

複素解析入門

5月12日, 19日

目次

1	複素数	2
2	複素関数	3
3	正則関数と Cauchy-Riemann の方程式	8
4	初等関数	13
4.1	指数関数	13
4.2	三角関数	15
4.3	対数関数	16
5	複素積分	18
5.1	Cauchy の積分定理	18
5.2	原始関数	27
5.3	Cauchy の微積分公式	29
6	Laurent 級数展開	31
6.1	Taylor 級数展開	31
6.2	Laurent 級数展開	34
6.3	べき級数の性質	36
7	極と留数	37
7.1	留数	37
7.2	実積分への応用	42

1 複素数

複素数 $z \in \mathbb{C}$ は, $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とかける. $x = \operatorname{Re} z$ を z の実部, $y = \operatorname{Im} z$ を z の虚部という. $\bar{z} = x - iy$ を z の複素共役という. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ を, z の絶対値という.

Prop. 1.1

$$(1) \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2},$$

$$(2) \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

$$(3) z\bar{z} = x^2 + y^2.$$

Prop. 1.2 (三角不等式)

任意の $z, w \in \mathbb{C}$ に対して,

$$||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$$

が成り立つ.

$z \in \mathbb{C} - \{0\}$ は, $r = |z| > 0$, $\theta = \arg z$ を用いて, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とかける. これを, z の極形式という. $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ に対して,

$$z = r\{\cos(\theta + 2n\pi) + i \sin(\theta + 2n\pi)\}$$

である.

Def. 1.3 (偏角の主値)

$\arg z$ の主値を, $\operatorname{Arg} z$ で定める. すなわち,

$$-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$$

である. 他にも, 主値を $0 \leq \operatorname{Arg} z < 2\pi$ と決めてもよい.

e.g. 1.4

$$(1) 1 - i = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right),$$

$$\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{4}, \arg z = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi \ (n \in \mathbb{Z}).$$

(2) $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$ が成り立つが, Arg では不成立.

実際, $z_1 = -1$, $z_2 = i$ とおくと, $z_1 z_2 = -i$ で,

$$\operatorname{Arg} z_1 = \pi, \operatorname{Arg} z_2 = \frac{\pi}{2}, \operatorname{Arg} z_1 z_2 = -\frac{\pi}{2}$$

となって成り立たない.

Prop. 1.5 (オイラーの公式)

$\theta \in \mathbb{R}$ に対して, オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

を認めると, 次が成り立つ.

(1) $z = re^{i\theta}, z^{-1} = r^{-1}e^{-i\theta},$

(2) $z^n = r^n e^{in\theta} (n \in \mathbb{Z}).$

(3) $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して, $|z - \alpha| = R$ を満たす z は, 複素数平面上で円を表し, $z = \alpha + Re^{i\theta}$ とかける.

1 の n 乗根, すなわち $z^n = 1$ の解を考える.

$z = re^{i\theta}$ とおくと, $z^n = r^n e^{in\theta}$ より,

$$z^n = 1 \iff r^n = 1, n\theta = 0 + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \iff r = 1, \theta = \frac{2k\pi}{n} (k \in \mathbb{Z})$$

となるから, $z = 1^{\frac{1}{n}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} (k \in \mathbb{Z})$ である. これらの点は, 原点を中心とする単位円上に $2\pi/n$ ごとに並んでいる. 三角関数の周期性から, 異なる z は全部で n 個 ($k = 0, 1, \dots, n-1$) ある.

