2017年度相原学部ゼミコメント *

(2017年11月20日更新)

これは, 2017年度相原学部ゼミでの不足を補うためのノートである[*1].

目次

1 問題 4.15 の解答

次の問題は難しすぎるため, その解答をパスした. ここで解説を与える.

---

* 教科書は [赤尾]

[*1] ただし, ゼミの内容のすべてをフォローしているわけではない.

問題 1.1. [赤尾, 問題 4.15] $GL(n,\mathbb{C})/U(n)$ の完全代表系として, n 次正定値エルミート行列全体を取ることができることを示せ. また, $T_+(n,\mathbb{C}) \subseteq GL(n,\mathbb{C})$ を上三角行列で対角成分がすべて正の実数であるもの全体とすれば, $T_+(n,\mathbb{C})$ の元全体も $GL(n,\mathbb{C})/U(n)$ の完全代表系となることを示せ.

2 問題 4.22 の解答

次も, 線形数学を高度に使用するためパスした.

問題 2.1. [赤尾, 問題 4.22] $n \geq 3$ のとき, $D(SO(n)) = SO(n)$ を示せ.

3 射影特殊線形群の単純性

射影特殊線形群 $PSL(n,K)$ の単純性が p.147 で示されている. しかし, よくわからないのでここに記す.

この節の主定理は次である.

定理 3.1. $PSL(n,K)$ は $PSL(2,2)$ および $PSL(2,3)$ を除いて単純群である.

4 第 4 章練習問題 7 の解答

p.155, 4 行目において突然使っているので, その解答を書く.

問題 4.1. [赤尾, 第 4 章練習問題 7] G を位数 n の有限群とする. n の任意の約数 d に対し, G の元 g で $g^d = e$ を満たすものの個数が d 以下ならば, G が巡回群となることを示せ.

5 与えられた群と自由群

p.162, l.9–21 において, 与えられた群を自由群の剰余群で表すこと, および, その逆について言及している. しかし, 誤植があると思われるので, 以下で書き直す[*2].

[*2] しっかり読み解いてみると, 誤植があるわけではなく, (記号の使い方に説明がないために) 重大な勘違いが起きているようだ. (そこで出てくる集合 “ R ” や “ $\widetilde{R}$ ” を集合として書かなければ回避できそう.)

ここで最も重要なことは次である:

> ① 任意の群は, 自由群の剰余群で表せる. 特に, 生成元とその間の関係式によって与えられる.
>
> ② 適当な文字とその間の関係式を与えれば, いつでも群が作れる. 特にそれは, 自由群の剰余群として与えられる.

5.1 ① について

Λ を集合とし, G を生成系 $X := \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ で与えられる群とする: つまり, G の任意の元 g は, Λ のある元 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ に添え字付けられた X の元 $x_{\lambda_1}, \cdots, x_{\lambda_n}$ たちの積で書ける ($g = x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} \cdots x_{\lambda_n}$).

このとき, (ただの) 写像 $f : \Lambda \to G$ を $f(\lambda) = x_\lambda$ で定める. 定理 5.26 より, f は群の準同型 $\widetilde{f} : F(\Lambda) \to G$ に "拡張" できる. さらに, 上で注意したように, G の各元の表示を見れば, $\widetilde{f}$ は全射であることがわかる. 準同型定理を適用すれば, 群の同型

$$G \simeq F(\Lambda) / \operatorname{Ker} \widetilde{f}$$

を得る. ここで, 剰余群 $F(\Lambda)/\operatorname{Ker}\widetilde{f}$ は (感覚的には) 分母 $\operatorname{Ker}\widetilde{f}$ の元を $F(\Lambda)$ の中で 1 と見る, という群であることに注意する (この見方がこれから定義する "関係式" に繋がる).

次に, $\operatorname{Ker}\widetilde{f}$ に注目する. これは, $F(\Lambda)$ の部分群 (特に, 部分集合) であるから, 何かしらの (Λ 上の) 語の集合である. その中から以下を満たすように元を選択し, 部分集合 R を構成する:

> R を含む $F(\Lambda)$ の最小の正規部分群が $\operatorname{Ker}\widetilde{f}$ に一致する.

例えば, $R = \operatorname{Ker}\widetilde{f}$ と取れば題意を満たすから, 少なくても一つは R の取り方がある.

