可換環論 例 **2020.3.24 (火)**

$\boxed{\text{問}}$ 可換環の有限生成イデアル 2 つの共通部分はまた, 有限生成か.

(答え) 一般に, 有限生成になるとは限らない.

$\boxed{\text{反例}}$ 次のように可換環 R を定義する (可換環であることは簡単にわかる):

$$R := \left\{ f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Q}[x] \;\middle|\; a_0 \in \mathbb{Z}, a_1 = 0 \right\}.$$

この可換環 R のイデアルとして, $I = (x^2)$ および $J = (x^3)$ を考える.

✗ R の中で考えているため, $J \subseteq I$ とはならないことに注意. 実際に, J の元は $x^3 f(x)$ ($f(x) \in R$) とかけるが, 展開し x^2 でくくってみると,

$$x^3 f(x) = \cdots + a_2 x^5 + a_0 x^3 = x^2 \underbrace{(\cdots + a_2 x^3 + a_0 x)}_{R\text{ の元でない}}.$$

このとき,

$$I \cap J = \left\{ f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Q}[x] \;\middle|\; a_4 \sim a_0 = 0 \right\} \tag{✰}$$

($\supseteq$) は簡単. ($\subseteq$) について. $I \cap J$ の元は 2 通りの方法でかける: $x^2 f(x) = x^3 g(x)$ ($f(x), g(x) \in R$). あとは上のように係数を比較すればよい.

ここで, $I \cap J$ が有限生成でないことを示そう. (以下, 多項式 $f(x)$ は f と略記する.)

(背理法) $I \cap J = (f_1, \cdots, f_r)$ ($f_i \in R$) と仮定する. $f_i \in I \cap J$ だから, (✰) より $f_i = x^5 g_i$ ($g_i \in \mathbb{Q}[x]$) とかける. g_i の定数項 $g_i(0)$ を既約分数 $\dfrac{a_i}{b_i}$ ($a_i, b_i \in \mathbb{Z}$) で表す. ここで,

$$b := b_1 b_2 \cdots b_r,\ g := \frac{1}{b+1} x^5$$

とおく. このとき, g は $I \cap J$ に属す (✰) から, $f_1, \cdots, f_r$ でかける: $g = f_1 h_1 + \cdots + f_r h_r$ ($h_i \in R$). これを計算すると,

$$\begin{aligned}
g &= f_1 h_1 + \cdots + f_r h_r & &(= \textstyle\sum f_i h_i) \\
&= x^5 \cdot \textstyle\sum g_i h_i & &(f_i = x^5 g_i) \\
\frac{1}{b+1} &= \textstyle\sum g_i h_i & &(x^5 \text{ でわる}) \\
\frac{1}{b+1} &= \textstyle\sum \dfrac{a_i}{b_i} \cdot c_i & &(x = 0 \text{ を代入}) \\
& & &(c_i := h_i(0) \in \mathbb{Z}) \\
\frac{b}{b+1} &= \textstyle\sum a_i \widehat{b_i} c_i & &(b \text{ をかける}) \\
& & &\left(\widehat{b_i} := \frac{b}{b_i} \right)
\end{aligned}$$

右辺は整数より $\dfrac{b}{b+1}$ は整数となるが, これは矛盾である. したがって, $I \cap J$ は有限生成でない.

(参考)

`https://math.stackexchange.com/questions/295875/intersection-of-finitely-generated-ideals`

集合論 可換環論の勘どころ 補題 1.69 について 2020.5.11 (月)

1 [後藤, 補題 1.69] 空でない 2 つの集合 X, Y に対して, X と濃度が等しく Y と交差しない集合 Z を構成せよ.

$T := \{(x, S) \in Y \cap (X \times \mathcal{P}(Y)) \mid (x, S) \notin S\}$ とおき, $Z := X \times \{T\}$ とすればよい.
ただし, $\mathcal{P}(Y)$ は Y のベキ集合, つまり, Y の部分集合全体を表す.

