gakugei.ac.jp`)

6 【小石のテクニック】 次を示してみよう: (連結な) グラフ G の頂点数を v, 辺数を e, 種数を g とおく. また, G は 2 重辺 およびループをもたないとする. このとき, 次が成り立つ:

(1) $1 + \frac{1}{6}e - \frac{1}{2}v \leq g$;

(2) さらに, G が K_3 を含まないならば, $1 + \frac{1}{4}e - \frac{1}{2}v \leq g$ ($\leftarrow$ (1) より良い評価を与えている).

(1) について: 各辺の両側に小石 $\times$ をおく: $\circ\overset{\times}{\underset{\times}{\text{――}}}\circ$. このとき, 小石の総数は $2e$ である (一辺に 2 個ずつ). 一方, G は 2 重辺およびループをもたないから, 各面は三角形以上である. そのため, 各面の小石の個数は 3 個以上で f 面あるから, 面ごとに小石を少なく見積もって数えると $3f$ 個となる. 合わせると, $2e$ (総数) $\geq 3f$ (少なく見積もって) を得る. オイラーの公式より, $f - e + v = 2 - 2g$ だから,

$$2 - 2g = f - e + v \leq \frac{2}{3}e - e + v \leq -\frac{1}{3}e + v.$$

(2) について: 上の議論で, $3f \rightsquigarrow 4f$ (各面が四角形以上) とすればよい.

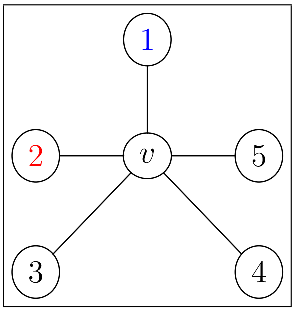
【$K_{4,5}$ について】 $K_{4,5}$ は $v = 4 + 5 = 9, e = 4 \times 5 = 20$ で K_3 をもたないが, (2) $1 + \frac{1}{4}e - \frac{1}{2}v = \frac{3}{2} \leq g$ より, 種数 g は 2 以上となる. したがって, $K_{4,5}$ は種数 1 のトーラス上には埋め込めない. (種数 2 の曲面に埋め込めて, $K_{4,5}$ の種数は 2 である.)

7 【5 色問題】 (連結な) 平面グラフ G は高々5 色で彩色できる.

✎ 平面グラフには, 次数が 5 以下の頂点がある.
握手補題より, 次数の合計は辺数の 2 倍 ($2e$) である. 一方, $\boxed{6}$ (1) (平面グラフ, $g = 0$ として) より,

$$e \leq 3v - 6 \rightsquigarrow 2e \text{ (次数の合計)} \leq 6v - 12 < 6v \text{ (次数が全部 6 のときの合計)}.$$

よって, 次数が全部 6 (以上) ということはなく, 次数 5 以下の頂点が存在する.



そこで, 5 色問題に取り掛かろう. 次数 5 以下の頂点を v とする. v の周囲の頂点が 4 色以下で塗られていたら終了なので, 5 色で塗られているとする. ここで, 頂点 ① から出発して, ① の色 (青) および ② の色 (赤) だけで塗られている頂点を辿ってできる道 P を考える (青赤青赤... の道).

(i) その道 P の中に頂点 ② がなければ, P の頂点の色を反転させて, 赤青赤青... にしても彩色されている. このとき, 頂点 ① が赤となり, v の周囲が 4 色となるから終了する.

(ii) そこで, 道 P の中に頂点 ② があるとしよう; つまり, ① から ② に辿れる.
同様に, v の周囲のどの 2 点を選んでも, その片方からもう一方へ辿れる道があるとしてよい. (もし辿れない 2 点があれば, (i) から v の周囲を 4 色で塗れてしまう.) しかし, それは G の中に K_5 の細分が含まれていることを意味し, G が平面グラフであることに矛盾する.

したがって, (i) のような状況が必ず起こるから, v の周囲は 4 色で塗れることになり, v を 5 色目とすれば, G は高々5 色で彩色可能であることがわかる.