R の元 α は (Λ 上の) 語であるから, $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ ($\lambda_i \in \Lambda$) の形をしている. つまりこれは, Λ の元を変数とする単項式と見ることができる. その意味で, この α を $R_\alpha(\lambda)$ と書くことにする: $R = \{R_\alpha(\lambda) \mid \alpha \in R\}$[*3]. ここで注意すべきは, 単項式 $R_\alpha(\lambda)$ に現れる " λ "

[*3] この書き方では, 左辺 R を表すために, 右辺に R が出ているのでトートロジーが起こっており不自然で

は「Λ の元」を意味しているわけではなく, あくまでも「Λ の元 たちλ を変数とする」の意味で使われていることである.

このように, $\mathrm{Ker}\,\widetilde{f}$ の部分集合 R を取ると, R の各元 $R_\alpha(\lambda) = \lambda_1 \cdots \lambda_r$ に対応して G の元 $R_\alpha(x_\lambda) = x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_r}$ が取れる: ここでも, $R_\alpha(x_\lambda)$ に現れる " x_λ " は「G の生成元 x_λ」を意味しているわけではなく,「各 λ_i を対応する x_{λ_i} に置き換える (代入する)」という意味で使われている.

一方, 先の同型から, $R_\alpha(x_\lambda)$ たちは G の中で単位元になっているので, $R_\alpha(x_\lambda) = 1$ と書ける:

$$\widetilde{R} := \{R_\alpha(x_\lambda) = 1 \mid \alpha \in R\}^{*4}.$$

このとき, $\widetilde{R}$ の各元 $R_\alpha(x_\lambda) = 1$ を G の生成系 X の *(基本)* **関係式**という.

注意 1. [赤尾, 注意 5.4] R の元の選択は適当に行った (上の枠内を満たすように取れば何でもよかった) から, R (よって $\widetilde{R}$) の取り方は一意的に決まるわけではない. 実際に, [赤尾, 例題 5.4] を見よ.

注意 2. 自由群の階数は一意的に決まるが, 与えられた群に付随する自由群は様々な階数を持つことができる (生成元の個数は一意的に決まらない). 例えば, 位数 6 の巡回群は $G = \langle g \mid g^6 = 1 \rangle$ と書けるが, 一方で, $G = \langle g^2, g^3 \rangle$ と書くこともできる. つまり, $H = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = 1,\ ba = ab \rangle$ も位数 6 の巡回群である: $G \simeq H$.

5.2 ② について

5.1 節を考慮して, 記号に気をつけながら読めばよい.

6 無限集合上の自由群の濃度

[赤尾, 命題 5.27] の証明において, 無限集合上の自由群の濃度について言及している箇所があるが, まったく自明ではないのでここで示す.

命題 6.1. 無限集合 S 上の自由群 $F(S)$ について, $|F(S)| = |S|$ (濃度) が成り立つ.

この命題を示すために, 準備 (基礎数学の復習) をする. (証明はしない.)

ある. そこで教科書の筆者は新たな集合 A を出したのかもしれない.

*4 ここでもトートロジーが起きている.

以下, この節において, S, T を集合とする.

S の "大きさ" を考える場合, 自然に思いつくことは, S に属す元の個数を数えることである. しかし, それでは無限集合の "大きさ" を測ることはできない. そこで, 2 つの集合を "比べる" ことで集合の "大きさ" を測ることにする.

S と T の間に全単射 $S \to T$ があるとき, S と T の**濃度は等しい**といい, $|S| = |T|$ と表す. S が n 個の元からなる有限集合の場合, $|S| = |\{1, \cdots, n\}|$ となるので, 単に $|S| = n$ と書くことにする.

一方, S が無限集合の場合, $|S|$ には様々なタイプがある. 例えば,

① S は無限集合だが, 「1 個, 2 個, $\cdots$」と数え続けることができる場合: このときは $|S| = |\mathbb{N}|$ となる. そこで, $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ (アレフ ゼロ) と書き, S は**加算無限**の濃度を持つ (**可算無限集合**) という. 特に, $S = \{x_1, x_2, \cdots\}$ のように, 自然数を添え字に持つ表示が可能になる. 例えば, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ や奇数の集合, 偶数の集合は可算無限の濃度を持つ.

② 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は可算ではない. そこで新たに, $|\mathbb{R}| = \aleph$ と書くことにする. (**連続の濃度**という.)

以上より, 2 つの集合としての "等しさ" を理解することはできた. しかしまだ, "比べる" ことはできていない. そこで, 大小関係を定義することで, 2 つの集合を "比べる" 概念を導入しよう.