【証明】Z は X に 1 点 T を付け加えただけだから, X と Z の濃度は等しい. そこで, Y と Z が交差しないこと ($Y \cap Z = \emptyset$) を示す.
(背理法) $Y \cap Z \neq \emptyset$ と仮定する. つまり, ある $x \in X$ で $\underbrace{(x, T)}_{Z \text{ の元}} \in Y$ となる. T は Y の部分集合より, $(x, T) \in X \times \mathcal{P}(Y)$, ゆえに, $(x, T) \in Y \cap (X \times \mathcal{P}(Y))$. しかし, $(x, T) \in T$ であることと $(x, T) \notin T$ であることは同値である (ラッセル型パラドックス). これは矛盾であり, $Y \cap Z = \emptyset$ を得る. □

2 与えられた集合 X と濃度が等しく, 非交差な集合 Z を構成せよ.

3 $\boxed{2}$ の構成を認めると, $\boxed{1}$ の構成も可能であることを示せ.

(参考)

https://math.stackexchange.com/questions/299285/proof-of-exchange-principle-in-set-theory

参考文献

[後藤] 後藤四郎, 数学の勘どころ 32: 可換環論の勘どころ. 共立出版 (2017).

問 可換環 R に対して, 次が同値であることを示せ.

(1) R は被約である. $\left(\overset{\text{def}}{\iff} \sqrt{(0)} = (0):\ \bigcirc\text{乗して } 0 \text{ になるのは } 0 \text{ のみ}\right)$

(2) R の任意の積閉集合 S に対して, $S^{-1}R$ は被約である.

(3) R の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して, $R_{\mathfrak{p}}$ は被約である.

(4) R の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して, $R_{\mathfrak{m}}$ は被約である.

【証明】(1)⇒(2): $\frac{a}{s} \in \sqrt{(0)}$ in $S^{-1}R$ とする. $\sqrt{(0)}$ の定義より, $\frac{a^n}{s^n} = \frac{0}{1}$ となる正整数 $n > 0$ が取れる. このとき, ある $t \in S$ で $ta^n = 0$ となる. 特に, $(ta)^n = t^n a^n = 0$ であるから, $ta \in \sqrt{(0)}$ in R. 仮定より, $ta = 0$ を得る. これは, $\frac{a}{s} = \frac{0}{1}$ in $S^{-1}R$ を意味しており, $\sqrt{(0)} = (0)$ in $S^{-1}R$ が示された.
(2)⇒(3): $R_{\mathfrak{p}} := (R \setminus \mathfrak{p})^{-1}R$ より, 明らか.
(3)⇒(4): 極大イデアルは素イデアルであるから, 明らか.
(4)⇒(1): $a \in \sqrt{(0)}$ in R とする; つまり, ある $n > 0$ で $a^n = 0$. また, R の部分集合 I を次で定義する:

$$I := (0) : (a) = \{r \in R \mid ra = 0\}.$$

最終的に, $a = 0$, つまり, $I = R$ を示したい.
(背理法) $I \neq R$ と仮定する. このとき, I を含む極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在する. $a^n = 0$ より, $\frac{a^n}{1} = \frac{0}{1}$ であり, $\frac{a}{1} \in \sqrt{(0)} \overset{\text{仮定}}{=\!=} (0)$ in $R_{\mathfrak{m}}$, つまり, $\frac{a}{1} = \frac{0}{1}$ を得る. よって, $ta = 0$ となる $t \in R \setminus \mathfrak{m}$ が存在する. 一方, $ta = 0$ より, $t \in I \subseteq \mathfrak{m}$ となるが, これは矛盾である. したがって, $I = R$, つまり, $a = 0$ となり, $\sqrt{(0)} = (0)$ in R であることがわかる. □

(参考) 上の証明における I を, イデアル (a) の**零化イデアル**という.

参考文献

[後藤] 後藤四郎, 数学の勘どころ 32: 可換環論の勘どころ. 共立出版 (2017).

可換環論 局所環への帰着 2020.7.21 (火)

R は可換環. 📍【現在地】 [後藤, 補題 3.37] と $\operatorname{Spec} R$ の有限性

問 R の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して, $R_{\mathfrak{m}}$ が $\boxed{①}$ ならば, R も $\boxed{①}$.