✍ この議論 (特に上の✎) は, 種数 1 のグラフの頂点彩色【7 色問題】へ応用できる (追記 ✡).

8 頂点彩色を考える場合, ループ (彩色できない) および 2 重辺 (あっても意味ない) をもたないとしてよい.

(1) 【K_3 を含まない (連結) 平面グラフは, 高々3 色で彩色可能である.】(グレッチ)

(2) 【K_3 を含まない種数 1 の (連結) グラフは, 高々4 色で彩色可能である.】(クロンク–ホワイト)
次の**ディラックの公式**を認める: 頂点数 v, 辺数 e, 彩色数 k の完全グラフでないグラフで, どの一辺でも取り除くと彩色数が $k-1$ となるグラフに対して, 次が成り立つ:

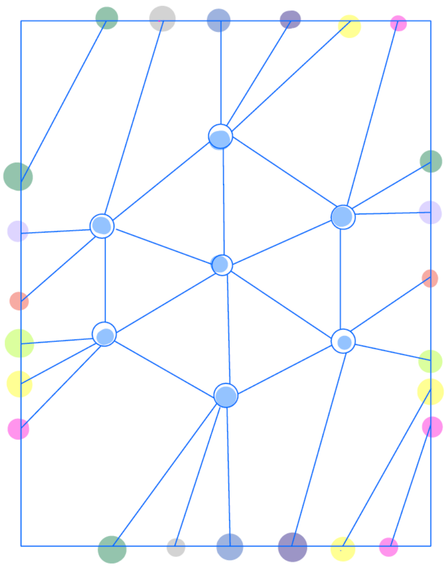
$$2e \geq (k-1)v + k - 3.$$

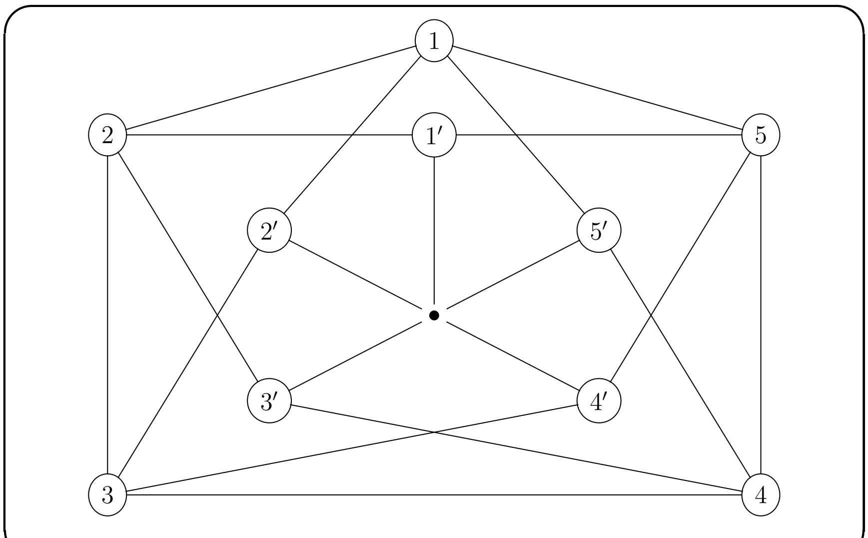
G を K_3 を含まない種数 g, 彩色数 k のグラフとする. (自動的に, 完全グラフではない.)

- G のどの一辺を除いても彩色数が $k-1$ となってしまう場合:
  $\boxed{6}$ (2) (種数 $g \leq 1$ として) より, $2v \geq e$ だから, ディラックの公式と合わせて,
  $$4v \geq (k-1)v + k - 3 \ \rightsquigarrow\ \underbrace{(v+1)}_{>0}(k-5) \leq -2 \ \rightsquigarrow\ k < 5.$$
- 取り除いても彩色数が k で変わらない辺がある場合:
  彩色数が k で変わらないぎりぎりまで辺を取り除いたグラフを H とすると, G の彩色数は H の彩色数と同じ. H の一辺を取り除くと彩色数は $k-1$ となるから, H に対して上の議論が適用できて, H の彩色数は 4 以下である. よって, G の彩色数も 4 以下となる.