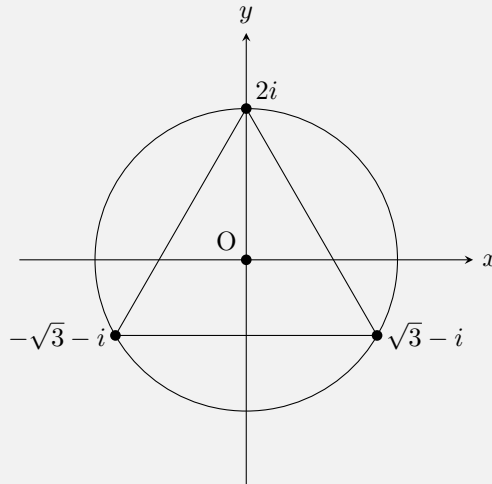
同様に, $z_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$ の n 乗根は,

$$z_0^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}}$$

である. ここで, $r = |z_0|, \theta_0 = \arg z_0, k = 0, 1, \dots, n-1.$

e.g. 1.6

(1) $(-8i)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi)} (k = 0, 1, 2)$ であるから, $(-8i)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{3} - i, 2i, -\sqrt{3} - i.$



2 複素関数

$D, S \subseteq \mathbb{C}$ として, 関数 $f: D \rightarrow S; f(z) = w$ を考える. D を f の定義域, S を f の値域という. このような関数を, 複素関数と呼ぶ.

e.g. 2.1

$z = x + iy$ とおく.

(1) $f(z) = z^2, f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy.$

(2) $f(z) = z^3, f(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3).$

(3) $f(z) = z^{\frac{1}{3}}$ のように, 1つの z に対して複数の値を対応させるような関数を, **多価関数**という. この場合, 多くの値から1つを選んでそれを z における f の値とすることで, **1価関数**とすることができる.

(4) $w = u + iv$ とおくと, 実2変数関数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ を用いて,

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

と表される. 例えば (1) では, $u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy$ である.

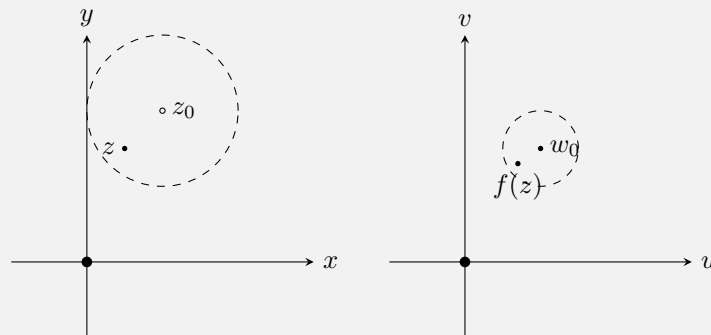
(5) $P(z) = a_0 + a_1z + z_2z^2 + \dots + a_nz^n$ ($a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$) を, 多項式という. P の定義域は \mathbb{C} である. 多項式の比, $\frac{P(z)}{Q(z)}$ を, 有理関数という. 定義域は, $Q(z) = 0$ となる点を除いた \mathbb{C} 全体である.

Def. 2.2 (複素関数の極限)

$z \rightarrow z_0$ のとき, $f(z) \rightarrow w_0$ である, すなわち,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

が成り立つとき, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ とかく. このとき, w_0 を極限, 極限值という.



$z \rightarrow z_0$ は, z の近づき方を全く考えていないことに注意する. また, $z \neq z_0$ について考えているので, $f(z)$ が z_0 で定義されていなくても, 極限を考えることはできる.

e.g. 2.3

$f(z) = \frac{iz}{2}$ に対して, $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \frac{i}{2}$ を示そう.

$$\left| f(z) - \frac{i}{2} \right| = \frac{|z - 1|}{2}$$

であるから、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = 2\varepsilon$ とすれば、

$$0 < |z - 1| < \delta \implies \left| f(z) - \frac{i}{2} \right| < \varepsilon$$

となる.

Thm. 2.4

極限が存在すれば、ただ 1 つである.