例 「アルチン環 $\iff$ 素イデアルが極大イデアルとなるネーター環」を満たす

【証明】どちらにしても $\operatorname{Spec} R = \operatorname{Max} R$ であり, これらは有限集合である. また, R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して, R が $\left\{\begin{array}{c}\text{アルチン環}\\ \text{素イデアルが極大イデアルとなるネーター環}\end{array}\right\}$ ならば, $R_{\mathfrak{m}}$ もそうである. 仮定より, $R_{\mathfrak{m}}$ は $\left\{\begin{array}{c}\text{素イデアルが極大イデアルとなるネーター環}\\ \text{アルチン環}\end{array}\right\}$ となる. ここで, R のイデアルの $\left\{\begin{array}{c}\text{昇鎖}\\ \text{降鎖}\end{array}\right\}$

$$\left\{\begin{array}{c} I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_i \subseteq \cdots \\ \\ I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_i \supseteq \cdots \end{array}\right\}$$

を取ると, $R_{\mathfrak{m}}$ は $\left\{\begin{array}{c}\text{ネーター環}\\ \text{アルチン環}\end{array}\right\}$ なので, ある k が存在して ${I_i}^e = {I_k}^e$ $(i \geq k)$ を満たす. (このとき, e や k は $\mathfrak{m}$ に依存していることに注意.) $\operatorname{Max} R$ は有限集合より, 十分大きく k を取れば, 任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して, ${I_i}^e = {I_k}^e$ $(i \geq k)$ とできる. (つまり, k は $\mathfrak{m}$ に依存しないように取り替えられる.) このとき, (R において) $I_i = I_k$ $(i \geq k)$ となることを示そう. (背理法) $\left\{\begin{array}{c} I_k \subsetneq I_i \\ I_k \supsetneq I_i \end{array}\right\}$ と仮定する. つまり, $\left\{\begin{array}{c} a \in I_i \setminus I_k \\ a \in I_k \setminus I_i \end{array}\right\}$ となる元を取ることができる. R のイデアル $\mathfrak{a}$ を, $\mathfrak{a} := \left\{\begin{array}{c} I_k : a \\ I_i : a \end{array}\right\}$ で定義する. a は $\left\{\begin{array}{c} I_k \\ I_i \end{array}\right\}$ に属していないから $R \neq \mathfrak{a}$ である. よって, $\mathfrak{a}$ を含む R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在する. そこで, R の $\mathfrak{m}$ による局所化を考える. a は $\left\{\begin{array}{c} I_i \\ I_k \end{array}\right\}$ の元より, $\dfrac{a}{1}$ は $\left\{\begin{array}{c} {I_i}^e = {I_k}^e \\ {I_k}^e = {I_i}^e \end{array}\right\}$ に入る. したがって, $\dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{s}$ とかける. ここで, $b \in \left\{\begin{array}{c} I_k \\ I_i \end{array}\right\}$, $s \in R \setminus \mathfrak{m}$ である. すなわち, $sta = tb$ となるように, ある $t \in R \setminus \mathfrak{m}$ を取ることができる. 右辺が $\left\{\begin{array}{c} I_k \\ I_i \end{array}\right\}$ に属すから, st は $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$ の元であるが, s および t の取り方に矛盾する. ゆえに, $I_i = I_k$ が成り立つ. □

定理 [後藤, 定理 3.38] 可換局所環がアルチン環であることと, 素イデアルが極大イデアルとなるネーター環であることは同値である. よって, 任意の可換環に対してもこれらは同値である.

例 $\dim \leq d$ である

参考文献

[後藤] 後藤四郎, 数学の勘どころ 32: 可換環論の勘どころ. 共立出版 (2017).

可換環論 Spec の有限性について 2020.7.21 (火)

📍【現在地】 [後藤, 補題 3.37] 終了

可換環 R の素イデアル (極大イデアル) 全体の集合を, $\operatorname{Spec} R$ ($\operatorname{Max} R$) で表す.

$\boxed{\text{問}}$ いつ $\operatorname{Spec} R$ ($\operatorname{Max} R$) は有限集合か?