? 【K_3 を含まない種数 g の (連結) グラフは, 高々$3+g$ 色で彩色可能か.】

$\boxed{9}$ 【K_7 のトーラスへの埋め込み】





C_5 のミシェルスキーグラフ = グレッチグラフ

$\boxed{11}$ ☆ (K_3 を含まない) 彩色数 k のグラフから, (K_3 を含まない) 彩色数 $k+1$ のグラフを構成したい.

【ミシェルスキーグラフ】 G をグラフとする (頂点に $1 \sim n$ の番号をふる). 次のように, G に頂点および辺を追加して新しいグラフを構成する.

(1) 頂点 $1' \sim n'$ および $\bullet$ を増やす.　　(2) 各頂点 x' と $\bullet$ を辺で結ぶ.

(3) G に辺 x —— y があったら, 辺 x —— y' および x' —— y を結ぶ.

このようにしてできたグラフを, G の**ミシェルスキーグラフ**という: $\mu(G)$ で表す.

✔ G が K_3 を含む $\iff$ $\mu(G)$ が K_3 を含む.
($\mu(G)$ が K_3 を含むと, その一辺は G の辺であることに注意せよ.)

✔ $\mu(G)$ の彩色数は, G の彩色数 $+1$ である.
(G の彩色数が k ならば, 頂点 $1' \sim n'$ も k 色必要であることに注意せよ.)

✔ これを繰り返せば, 【任意の自然数 k に対して, K_3 を含まない彩色数 k のグラフ】が作れる.

✔ $\boxed{8}$ (2) から, K_3 を含まない彩色数 5 のグラフをトーラス上に埋め込むことはできない.

おまけ 種数 2 の曲面とは, 穴が 2 個の曲面 (2 人乗りの浮き輪みたいなやつ) である. そのような曲面の展開図はどのようになるか. また, $K_{4,5}$ (種数 2) をそのような曲面上へどのように埋め込めるか.

数学の探求 「グラフ理論」追記 2024.11.21 (木) 〜 2024.12.5 (現在)

(✡) 種数 $g\ (>0)$ のグラフは, 次数 $[\chi]-1$ 以下の頂点を必ずもつ. ただし, $\chi := \dfrac{7+\sqrt{1+48g}}{2}$ である.

$\boxed{7}$ の議論と同様に, $2e \leq 12g+6v-12$ を得るが, $12g+6v-12 < \alpha v$ となる正の整数 α を取れば,

$$2e\ (\text{次数の合計}) \leq 12g+6v-12 < \alpha v\ (\text{すべて次数}\ \alpha\ \text{のとき})$$

となり, 次数 $\alpha-1$ 以下の頂点が存在する. 一方, 次数は高々 $v-1$ であるため, ぎりぎりを想定して,

$$12g+6v-12 = (v-1)\cdot v \ \longrightarrow\ v = \frac{7 \pm \sqrt{1+48g}}{2}$$

を得るが, $g>0$ のとき ㊀ は否定される $(v>0)$. よって, $\alpha = [\chi]$ と取れることを示せばよい. $v \leq \alpha$ ならば, 次数は高々 $\alpha-1$ となり主張は明らかに成り立つから, $v \geq \alpha+1$ としてよい. このとき,

$$12g+6v-12 \leq (\chi-1)\cdot v < \alpha v.$$

㊟ 頂点数が極端に少ないと, 不等式 $12g+6v-12 < \alpha v$ は成り立たない. しかしこのとき, 与えられたグラフの正確な種数は落ちている; ここでは議論しない. どちらにしても, 主張「次数 $\alpha-1$ 以下の頂点が存在する」は成り立つ. すなわち, " 種数 g の曲面に埋め込めるグラフ (種数 g 以下のグラフ) " について, 主張が成り立つことを確かめている (つまり, g は固定).