Proof. $z \rightarrow z_0$ のとき、 $f(z) \rightarrow w_1$, $f(z) \rightarrow w_2$ と仮定すると、 $0 < |z - z_0| < \delta$ ならば、

$$|w_1 - w_2| \leq |w_1 - f(z)| + |f(z) - w_2| < 2\varepsilon$$

となるから、 $w_1 = w_2$. □

Def. 2.5

- (1) $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists R > 0, |z| > R \implies |f(z) - w_0| < \varepsilon,$
- (2) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \iff \forall R > 0, \exists \delta > 0, 0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z)| > R,$

Prop. 2.6

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0, \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = w_1$ ならば、

- (1) $\lim_{z \rightarrow z_0} \{f(z) \pm g(z)\} = w_0 \pm w_1,$
- (2) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = w_0w_1,$
- (3) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)/g(z) = w_0/w_1, (w_1 \neq 0).$

Thm. 2.7

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \iff \begin{cases} \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} w_0, \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} w_0. \end{cases}$$

Proof.

$$|f(z) - w_0|^2 = \{\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} w_0\}^2 + \{\operatorname{Im} f(z) - \operatorname{Im} w_0\}^2$$

であることからわかる. □

e.g. 2.8

$f(z) = z^2, z = x + iy$ とすると、 $f(z) = x^2 - y^2 + i2xy.$

$z \rightarrow 1 + 2i$ のとき、 $x \rightarrow 1, y \rightarrow 2$ であるから、

$\lim_{z \rightarrow 1+2i} \operatorname{Re} f(z) = 1^2 - 2^2 = -3$, $\lim_{z \rightarrow 1+2i} \operatorname{Im} f(z) = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$ となる。よって,

$$\lim_{z \rightarrow 1+2i} f(z) = -3 + 4i.$$

Def. 2.9 (連続性)

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, すなわち,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

が成り立つとき, $f(z)$ は z_0 で連続という.

集合 $D \subseteq \mathbb{C}$ の各点で連続のとき, $f(z)$ は D で連続という.

Prop. 2.10

$f(z), g(z)$ が z_0 で連続ならば, $f(z) \pm g(z), f(z)g(z), \frac{f(z)}{g(z)}$ ($g(z_0) \neq 0$) は z_0 で連続.

Thm. 2.11

$f(z)$ が z_0 で連続 $\iff \operatorname{Re} f(z), \operatorname{Im} f(z)$ が z_0 で連続.

e.g. 2.12

(1) $xy^2, 2x - y$ が \mathbb{R}^2 で連続なので, $f(z) = xy^2 + i(2x - y)$ は \mathbb{C} で連続.

(2) $e^x, \sin x$, 多項式の合成は \mathbb{R}^2 で連続なので, $f(z) = e^{xy} + i(\sin x^2 - 2xy^3)$ は \mathbb{C} で連続.

Def. 2.13 (微分可能性)

$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ が存在するとき, この値を $f'(z_0)$ とかき, $f(z)$ は z_0 で微分可能という.

$\Delta z = z - z_0$ において z_0 の固定を外してかきなおすと,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

とかける. $f'(z)$ を, $f(z)$ の導関数という.

$f(z)$ が z_0 で微分可能であることを,

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = A + \varepsilon(z), \lim_{z \rightarrow z_0} \varepsilon(z) = 0, z \neq z_0$$

となるような $A \in \mathbb{C}$ と関数 $\varepsilon(z)$ が存在する, といいかえることができる. これを, $f(z) - f(z_0) = A(z - z_0) + \varepsilon(z)(z - z_0)$ と変形すると, 右辺第 2 項は第 1 項よりも早く 0 に収束するので, $|z - z_0|$ が十分小さいときには, ほとんど

$$f(z) - f(z_0) = A(z - z_0)$$

とみることができる. $z - z_0 = Z$, $f(z) - f(z_0) = W$ とおきなおすことで,

$$W = AZ$$

という比例関数の形であると思うことにする.

$A = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおくと,

$$|W| = r|Z|, \arg W = \theta + \arg Z$$

であることから, 比例関数 $W = AZ$ は, 複素数平面上では拡大と回転であることがわかる. すなわち $f(z)$ が微分可能であるとは, 十分小さいところでは f が拡大と回転を表しているということである.

e.g. 2.14

(1) $f(z) = z^2$ について,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z$$

となるので, $f(z)$ は \mathbb{C} で微分可能で, $f'(z) = 2z$.