例 R がアルチン [後藤, 補題 3.37]

例 R がネーター, かつ, $\operatorname{Spec} R = \operatorname{Max} R$

【証明】任意の素イデアルは零イデアル (0) を含み, 仮定よりそれらは極小な素イデアルである. よって, $\operatorname{Spec} R = \operatorname{Max} R = \operatorname{Ass} R$ が成り立ち, これらは有限集合である. □

さらにこのとき, R はアルチン環である [後藤, 定理 3.38].

例 R が 1 次元局所整域.

【証明】R は整域より (0) は素イデアルである. ただ一つの極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とすると, 任意の素イデアルは (0) と $\mathfrak{m}$ の間に位置するはずだが, $\dim R = 1$ より, それは自明なものしかない. よって, R の素イデアルは (0) と $\mathfrak{m}$ のみ. □

次の 2 つの事実が知られている. (詳細はまたいつか.)

定理 有限個の素イデアルをもつ可換ネーター環の次元は, 高々 1 である.

定理 体でない可換ネーター整域が有限個の素イデアルをもつことと, それが 0 でないジャコブソン根基をもつ 1 次元整域であることは同値である.

(cf. ゴールドマン整域)

参考文献

[後藤] 後藤四郎, 数学の勘どころ 32: 可換環論の勘どころ. 共立出版 (2017).

可換環論 Spec の有限性について 2 2020.7.22 (水)

【現在地】 [後藤, 定理 3.48] 終了

やはり気になったので, Spec の有限性についてまとめる. ここでは, 次を示すことを目標とする.

定理 1 有限個の素イデアルをもつ可換ネーター環の次元は, 高々 1 である.

定理 2 体でない可換ネーター整域が有限個の素イデアルをもつことと, それが 0 でないジャコブソン根基をもつ 1 次元整域であることは同値である.

以下, R を可換ネーター環とする. R の素イデアル全体の集合 $\operatorname{Spec} R$ を包含関係による半順序集合とみたとき, 素イデアル $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ ($\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$) の区間を $[\mathfrak{q}, \mathfrak{p}]$ で表す.
まずは上の定理を示すための準備をしよう. 次が最も重要な事実である.

補題 3 R の素イデアル $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ ($\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$) に対して, 区間 $[\mathfrak{q}, \mathfrak{p}]$ は 2 点集合か無限集合のどちらかである.

【証明】素イデアル $\mathfrak{q}$ でわること ($R \rightsquigarrow R/\mathfrak{q},\ \mathfrak{p} \rightsquigarrow \mathfrak{p}/\mathfrak{q},\ \mathfrak{q} \rightsquigarrow (0)$) により, R を整域とし, 区間 $[(0), \mathfrak{p}]$ を考える. ここで, $[(0), \mathfrak{p}]$ は有限集合 $\{(0), \mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n,\ \mathfrak{p}\}$ (互いに異なる) と仮定しよう. このとき, $\mathfrak{p}$ は $\bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ には含まれない. なぜなら, もし含まれたとすると, 素回避の定理 (日本語...) により, ある i で $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_i$, よって $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ となるが, これは $\mathfrak{p}_i$ の取り方に反す. したがって, $x \in \mathfrak{p} \setminus \bigcup_i \mathfrak{p}_i$ となる元が取れ, $\mathfrak{p}$ は単項イデアル (x) の極小素因子である. クルルの標高 (高度) 定理より, $\mathfrak{p}$ の高さは高々 1 となるが, これは $\mathfrak{p}_i$ たちを取れていることに矛盾する. よって, $[(0), \mathfrak{p}]$ は $\{(0) < \mathfrak{p}\}$ もしくは無限集合である. □

定理 1 は補題 3 からすぐにわかる. そこで, 定理 2 の証明を与えよう.

