

第三回数学セミナー線形数学問題

2026年4月26日

第三回数学セミナー(線形数学領域)の内容は、大学院入試問題の中からのピックアップです。

問題 1. (都立大院)

a を実数として行列 A, B を

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & -a-3 \\ -1 & -1 & -a^2+3 \end{bmatrix}$$

とする。線形写像 $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ を

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4), \quad g(\mathbf{y}) = B\mathbf{y} \quad (\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3)$$

で定め、 f, g の像をそれぞれ $\text{im } f, \text{im } g$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $\text{im } f$ の次元と一組の基底を求めよ。
- (2) g が単射でないとき、 a の値を求めよ。
- (3) $\text{im } f$ と $\text{im } g$ が一致するとき、 a の値を求めよ。