✍ したがって, 種数 $g>0$ のグラフ G に対して, $\chi(G) \leq [\chi]$ を得る.

✔ 平面グラフ $(g=0)$ の場合も, 四色定理によって, $\chi(G) \leq [\chi]$ が成り立っている.

✔ この評価 $\chi(G) \leq [\chi]$ はぎりぎりの評価を与えている. つまり, 各種数 g に対して, 彩色数 $[\chi]$ となる種数 $\gamma\ (\leq g)$ のグラフが存在する. (完全グラフを考えよ. 下記の ⑦ も参照)

(✰) 次の写像を考える: 「γ は完全グラフ K_n の種数, χ は種数 g の (取り得る) 最大彩色数」を想定

(1) $\gamma:\ \mathbb{Z}_{\geq 4} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$n \longmapsto \left[\frac{n^2-7n+23}{12}\right]$$

(2) $\chi:\ \mathbb{Z}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 4}$

$$g \longmapsto \left[\frac{7+\sqrt{1+48g}}{2}\right]$$

✔ 制限 $\gamma : \mathbb{Z}_{\geq 7} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ および $\chi : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}_{\geq 7}$ はそれぞれ単射および全射である: $\chi\circ\gamma$ が恒等写像.

$(n \geq 9\ \text{のとき})\ \dfrac{n^2-7n+23}{12} - 1 < \gamma(n) \leq \dfrac{n^2-7n+23}{12}$ より,

$$n-1 \underset{(n\geq 5)}{\leq} \frac{7+\sqrt{4n^2-28n+45}}{2} < \chi\circ\gamma(n) \leq \frac{7+\sqrt{4n^2-28n+93}}{2} \underset{(n\geq 9)}{<} n+1.$$

よって, $n-1 < \chi\circ\gamma(n) < n+1$ となるから, $\chi\circ\gamma(n) = n$ である.

- γ の表

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\cdots$
$\gamma(n)$	0	1	1	1	2	3	4	5	6	8	10	11	13	$\cdots$

(種数 $7, 9, 12, \ldots$ をとる完全グラフは存在しない.)

- χ の表

g	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\cdots$
$\chi(g)$	4	7	8	9	10	11	12	12	13	13	14	15	15	16	$\cdots$

✔ 完全グラフ K_n の種数の決定

$s \in \mathbb{Z}_{\geq 7}$ を固定する (彩色数を一つ決める). $\chi : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}_{\geq 7}$ は全射だから, $\chi^{-1}(s)$ は空集合でない. また, $g \in \chi^{-1}(s)$ とすると, $s = \chi(g) = \left[\dfrac{7+\sqrt{1+48g}}{2} \right]$ より,

$$\frac{s^2-7s+12}{12} \leq g < \frac{s^2-5s+6}{12}$$

を得る. この中の最小値を r とする: $r = \left\lceil \dfrac{s^2-7s+12}{12} \right\rceil$. まず, $r \in \chi^{-1}(s)$ であることを示そう; このことから, r は $\chi^{-1}(s)$ の最小であることが従う. 実際, $r = \gamma(s) = \left[\dfrac{s^2-7s+23}{12} \right]$ である.

ここで, K_s の種数を t とすると, $\chi(r) = s = \chi(K_s) \leq \left[\dfrac{7+\sqrt{1+48t}}{2} \right] = \chi(t)$ である: ゆえに, $r \leq t$. (ここからが厄介) K_s を埋め込める種数 r の曲面を構成する: $t \leq r$. 最終的に, $t = r$ を得る.