S から T へ単射 $S \to T$ が存在するとき, $|S| \leq |T|$ と書く. また, $|S| \neq |T|$ であるとき, $|S| < |T|$ と表す. 例えば, 上で述べたように $\mathbb{R}$ は可算ではなく, $\aleph_0 < \aleph$ となる[*5].

このように, 2 つの集合の "大きさ" は単射によって比べることにしたが, 一方で, 全射もある意味で大小を決めている感じがする. 実際に次が成り立つ.

命題 6.2. S から T への全射 $S \to T$ が存在するならば, $|S| \geq |T|$ が成り立つ.

この命題の証明には選択公理を用いる.

さらに, 2 つの集合を比べた結果, その等しさも判定したい.

定理 6.3 (ベルンシュタイン, Bernstein)**.** $|S| \leq |T|$ かつ $|S| \geq |T|$ ならば, $|S| = |T|$ が成り立つ.

これによって, 全単射 $S \to T$ を作らなくても, 単射 $S \to T$, $T \to S$ のコンビネーショ

[*5] 濃度が $\aleph_0 < \aleph$ の間に入るような集合 S は存在しないと考えられている: $\aleph_0 < |S| < \aleph$ とは絶対にならない. この仮説を**連続体仮説**という.

ンで $|S| = |T|$ がわかる.

次に, 集合の演算 (和や直積) によって, 濃度がどのくらい増えるかを見てみよう. (有限集合の場合はただの数え上げだから, 無限集合の場合を扱う.)

次が成り立つ: 興味深い命題なので, 付録にその証明を記す.

命題 6.4. S を無限集合, n を正の整数とする. このとき,

(1) S と濃度が等しい n 個の集合の直積の濃度
(2) S と濃度が等しい無限集合と有限集合の直積の濃度
(3) S と濃度が等しい可算無限個の集合の非交和 (互いに交わらない和) の濃度

はすべて, S の濃度と等しい.

参考 3. 上の命題から, $|\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}|^n = |\mathbb{R}|$ が従う. つまり, 1 次元も 2 次元も 3 次元もすべて "集合として" 同じになる. よって, 3 次元空間に生きている我々も, 2 次元空間に埋め込めることになる...[*6]

これで命題 6.1 を証明する準備が整った.

命題 6.1 の証明. 各 0 以上の整数 n に対して, 長さ n を持つ S 上の語の集合を $F(S)_n$ で表す. 明らかに, $F(S) = F(S)_0 \sqcup F(S)_1 \sqcup F(S)_2 \sqcup \cdots$ が成り立つ (簡約語の表示の一意性を用いる). ここで, $\sqcup$ は非交和 (互いに共通部分が空の和集合) を意味する. また, $F(S)_n$ から, n 個の S と n 個の符号の集合 $\{\pm\}$ の直積への単射を次のように構成できる:

$$F(S)_n \longrightarrow S^n \times \{\pm\}^n$$

$$x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \longmapsto (x_1, \cdots, x_n, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n).$$

(全射ではないことに注意する.) 命題 6.4 より, $S^n \times \{\pm\}^n$ の濃度は $|S^n|$, さらに $|S|$ と等しい. したがって, 濃度について $|F(S)_n| \leq |S|$ が成り立つ. $F(S)$ は $F(S)_n$ たちの非交和であり, それぞれの濃度は $|S|$ 以下. それらを足しても (可算無限個の和だから) 命題 6.4 より, $|S|$ 以下であることがわかる. ゆえに, $|F(S)| \leq |S|$ を得る. 逆の不等式が成り立つことは明らかだから, ベルンシュタインの定理より, $|F(S)| = |S|$ が得られる. $\square$

注意 4. S のベキ集合 $\mathcal{P}(S)$ から $F(S)$ への "対応" $P \mapsto \prod_{x \in P} x$ を考える (つまり, S の

[*6] あくまでも 集合として の話である. 集合として $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への広がりを捉えることはできない. (空間としては広がっていく.)

部分集合 P の元をすべてかけると, 語が作れる). これは一見, 単射に見えるが, そもそも well-defined にならない.

① P には順序が入っていないため, $P = \{x_1, x_2, \cdots\}$ に対して, 2 つの語 $x_1x_2\cdots$ および $x_2x_1\cdots$ ができるが, これらは語としては異なる.
② P がそもそも有限集合とは限らない. (語の長さは有限)

付録 A　直積の濃度と選択公理

A.1　選択公理

選択公理は, 基礎数学の中でも, 最も理解が難しい公理のうちの一つである. しかし, 現代数学は選択公理の上に成り立っていると言っても過言ではないほど, この公理に依存している. 一方で, 数学をやる上で選択公理を意識することはほとんどないだろう.