【定理 2 の証明】R を体でない整域とする. 定理 1 より, どちらにしても R の次元は 1 であり, $\operatorname{Spec} R = \operatorname{Max} R \cup \{(0)\}$ が成り立つ. $\operatorname{rad} R$ で R のジャコブソン根基を表す.
R が有限個の素イデアルをもつとき, 準素分解の一意性 (と R は体でないこと) から $\operatorname{rad} R \neq 0$ が従う.
R のジャコブソン根基が 0 でないと仮定する: $x\ (\neq 0) \in \operatorname{rad} R$. もし単項イデアル (x) が素イデアル (よって極大イデアル) ならば, (x) がただ一つの極大イデアルとなる. そこで, (x) は素イデアルでないとしてよい. このとき, 零でない任意の素イデアル (よって極大イデアル) は (x) を含み, それらは極小な素イデアルである; (x) の極小素因子. したがって, $\operatorname{Max} R = \operatorname{Min}_R R/(x)\ (= \operatorname{Ass}_R R/(x))$ が成り立ち, これらは有限集合である. □

(参考) すべての非零素イデアルの共通部分が零でない整域を, ゴールドマン整域という.

参考文献

[後藤] 後藤四郎, 数学の勘どころ 32: 可換環論の勘どころ. 共立出版 (2017).

可換環論 補題 3.46 のネーター性に関する注意 2020.8.31 (月)

[後藤, 補題 3.46] におけるネーター性をめぐる議論をまとめる.

1 R を (ネーターとは限らない) 可換環, $\mathfrak{m}$ をその極大イデアル, Q を $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする. このとき, 剰余環 R/Q は 0 次元局所環である.

【証明】剰余環 R/Q のイデアルは, R の Q を含むイデアルと完全に対応する. そこで, $Q \subseteq I \subsetneq R$ となるイデアル I は, $\mathfrak{m}$ に含まれ, さらにそれが素イデアルならば $\mathfrak{m}$ と一致することを示せばよい. また, I はある極大イデアルに含まれ, その極大イデアルについて次の議論を適用すればよいので, 最初から I を素イデアルと仮定する.

$\mathfrak{m}$ の元 x を取ると, $\mathfrak{m} = \sqrt{Q}$ より, あるべき乗 x^n は Q, よって I に属す. I は素イデアルなので, $x \in I$ を得るが, これは $\mathfrak{m}$ が I に含まれることを意味する. したがって, $I = \mathfrak{m}$ を得る. □

2 $\boxed{1}$ における剰余環 R/Q はアルチンとは限らない.

<u>例</u> K を体とし, R を K 上 (可算) 無限個の変数 x_i からなる多項式環とする: $R = K[x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots]$. このとき, $\mathfrak{m} = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ および $Q = (x_1^2, x_2^2, \cdots, x_n^2, \cdots)$ を考えると, Q は $\mathfrak{m}$-準素イデアルであるが, R/Q はネーターでない; $\mathfrak{m}/Q$ は有限生成でない. ちなみに, $R_\mathfrak{m}$ もネーターでない.

3 A を極大イデアル $\mathfrak{m}$ をもつ可換局所環とし, A は $\mathfrak{m} = \sqrt{(x)}$ を満たす元 x をもつと仮定する. このとき, $\mathfrak{m}$ は 2 以上の高さを取り得る. (A がネーターならば, $\operatorname{ht}_A \mathfrak{m} \leq 1$ [後藤, 補題 3.46].)

<u>例</u> K を体とし, $S = K[x, y], R = K + xS$ とおく.

- R はネーターでない: イデアル $(xy, xy^2, xy^3, \cdots)$ は有限生成でない.
- $\mathfrak{m} = xS$ は R の極大イデアルである. (わって体)
- $Q = (x)_R$ は $\mathfrak{m}$-準素イデアル. 特に, 素イデアルでない: $xy \in \mathfrak{m} \setminus Q$ であり, $Q \subsetneq \mathfrak{m} = \sqrt{Q}$.
- $\mathfrak{p} = xyS$ は R の素イデアルである. (定義通りに.)

㊟ $(xy)_R$ は素イデアルでない: $x \cdot xy^2 \in (xy)_R$.

- このように, R の素イデアルの列 $(0) \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$ を得る: $\operatorname{ht}_R \mathfrak{m} \geq 2$.
- ちなみに, $\operatorname{ht}_R \mathfrak{m} = 2 = \dim R$.