? 種数 $7, 9, 12$ かつ (それぞれで) 彩色数 $12, 13, 15$ となるグラフ? (種数 g, 彩色数 $\chi(g)$ となるグラフ)

- 完全グラフ K_{12} (種数 6, 彩色数 12) は種数 7 (最大彩色数 12) の曲面上に埋め込めるから, 彩色の評価 $\chi(G) \leq [\chi]$ は "ぎりぎりの評価" を与えているといえる. (種数 7 の曲面上でも彩色数 12 は必要.) 一方, 【種数 7 かつ彩色数 12 のグラフ】がほしい.
- K_s は, 彩色数 s となるグラフの中で種数が最小のグラフである. そこで, K_{s+1} の頂点を一つ選び, それに接続する辺を取り除いていき, 種数が K_{s+1} のそれより落ちるぎりぎりのグラフを G とおく; 少なくとも 2 辺は残せるから, $K_s \cup \{\circ\}$ までには終わる. G の彩色数は s であり, 一辺を取り除くことで種数は高々1 しか変わらない (逆に, 一辺加えると種数は高々1 しか変化しない; そこにハンドルを加える) から, $\gamma(K_s) \leq \gamma(G) = \gamma(K_{s+1}) - 1$. これによって, ($\gamma(K_s) < g < \gamma(K_{s+1})$ となる整数 g がある場合は) 期待のグラフ G が得られる.

  ? K_{13} (種数 8) から上の操作によって, いつ種数が落ちるか? (7 になるか?)

(☆) **【クラトフスキーの定理】** G が平面グラフ $\iff$ G は K_5 および $K_{3,3}$ の細分を含まない.

($\Rightarrow$) K_5 および $K_{3,3}$ は平面的でないから, それらの細分も平面的でない. したがって, そのようなものを含むグラフも平面的でない.

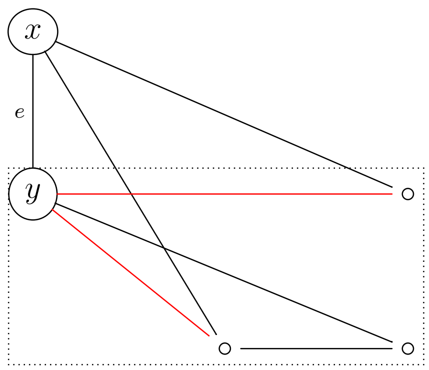
($\Leftarrow$) (背理法) 連結グラフ G が平面的でないと仮定する. このとき, どの頂点を取り除いても平面的であるとしてよい. (ループや多重辺も消してよい.)

Step 1 : G は 3 連結グラフである. $\left(k \text{ 連結} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{どの } k \text{ 個未満の頂点を取り除いても連結} \right)$

- 任意の 1 点を取り除く $\longrightarrow$ もし連結とならないような取り除き方があったら, $G = G_1 + \{x\} + G_2$ $(G_1 \neq \emptyset \neq G_2)$ で, G の取り方から G_1 および G_2 は平面的となる. $G_i \neq \emptyset$ より, $G_{i+1} + \{x\}$ (添え字は $\bmod 2$) も平面的である. よって, $G_1 + \{x\}$ と $G_2 + \{x\}$ を頂点 x でくっつけても平面的であるが矛盾.
- 任意の 2 点を取り除く $\longrightarrow$ $G = G_1 + \{x, y\} + G_2$ として同じ.

? 3 点以上? $G = G_1 + \{x, y, z\} + G_2$ のとき, $\{x, y, z\}$ で三角形をなしていたら?

Step 2 : 任意の辺 e で縮約しても, (G 自身がそうだから) G/e は K_5 および $K_{3,3}$ の細分を含まない. ただし, ここでいう**縮約**は, それによってできたループおよび多重辺を取り除く.



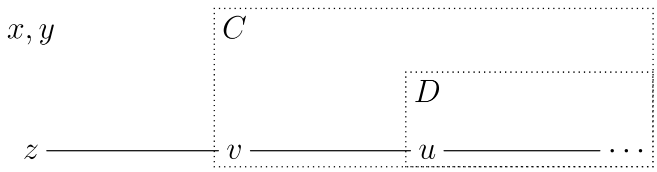
G/e の新しい辺

✔ y —— x —— $\circ$ を赤い線の細分と見ればよい.

Step 3 : $|V(G)| \geq 5$ ならば, G はその縮約 G/e がまた 3 連結となる辺 e をもつ.