(2) $f(z) = |z|^2$ について,

$$\frac{|z + \Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} + z \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \quad (2.1)$$

となるから, $z = 0$ においては $f'(z) = 0$ となり微分可能.

$z \neq 0$ のときは, 以下のようにして微分可能でないことがわかる.

まず, Δz が実数のとき (実軸と平行に近づいていくとき), $\Delta z = \overline{\Delta z}$ であるから,

$$(2.1) = \bar{z} + \overline{\Delta z} + z \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} z + \bar{z}.$$

次に, Δz が純虚数のとき (虚軸と平行に近づいていくとき), $\Delta z = -\overline{\Delta z}$ であるから,

$$(2.1) = \bar{z} + \overline{\Delta z} - z \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} -z + \bar{z}.$$

以上より, $\Delta z \rightarrow 0$ の近づき方で値が異なるので, 極限は存在しない. よって, $f(z) = |z|^2$ は原点でのみ微分可能で, それ以外では微分不可能である.

(3) (2) の f について, $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 + i0$ であるから, $\operatorname{Re} f(z)$, $\operatorname{Im} f(z)$ が任意の (x, y) で連続であることから $f(z)$ は \mathbb{C} で連続である. このことから, 『連続ならば微分可能』は一般には成り立たない.

しかし, 『微分可能ならば連続』が成立する.

$$\therefore \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0.$$

Thm. 2.15

$f(z)$: 微分可能, $c \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ とする.

- (1) $(c)' = 0$,
- (2) $\{cf(z)\}' = cf'(z)$,
- (3) $(z)^n = nz^{n-1}$.

Thm. 2.16

$f(z)$, $g(z)$ が微分可能ならば, $f(z) \pm g(z)$, $f(z)g(z)$, $\frac{f(z)}{g(z)}$ ($g(z) \neq 0$) は微分可能で,

- (1) $\{f(z) \pm g(z)\}' = f'(z) \pm g'(z)$,
- (2) $\{f(z)g(z)\}' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$,
- (3) $\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\}' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$.

Thm. 2.17

$f(z)$ と $g(z)$ の合成 $f(g(z))$ が定まるとき,

$$\{f(g(z))\}' = f'(g(z))g'(z)$$

e.g. 2.18

$$\{(iz^2 + 3)^5\}' = 5(iz^2 + 3)^4 2iz = 10iz(iz^2 + 3)^4.$$

3 正則関数と Cauchy-Riemann の方程式

Def. 3.1 (偏導関数)

2 変数実数関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ とは, y, x をそれぞれ固定した, 1 変数関数としての導関数である.

すなわち,

$$f_x(x, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y_0) - f(x, y_0)}{h}, \quad y_0 \in \mathbb{R},$$

$$f_y(x_0, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y+k) - f(x_0, y)}{k}, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

e.g. 3.2

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2 \text{ とすると, } f_x(x, y) = 2x + y, \quad f_y(x, y) = x + 4y.$$

Prop. 3.3 (全微分可能性)

2変数実数関数 $f(x, y)$ が (a, b) で偏微分可能で、偏導関数が連続であるとき

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}, \quad \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(h, k) = 0$$

をみたすような $\varepsilon(h, k)$ が存在する.

Thm. 3.4 (Cauchy-Riemann の方程式と微分可能性①)

$f(z)$ が $z_0 = x_0 + iy_0$ で微分可能であるとする. $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ とかいたとき,

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$$

が成り立つ. 実部と虚部を比較して,

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases} \quad (3.1)$$

が成り立つ. (3.1) を, Cauchy-Riemann の方程式という.