最終的に, $A = R_\mathfrak{m}$ を考えればよい.

参考文献

[後藤] 後藤四郎, 数学の勘どころ 32: 可換環論の勘どころ. 共立出版 (2017).

可換環論 自由分解の例 2020.9.14 (月)

自由分解の例を与える (地道な方法で).

<u>例</u> $R=\mathbb{Z}[x,y], I=(x,y,2)$ とする．このとき, $\operatorname{pd}_R R/I=3$ であることを実際に計算してみよう．

(1) $0\to I\to R\xrightarrow{\pi} R/I\to 0$.

(2) $0\to \operatorname{Ker}\pi_1\to R^3\xrightarrow{\pi_1} I\to 0,\ \pi_1=\begin{pmatrix} x & y & 2\end{pmatrix}$.

(3) $\operatorname{Ker}\pi_1$ が $\begin{pmatrix} y\\ -x\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 2\\ -y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\ 0\\ -x\end{pmatrix}$ で生成されることを見る．(それぞれが $\operatorname{Ker}\pi_1$ に属すことは明らか.) $\operatorname{Ker}\pi_1$ の元 $\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ を取ると, $ax+by+2c=0$ であるから, $2c=-ax-by\in(x,y)$ を得る．(x,y) は R の素イデアルより, $2\in(x,y)$ または $c\in(x,y)$ であるが, 明らかに前者は成り立たない; ゆえに後者が成り立ち, $c=-ey-fx$ $(e,f\in R)$．よって, $2(ey+fx)=ax+by$ を得て, さらに $b-2e$ は x でわり切れる: $b-2e=-dx$．したがって, $a-2f=dy$．結果的に, $\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=d\cdot\begin{pmatrix} y\\ -x\\ 0\end{pmatrix}+e\cdot\begin{pmatrix} 0\\ 2\\ -y\end{pmatrix}+f\cdot\begin{pmatrix} 2\\ 0\\ -x\end{pmatrix}$. 注 これらは基底ではない．($\operatorname{Ker}\pi_1$ は自由でない.)

(4) $0\to \operatorname{Ker}\pi_2\to R^3\xrightarrow{\pi_2} \operatorname{Ker}\pi_1\to 0,\ \pi_2=\begin{pmatrix} y & 0 & 2\\ -x & 2 & 0\\ 0 & -y & -x\end{pmatrix}$.

(5) $\operatorname{Ker}\pi_2$ は簡単に, $\begin{pmatrix} 2\\ x\\ -y\end{pmatrix}$ で生成されることがわかり, $\operatorname{Ker}\pi_2\simeq R$.

(6) 最終的に, 完全列

$$0\longrightarrow R\xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 2\\ x\\ -y\end{smallmatrix}\right)} R^3\xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} y & 0 & 2\\ -x & 2 & 0\\ 0 & -y & -x\end{smallmatrix}\right)} R^3\xrightarrow{(\,x\ y\ 2\,)} R\longrightarrow R/I\longrightarrow 0$$

を得ることができる.

可換環論 アルチン環 vs ハウスドルフ空間 2020.12.9 (水)

可換環 R の素スペクトル $\operatorname{Spec} R$ (ザリスキー位相による位相空間) の構造を考える: イデアル I に対して, $V(I) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$ が閉集合. 特に, この位相空間がいつハウスドルフ空間になるかを考察しよう.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の事実は容易に確かめられるので, 証明なく使う.

① イデアル I, J に対して,

$$V(I) \cap V(J) = V(I+J) \quad , \quad V(I) \cup V(J) = V(I \cap J) = V(IJ).$$

よって, I と J が互いに素 ($R = I + J$) かつ $IJ = 0$ ならば, $V(I)$ および $V(J)$ は開集合でもある.