- (背理法) どの辺で縮約しても G/e が 3 連結でないと仮定する.
- ゆえに, G/e はある 2 頂点 z_1, z_2 によって分断される: $G/e = G_1 + \{z_1, z_2\} + G_2$.
- この 2 頂点がどちらも y $(= x \text{ in } G/e)$ でなければ, $y \in G_1$ としてよい. G において x および G_2 のある頂点が繋がっていたら, G/e において G_1 と G_2 が y $(= x)$ で結ばれるから, x は G においても G_2 と非連結である. このとき, $G - \{z_1, z_2\} = G_1 \cup G_2$ となってしまうため, G が 3 連結であることに矛盾する: $z_1 = y$. もし $z_2 = y$ ならば, $G - \{x - y\} = G_1 \cup G_2$ となるから, $z_2 \neq y$ が必要となる: $z := z_2$.
- このとき, G も $T := \{x, y, z\}$ で切断されることになる: $G = G_1 + T + G_2$. 一方, G は 3 連結だから, T のどの真部分集合を取ってもそれで切断されることはない. そのため, x, y, z は G_1 および G_2 の任意の連結成分 $(*)$ と接続している.
- 以上の操作を, すべての辺 e および (それによって取り得る) z に対して施し, 連結成分 $(*)$ の中で頂点数が最小のものを C とする. (そのときに用いた x, y, z を改めて x, y, z とよぶ.) また, z と C の接続点を v とおく: $z \overset{e'}{-\!\!-\!\!-\!\!-} v$ $(v \in C)$. (x, y も C のある点と隣接していることに注意せよ.)
- ここで, 辺 e' による縮約 G/e' を考えると, 背理法の仮定より, 同様の操作で $G = G'_1 + \{z, v, w\} + G'_2$ とできる.
- x と y は G において繋がっているから, 同一の連結成分に属している. ゆえに, (それを G'_1 側から取れば) G'_2 側に x, y を含まない連結成分 D が存在する.
- v は D のある点 u と接続しているが, それは x, y, z とは異なる. C は (G_2 における) v を含む連結成分 (x, y, z を含まない) だったから, u は C に属す; よって $D \subseteq C$.
- しかし, $v \in C \setminus D$ だから, これは C の最小性に反す.

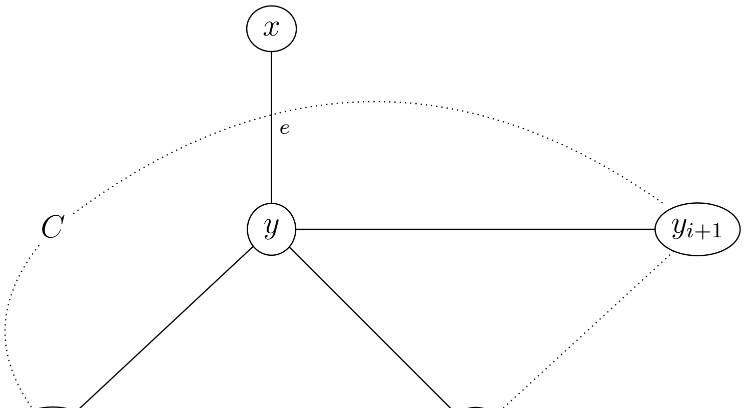
✔ x, y, z, v, u がすべて異なることを使っている.



Step 4 : 以上のことから, 縮約 (「K_5 および $K_{3,3}$ の細分を含まない」「3 連結」を保存) を繰り返して, G/e が平面的になると仮定してよい. このとき, G も平面的となる.