ここでは, 選択公理について理解を深めていき, どのように使われているかを見ていく.

選択公理は, 「無限」を扱う際に非常に重要になる. 例えば, 無限集合から元を取り続けるとき, (有限の人生を歩んでいる) 我々は一生元を取り切ることはできない. 同じように, 無限個の集合から一つずつ元を取っていっても, すべての集合から元を取ることはできない.

それらを "ズバッ" と解決する夢のようなアイデアが選択公理である.

公理 (選択公理)**.** 空集合でない集合の族 $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して, 直積集合 $\prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ は空集合ではない.

直積集合 $\prod S_\lambda$ が云わば「それぞれから元を一つずつ取る」ことを表した集合であり, 一瞬で $\prod S_\lambda$ の元 (x_λ) を取ることができることを意味している. つまり, 「無限個の集合から一つずつ元を取って」一瞬で並べることができる.

次は, 選択公理を仮定した集合論における基本的な命題である. 特に, (3) は上で述べた「無限集合から一つずつ元を取り続けても終わらない」ことの一つの答えである. また, (2) は集合の濃度を測る際の直感が正しいことを裏付けている.

命題 A.1. (ZF 公理系および選択公理を仮定する.) 次が成り立つ.

(1) 写像 $f : S \to T$ が全射であることと, fg が恒等写像となるような写像 $g : T \to S$ が存在することは同値である.

(2) 全射 $S \to T$ が存在するならば, $|S| \geq |T|$ が成り立つ. (命題 6.2)

(3) 任意の無限集合は, 可算無限集合を部分集合として持つ.

例えば, 上の (3) を用いると, 次のような事実も証明できる.

事実 A.2. S を無限集合とする. このとき, 1 点 $*$ を S に加えても濃度は変わらない:

$$|S \sqcup \{*\}| = |S|.$$

証明. S は可算無限集合 I を持つ. よって,

$$|S \sqcup \{*\}| = \overbrace{|S \backslash I| + \underbrace{|I| + |\{*\}|}_{|I|}}^{|S|} = |S \backslash I| + |I| = |S|$$

を得る. □

上の証明と同様のテクニックを以後で用いる.

集合 $\mathcal{X}$ が**半順序構造**を持つ (**半順序集合**) とは, その元たちの間に次を満たす関係 $\leq$ が存在するときにいう:

(i) 任意の $\mathfrak{p}$ に対して, $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{p}$;

(ii) $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{q}$ かつ $\mathfrak{p} \geq \mathfrak{q}$ ならば, $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$;

(iii) $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{q}$ かつ $\mathfrak{q} \leq \mathfrak{r}$ ならば, $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{r}$.

またこのとき, 関係 $\leq$ を**半順序**という. さらに, 任意の $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathcal{X}$ に対して, $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{q}$ または $\mathfrak{p} \geq \mathfrak{q}$ が成り立つとき, $\mathcal{X}$ を**全順序集合**という (関係 $\leq$ は**全順序**).

$\mathcal{X}$ を半順序集合とする. $\mathcal{X}$ の任意の全順序部分集合 $\mathcal{Y}$ が上に有界, すなわち, 任意の $\mathcal{Y}$ の元がある $\mathcal{X}$ の元以下となるとき, $\mathcal{X}$ を特に**帰納的順序集合**という.

$\mathcal{X}$ の元 $\mathfrak{p}$ が**極大**であるとは, $\mathfrak{p} < \mathfrak{q}$ となる $\mathcal{X}$ の元 $\mathfrak{q}$ が存在しないときにいう.

考えている (ZF) 公理系が選択公理を満たすことは, その公理系において次の有名な補題が成り立つことと同値である.

補題 A.3 (ツォルン (Zorn) の補題)**.** $\mathcal{X}$ を帰納的順序集合とし, $\mathfrak{p} \in \mathcal{X}$ とする. このとき, $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{q}$ となる極大元 $\mathfrak{q} \in \mathcal{X}$ が存在する. (任意の元は極大元たちによって "被覆" される.)

工事中

A.2　命題 6.4 の証明

この節の目標は, 6 節で用いた次の命題 (命題 6.4) を示すことである. (選択公理を満たすことは仮定する. 選択公理を用いた箇所にⓒ [Axiom of Choice] を記す.)