② $R/\sqrt{(0)}$ は被約であり, $\dim R/\sqrt{(0)} = \dim R$ が成り立つ. さらに, 自然な環準同型 $R \to R/\sqrt{(0)}$ が誘導する $\operatorname{Spec} R/\sqrt{(0)} \to \operatorname{Spec} R$ は同相である. [後藤, 定理 3.5, 定義 3.7]

③ 次は同値:

– $\dim R = 0$ ($\Leftrightarrow$ すべての素イデアルは極大イデアル);

– $\operatorname{Spec} R$ が T_1 空間 ($\Leftrightarrow$ 任意の 1 点部分集合が閉集合).

$\boxed{\mathbf{2}}$ R を, 次元 0 の被約と仮定する. このとき, 任意の元 a に対して, $a^2x = a$ となる元 x が存在する.

【証明】R の部分集合 $S := \{a^n(1-ax) \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ x \in R\}$ は単位元をもち ($n = 0, x = 0$), 積で閉じている. しかし, S は積閉集合ではないことを示す: つまり, $0 \in S$.
(背理法) S は積閉集合であると仮定する. このとき, $\operatorname{Spec} S^{-1}R$ は空ではなく, [後藤, 系 3.16] より, $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ となる R の素イデアル $\mathfrak{p}$ が取れる. さらに, $\dim R = 0$ より, $\mathfrak{p}$ は極大イデアルである. (取り方によっては, $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ となる中の極大とできるが, R の極大イデアルとは限らない. つまり, 仮定が必要.) 今, $a \in S$ だから, a は $\mathfrak{p}$ に属さない. $\mathfrak{p}$ は極大イデアル ($R/\mathfrak{p}$ が体) だから, $1 - ax \in \mathfrak{p}$ となる $x \in R$ を取ることができる. さらに, $\mathfrak{p}$ はイデアルより, $a(1-ax) \in \mathfrak{p}$. 一方, S の取り方から $a(1-ax) \in S$, これは $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ に矛盾する.
以上により, $0 \in S$ であることがわかった. つまり, ある $n \geq 0$ と $x \in R$ によって, $a^n(1-ax) = 0$ となる. 特に, $(a(1-ax))^n = 0$. R は被約であるから, $a(1-ax) = 0$, よって $a^2x = a$ を得る. $\square$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次は同値である:

(1) $\dim R{=}0$; (2) $\operatorname{Spec} R$ はハウスドルフ空間である.

【証明】$\boxed{\mathbf{1}}$ ③ より, (2)⇒(1) は OK. そこで, 逆を示す. $\boxed{\mathbf{1}}$ ② より, R と $R/\sqrt{(0)}$ の次元は等しく, それぞれの素スペクトルは同相であるから, 最初から R を被約としてよい.

$\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{q}$ を異なる R の素イデアルとする; このとき,

(i) $\mathfrak{p} \in \overline{V(J)}$, (ii) $\mathfrak{q} \in \overline{V(I)}$, (iii) $\overline{V(J)} \cap \overline{V(I)} = \emptyset$

となるイデアル I, J を作る. $\mathfrak{q}$ に属さない $a \in \mathfrak{p}$ を取る. $\boxed{\mathbf{2}}$ より, $a^2x = a$ となる $x \in R$ が存在する. そこで, $I := (a), J := (1 - ax)$ とおく. このとき, $I = (ax)$ であることに気をつければ, I と J は互いに素であり, $IJ = 0$ を満たす. よって, $\boxed{\mathbf{1}}$ ① より, $V(I)$ および $V(J)$ は開集合でもある: $\overline{V(I)} = V(J), V(I) \cap V(J) = \emptyset$. $a \in \mathfrak{p}$ より $I \subseteq \mathfrak{p}$, よって $\mathfrak{p} \in V(I)$. $a \notin \mathfrak{q}$ より $I \not\subseteq \mathfrak{q}$ であるが, $V(I) \cup V(J) = \operatorname{Spec} R$ より, $\mathfrak{q} \in V(J)$. □

$\boxed{\mathbf{4}}$ R がネーターならば, 次は同値:

(1) R はアルチン環である; (2) $\operatorname{Spec} R$ は離散位相をもつ.

参考文献

[後藤] 後藤四郎, 数学の勘どころ 32: 可換環論の勘どころ. 共立出版 (2017).