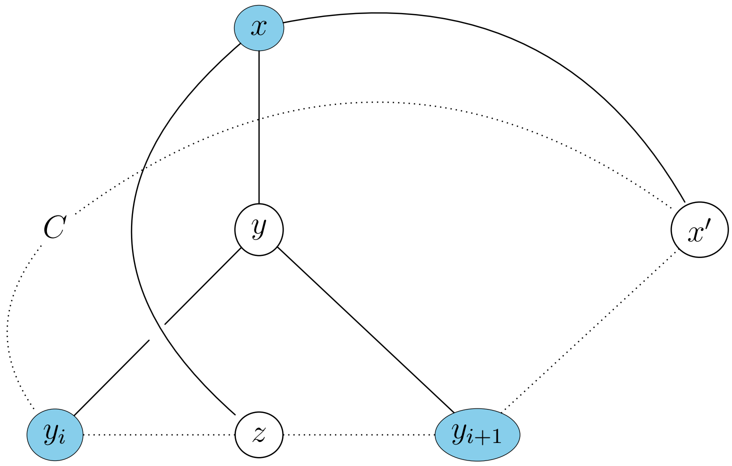
✔ G/e を平面に埋め込んでから, G も同様に埋め込めることを示す (上の図を参照).

- G/e は 3 連結より $G/e - y$ は 2 連結だから, G/e に y を含む領域 (面) が存在する: その境界を C とおく. $\rightsquigarrow$ G におけるサイクルとみなせる.



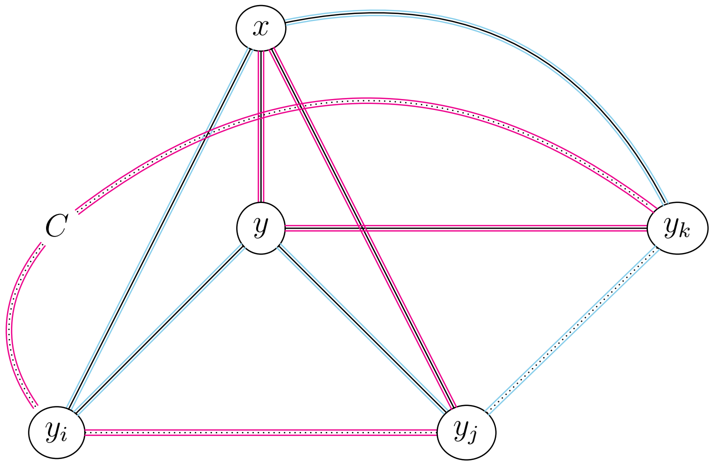
- (G において) x に隣接する (y 以外の) 頂点はすべて C 上にある.
- x に隣接している (y 以外の) 頂点がすべて, ある y_i および y_{i+1} の間に入っていれば, x をその領域の中に置くことで, G を平面へ埋め込むことができる.

* (背理法) x に隣接している (y 以外の) 頂点がすべて集結している区間 $y_i \sim y_{i+1}$ はないと仮定する.
* $y_?$ と一致しない x に隣接する (y 以外の) 頂点 z があるならば, G が $K_{3,3}$ の細分を含んでしまう (G は 3 連結だから, x の次数は 3 以上):

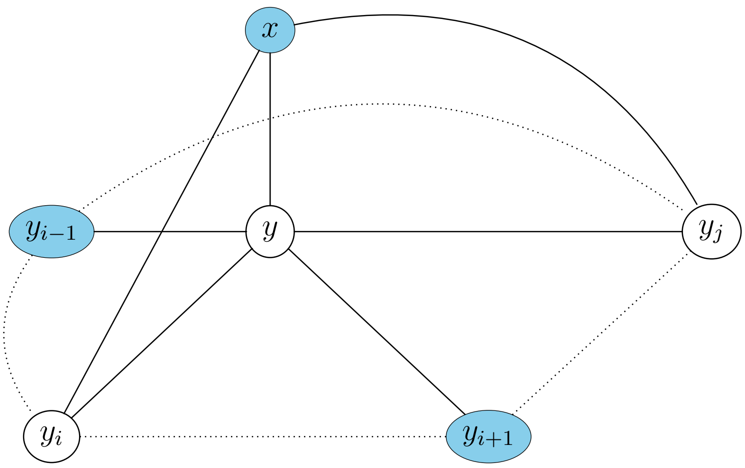


したがって, x に繋がっている (y 以外の) 頂点は, $y_?$ のいずれかである.