命題 A.4. S を無限集合, n を正の整数とする. このとき,

(1) S と濃度が等しい n 個の集合の直積の濃度
(2) S と濃度が等しい無限集合と有限集合の直積の濃度
(3) S と濃度が等しい可算無限個の集合の非交和 (互いに交わらない和) の濃度

はすべて, S の濃度と等しい.

この命題を示すための準備をする.
以下, 無限集合 S を固定する.
次のような S の部分集合とある写像の組の集合を考える:

(a) 有限または可算無限の集合 I に対して,

$$\mathcal{X}_a := \{(T, f) \mid T \subseteq S,\ f : T \to T \times I \text{ 全射 }\}.$$

(b)

$$\mathcal{X}_b := \{(T, f) \mid T \subseteq S,\ f : T \to T \times T \text{ 全射 }\}.$$

S は可算無限部分集合を持つⓒから, $\mathcal{X}_a, \mathcal{X}_b$ どちらとも空集合ではない. また, (a) における $(T, f) \in \mathcal{X}_a$ は $|T| = |T| \times |I|$, (b) における $(T, f) \in \mathcal{X}_b$ は $|T| = |T| \times |T|$ が成り立つことに注意する (♠).

さらに, $\mathcal{X} = \mathcal{X}_a, \mathcal{X}_b$ に半順序構造を定める:

$$(T, f) \leq (U, g) \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} T \subseteq U \\ f = g|_T \end{cases}$$

(これが実際に半順序になることは簡単にわかる.)
次が成り立つ.

補題 A.5. $\mathcal{X}_a$ および $\mathcal{X}_b$ は (この半順序によって) 帰納的順序集合になる.

証明. $\mathcal{X} = \mathcal{X}_a, \mathcal{X}_b$ とする. $\mathcal{X}$ の任意の全順序部分集合が上に有界であることを示す. $\mathcal{Y}$ を $\mathcal{X}$ の全順序部分集合とする. このとき, 次のように U および g を定義する:

(a) $U := \bigcup_{(T,f)\in\mathcal{Y}} T,\ g : U \to U \times I\ (u \mapsto f(u))$
(b) $U := \bigcup_{(T,f)\in\mathcal{Y}} T,\ g : U \to U \times U\ (u \mapsto f(u))$

(ただし, u はある組 (T, f) に対して, $u \in T$ とする.)

U が $\mathcal{X}$ に属すことを示す. そのために, g が全射であることを示せばよい. (a) は簡単なので, (b) の場合を示す. $(u_1, u_2) \in U \times U$ とする. このとき, $u_i \in T_i$ となるある組 $(T_i, f_i) \in \mathcal{Y}$ を取ることができる. $\mathcal{Y}$ は全順序集合だから, $(T_1, f_1) \leq (T_2, f_2)$ としてよい. $f_2 : T_2 \to T_2 \times T_2$ は全射であり, $u_1, u_2 \in T_2$ だから, $f_2(u) = (u_1, u_2)$ となるような $u \in T_2 \subseteq U$ が存在する. したがって, g が全射であること, 結果的に $(U, g) \in \mathcal{X}$ が言えた.

さらに, (U, g) が $\mathcal{Y}$ の上限を与えていることは明らかだから, $\mathcal{X}$ が帰納的順序集合であることがわかる. □

これで命題 A.4 を証明する準備が整った.

命題 A.4 の証明. (2) n を正の整数とし, $I := \{1, \cdots, n\}$ とおく. この I に対して, 補題 A.5 (a) を適用すると,

$$\mathcal{X} := \mathcal{X}_a := \{(T, f) \mid T \subseteq S,\ f : T \to T \times I \text{ 全射 }\}$$

は帰納的順序集合である. ツォルンの補題ⓒより, $\mathcal{X}$ の適当な元の極大元を取り, $(U, g) \in \mathcal{X}$ とする.