Proof. $f(z)$ が z_0 で微分可能という仮定から,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

が成り立つ. $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ とおくと,

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)\} + i\{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)\}}{\Delta x + i\Delta y}$$

が成り立つ. ここで, 上の極限は z が z_0 に近づく方向によらないので, まずは $\Delta y = 0$ のとき (実軸に平行に近づくとき), 極限の実部と虚部を考えて,

$$\operatorname{Re} f'(z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} = u_x(x_0, y_0),$$

$$\operatorname{Im} f'(z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} = v_x(x_0, y_0).$$

となるから, $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$ が成り立つ.

次に, $\Delta x = 0$ のとき (虚軸に平行に近づくとき), 同様に考えれば, $f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$ が成り立つ. □

e.g. 3.5

$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ は, 任意の z で微分可能で, $f'(z) = 2z = 2x + i2y$ である. $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$ であるから,

$$u_x = 2x = v_y, \quad u_y = -2y = -v_x$$

が成り立っている. さらに, $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$ である.

e.g. 3.6

(3.1) が成り立つとしても, $f(z)$ が微分可能であるとは限らない.

実際,

$$f(z) = \begin{cases} 0 & z = 0 \\ \frac{(\bar{z})^2}{z} & z \neq 0 \end{cases}$$

とすると,

$$f(x + iy) = \begin{cases} 0 & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} + i \frac{-3x^2y + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

であるから, $u_x(0, 0) = 1 = v_y(0, 0)$, $u_y(0, 0) = 0 = -v_x(0, 0)$ となり, (3.1) をみたとす.

$z \in \mathbb{R}$ のとき,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right)^2 = 1$$

となるが, $\Delta x = \Delta y$, すなわち $\Delta z = \Delta x(1 + i)$ のとき,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right)^2 = -1$$

となるから, $f(z)$ は $z = 0$ で微分可能でない.

Thm. 3.7 (Cauchy-Riemann の方程式と微分可能性②)

$z_0 = x_0 + iy_0$ の近傍で u_x, u_y, v_x, v_y が存在して, これらが (x_0, y_0) で連続であるとする. このとき,

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases} \quad (3.2)$$

が成り立つならば, $f(z)$ は z_0 で微分可能.

Proof. $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta u + i\Delta v$ とおくと,

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0),$$

$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)$$

である. u_x, u_y, v_x, v_y は (x_0, y_0) で連続なので, Prop. 3.3 から,

$$\Delta u = u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

$$\Delta v = v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_2\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

が成り立ち, $\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0 ((\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0))$ であるものが存在する. したがって,

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v$$

$$= u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} + i\{v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_2\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\}$$

$$= u_x(x_0, y_0)\Delta x - v_x(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} + i\{v_x(x_0, y_0)\Delta x + u_x(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_2\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\}$$

$$= u_x(x_0, y_0)(\Delta x + i\Delta y) + iv_x(x_0, y_0)(\Delta x + i\Delta y) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$= u_x(x_0, y_0)\Delta z + iv_x(x_0, y_0)\Delta z + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)|\Delta z|$$

が成り立っている。よって、

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

となって、 $f(z)$ は z_0 で微分可能。 □

e.g. 3.6 の u, v が原点で連続でないことから、 $f(z)$ は原点で微分不可能なのである。

e.g. 3.8

(1) $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ とする。

$u(x, y) = e^x \cos y, v(x, y) = e^x \sin y$ であり、

$$u_x = e^x \cos y = v_y, u_y = -e^x \sin y = -v_x$$

が成り立ち、これらは連続である。よって f は任意の点で微分可能で、

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = f(z).$$

(2) $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ とする。

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0)$$

である。偏導関数 u_x, u_y, v_x, v_y は連続なので、 $|z|^2$ は原点でのみ微分可能で、 $f'(0) = 0$ 。

Def. 3.9 (正則関数)

$f(z)$ が z_0 で微分可能で、 z_0 のある近傍 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}$ の各点でも微分可能であるとき、 $f(z)$ は z_0 で正則という。