* x の次数が 4 以上ならば, G は K_5 の細分を含んでしまう:



* よって, x の次数は 3 以下だが, G は 3 連結よりちょうど 3 でなければならない.
* 背理法の仮定より, x に繋がっている (y 以外の) 2 つの頂点 $y_?$ の番号は 2 つ以上飛んでいる; 下の図において, y_j および y_i も番号が 2 つ以上飛んでいることに注意せよ. このとき, G は $K_{3,3}$ の細分を含んでしまう:



* したがって, x に繋がっている (y 以外の) 頂点がすべて集結する区間 $y_i \sim y_{i+1}$ が存在することがわかる.

– よって, G は平面的である.

Step 5 :　このように, (最初の) 背理法の仮定に矛盾する.

✔ 【タット】グラフ G が 3 連結であることと次の条件を満たすグラフの列 $K_4 =: G_0, G_1, \cdots, G_n := G$ が存在することは同値である:

(条件) 各 G_{i+1} は両端の次数がともに 3 以上となる辺 e をもち, $G_i = G_{i+1}/e$ となる.

⋆ 【ブルックスの定理】 奇サイクルでも完全グラフでもないグラフの彩色数は, 頂点の最大次数以下.

Step 1 :　Δ (= 頂点の最大次数) ≥ 3 として, 頂点数に関する帰納法を用いる. ($\Delta = 2$ のときは, 奇サイクルでないから 2 部グラフであり, ちょうど 2 色で塗れる. $\Delta = 1$ は K_2.)

Step 2 :　(背理法) $\chi(G) \leq \Delta + 1$ は明らかだから, $\chi(G) = \Delta + 1$ と仮定する.

Step 3 :　任意の頂点 x の隣接点は, Δ 色の彩色が必要である. 特に, $\deg x = \Delta$; つまり, G は Δ 正則.

- $H := G - x$ の頂点数は 1 つ落ちていて, 最大次数は Δ 以下である. H の連結成分 H' に対して,
  - もし H' が奇サイクルでも完全グラフでもないならば, 帰納法の仮定より, $\chi(H') \leq \Delta$;
  - H' が奇サイクルまたは完全グラフのとき, H' は $\Delta(H')$ 正則であり, H' のある頂点は x と隣接している (G は連結). よって, $\chi(H') = \Delta(H') + 1 \leq \Delta$;

  ゆえに, $\chi(H) \leq \Delta$ となる.
- G の彩色数は $\Delta + 1$ だから, ちょうど $\chi(H) = \Delta$ であり, x に繋がっている H の頂点たちは Δ 色で塗られていなければいけない.

Step 4 :　ここで, 頂点 x を一つ固定し, その接続点たちを $x_1, \cdots, x_\Delta$ とおく; 添え字は色, x は $\Delta + 1$ で塗る. このとき, 各 x_i も次数 Δ であり, その周囲も Δ 色必要; つまり, x_i の隣接点のうち, $\Delta + 1$ で塗られているのは x のみ.

Step 5 :　さて, x_i と x_j が (辺で) 繋がっていないと仮定しよう. そうすると, x_j の周囲に (x_i ではない) 色 i で塗られている頂点がただ一つ存在する: それを y_i とおく. このとき, x_j の周囲の色 i は y_i だけであり, さらに, y_i の周囲の色 j も x_j だけである. そのため, x_j を色 i, y_i を色 j で塗ることができてしまう. しかし, x の周辺が 1 色 (j) なくなり, 矛盾する.

Step 6 :　このように, x の周辺の頂点 x_i たちはお互いにすべて隣接している. G は Δ 正則のため, これら以外の頂点はないので, G は完全グラフである.

? 彩色数の種数による評価 $\chi(G) \leq \left[\dfrac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right]$ を用いて, ブルックスの定理の証明を簡単にできないか. (ただこのとき, 上の (ここからが厄介) を使ってしまいそう... それはヤダ)