$|U| = |S|$ を示す. $U = S$ ならば良いので, $U \neq S$ とする. もし $S \backslash U$ が無限集合ならば, $S \backslash U$ は可算無限集合 J を持つ. $J \times I$ も可算無限だから, 全単射 $\sigma : J \to J \times I$ が取れる. このとき, 写像 $\rho : U \sqcup J \to (U \sqcup J) \times I$ を

$$x \mapsto \begin{cases} g(x) & x \in U \\ \sigma(x) & x \in J \end{cases}$$

で定義すると, これは全射であり, $(U \sqcup J, \rho) \in \mathcal{X}$ となるが, (U, g) の極大性に反する. したがって, $S \backslash U$ は有限集合であることがわかる. U は無限集合だから, 可算無限集合 K を持つが, このとき,

$$|S| = |U| + |S \backslash U| = \overbrace{|U \backslash K| + \underbrace{|K|\ + |S \backslash U|}_{|K|}}^{|U|} = |U \backslash K| + |K| = |U|$$

を得る. 特に, (♠) に注意すれば, $|S| = |S| \times |I|$ であることがわかる.

(1) $n = 2$ のときを示せばよい．補題 A.5 (b) を適用して，

$$\mathcal{X} := \mathcal{X}_b := \{(T, f) \mid T \subseteq S,\ f : T \to T \times T \text{ 全射 }\}$$

は帰納的順序集合である．うまくペアを取ることで，$(S, g) \in \mathcal{X}$ とできることを示そう: (♠) より，$|S| = |S|^2$ を得る．

ツォルンの補題Ⓒより，$\mathcal{X}$ の適当な元に対する極大元を取り，それを (U, g) とする．$|U| = |S|$ であることを背理法によって示す．$|U| \neq |S|$ と仮定し，$T := S \backslash U$ とおく．このとき，もし $|T| \leq |U|$ ならば，

$$|S| = |U| + |T| \leq |U| + |U| \overset{(2)}{=\!=} |U|$$

となり，矛盾する．よって，$|S| = |T|$ となる．したがって，単射 $U \to T$ を持つから，その像を V $(\subseteq T)$ とおく．V の濃度は U と等しく，$U \cap V = \emptyset$ であり，

$$(U \sqcup V) \times (U \sqcup V) = (U \times U) \sqcup \underbrace{(U \times V) \sqcup (V \times U) \sqcup (U \times U)}_{(*)} \qquad (\heartsuit)$$

が成り立つ．$(*)$ に注目すると，$U \in \mathcal{X}$ より，

$$|(*)| = |U||V| + |V||U| + |U||U| \overset{(\spadesuit)}{=\!=} |U| + |U| + |U| \overset{(2)}{=\!=} |U| = |V|$$

であることがわかる．したがって，全単射 $h : V \to (*)$ が取れる．

そこで，($\heartsuit$)を考慮して，次のように写像 $\varphi : U \sqcup V \to (U \sqcup V) \times (U \sqcup V)$ を定義する:

$$x \mapsto \begin{cases} g(x) & (x \in U) \\ h(x) & (x \in V) \end{cases}$$

このとき，φ は全射である．実際，$(x, y) \in (U \sqcup V) \times (U \sqcup V)$ とすると，($\heartsuit$)のように 4 つのパターンに分けられる:

① $(x, y) \in U \times U$ のとき: g は全射より，$u \in U$ が取れて $\varphi(u) = g(x) = (x, y)$ とできる．
② $(x, y) \in (*)$ のとき: h は全射より，$v \in V$ が取れて，$\varphi(v) = h(v) = (x, y)$ とできる．

よって，$(U \sqcup V, \varphi)$ は $\mathcal{X}$ に属すが，それは (U, g) の極大性に反する．したがって，$|U| = |S|$，特に，$|S^2| = |S|$ を得る．

(3) 可算無限集合 I に対して，$|I \times S| = |S|$ を示せばよい．任意の無限集合は，ある可算無限集合を部分集合に持つⒸから，$I \subseteq S$ としてよい．このとき，自然に単射 $I \times S \to S \times S$ を構成できるから，$|I \times S| \leq |S \times S|$ が成り立つ．(1) より，右辺は $|S|$ と

等しいから, $|I \times S| \leq |S|$ を得る. さらに, ベルンシュタインの定理を使えば, これらは等しいことがわかる. $\square$

注意 5. 上の証明の (2)(1) において, $\mathcal{X}$ のどの元に対しても, それを含む極大元として, (うまく g を取って) (S, g) を選ぶことができる.

A.3 選択公理と直積の濃度

上で見たように, 選択公理を認めた上で, 無限集合 S に対して $|S^2| = |S|$ が成り立つ. 実はこの主張の逆が成り立つ.

命題 A.6. (ZF 公理系を仮定する.) 任意の無限集合 S が $|S^2| = |S|$ を満たせば, 選択公理が成り立つ.

工事中

参考文献

[赤尾] 赤尾和男, 線形代数と群. 共立出版.