集合 $D \subseteq \mathbb{C}$ の各点で正則なら、 $f(z)$ は D で正則という。

e.g. 3.10

(1) $f(z) = z^2$ はすべての点で微分可能なので、 \mathbb{C} で正則。

(2) $f(z) = |z|^2$ はどんな点でも正則でない。なぜならば、 $z = 0$ のみで微分可能であり、0 の任意の近傍の 0 以外の点では微分不可能だからである。

Def. 3.11 (特異点)

\mathbb{C} の任意の点で正則な関数を整関数という。

$f(z)$ が、 z_0 では微分可能でないが、 z_0 の任意の近傍 $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ の少なくとも 1 点では正則であるとき、 z_0 は $f(z)$ の特異点という。

e.g. 3.12

- (1) 多項式は任意の点で微分可能なので任意の点で正則で、特に整関数である.
- (2) $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ は整関数である.
- (3) $f(z) = \frac{1}{z}$ は、 $z \neq 0$ では微分可能なので、 $z \neq 0$ では正則で、 $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ である. $z = 0$ は、特異点である.
- (4) $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$ の特異点は、 $z = \pm 1$ である.
- (5) $f(z) = |z|^2$ は、すべての点で正則でないので、特異点はない.

Thm. 3.13

$f(z), g(z)$ が D で正則ならば、 $f(z) \pm g(z), f(z)g(z), \frac{f(z)}{g(z)}$ ($g(z) \neq 0$) は D で正則.

Thm. 3.14

領域 D で $f'(z) = 0$ ならば、 D で $f(z)$ は定数関数.

Proof. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とおく. D の各点で、

$$u_x = u_y = v_x = v_y = 0$$

であるから、 u, v は x, y に関して定数関数で、 $f(z)$ も定数関数. □

Thm. 3.15 (極形式の Cauchy-Riemann の方程式)

原点を含まない領域 D 上の正則関数 $f(z)$ を考える. $z = re^{i\theta}$ ($r > 0, \theta \in \mathbb{R}$) とおいて、 $f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ とするとき、Cauchy-Riemann の方程式は、

$$\begin{cases} u_r = \frac{v_\theta}{r}, \\ v_r = -\frac{u_\theta}{r} \end{cases}$$

と同値である. これを、極形式の Cauchy-Riemann の方程式という.

Proof. $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおいて、 $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ とおくとき、 $u(r, \theta) = U(x, y), v(r, \theta) = V(x, y)$ であり、Cauchy-Riemann の方程式は、

$$\begin{cases} U_x = V_y, \\ U_y = -V_x \end{cases} \quad (3.3)$$

である. ここで、

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta) &= U_x(x, y) \cos \theta + U_y(x, y) \sin \theta, \\ u_\theta(r, \theta) &= U_x(x, y)(-r \sin \theta) + U_y(x, y)r \cos \theta, \\ v_r(r, \theta) &= V_x(x, y) \cos \theta + V_y(x, y) \sin \theta, \\ v_\theta(r, \theta) &= V_x(x, y)(-r \sin \theta) + V_y(x, y)r \cos \theta. \end{aligned}$$

であるから, (3.3) を用いると,

$$\begin{pmatrix} u_r & u_\theta \\ v_r & v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_x & U_y \\ V_x & V_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_x & U_y \\ -U_y & U_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

が成り立つから, 成分比較して,

$$\begin{cases} u_r = \frac{v_\theta}{r}, \\ v_r = -\frac{u_\theta}{r} \end{cases}$$

を得る. 逆は, 上の行列の逆行列を考えて,

$$\begin{pmatrix} U_x & U_y \\ V_x & V_y \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} u_r & u_\theta \\ v_r & v_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

であるから, 成分比較すれば Cauchy-Riemann の方程式が成り立つ. また,

$$U_x = \frac{1}{r}(ru_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta), \quad V_x = \frac{1}{r}(rv_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta)$$

となるから,

$$f'(re^{i\theta}) = U_x + iV_x = (\cos \theta - \sin \theta)(u_r + iv_r) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r).$$

が成り立つ. □

4 初等関数

e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\log x$ などに対応する複素関数を考える.

4.1 指数関数

指数関数 $f(z)$ は $z = x + i0$ のとき, 実数関数 e^x と一致して欲しいので,

$$f(x + i0) = e^x$$

でなければならない. また, $\{e^x\}' = e^x$ であるから, $f'(z) = f(z)$, $f(z)$: 整関数, であるような $f(z)$ を考えたい.

例えば, $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ はこれらの条件を満たす. 逆に, これらの条件を満たすものはこれしかないことが知られている.

Def. 4.1 (指数関数)

$e^z := e^x(\cos y + i \sin y)$ を, 指数関数という. $\exp z$ ともかく.

e.g. 4.2

- (1) $e^{2+i\pi} = e^2(\cos \pi + i \sin \pi) = -e^2$,
- (2) $e^{\sqrt{2}+i} = e^{\sqrt{2}}(\cos 1 + i \sin 1)$,
- (3) $e^{-3+i\frac{\pi}{2}} = e^{-3} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = ie^{-3}$,

(4) $z = i\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$ のとき, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. (Euler の公式)

Prop. 4.3

e^z に対して, 指数法則

(1) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$,

(2) $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$,

(3) $e^0 = 1$,

(4) $(e^z)^n = e^{nz}$, $n \in \mathbb{Z}$.

が成り立つ.

Prop. 4.4

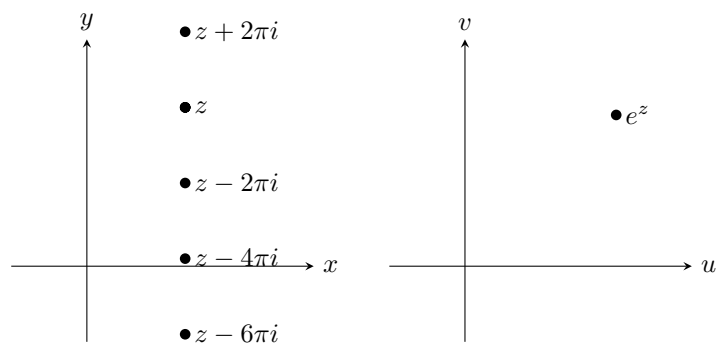
(1) $e^{z+2\pi i} = e^z$, すなわち, e^z は周期 $2\pi i$ の周期関数,

(2) $|e^z| = e^x$,

(3) $z = x + iy$ のとき, $x = \ln |e^z|$, $y = \arg z + 2n\pi$ と, $n \in \mathbb{Z}$ を用いて表せる.

(4) $e^z \neq 0$.

このことから, e^z は全単射ではない.



e.g. 4.5

$e^z = -1$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ を求める.

$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos \theta + i \sin \theta)$, $-1 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$ であるから, $e^x = 1$, $y = \pi + 2n\pi$.

以上より, $z = (2n + 1)\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$.

4.2 三角関数

Def. 4.6 (三角関数)

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

と定義する.

これは、オイラーの公式を変形した,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

をそのまま z に拡張した形である.

Prop. 4.7

- (1) $(\cos z)' = -\sin z$,
- (2) $(\sin z)' = \cos z$,
- (3) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,
- (4) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$,
- (5) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$.

e.g. 4.8

- (1) $\sin \frac{\pi}{2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2i} = \frac{i + i}{2i} = 1$,
- (2) $\sin i\frac{\pi}{2} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}}{2i} = i \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}}{2} = i \sinh \frac{\pi}{2}$,
- (3) $\cos 100i = \frac{e^{-100} + e^{100}}{2} = \cosh 100 \in \mathbb{R}$.

$\cosh 100 \approx 1.3 \times 10^{43} > 1$ である. 一般に, $\cos z, \sin z$ は有界でないことが知られている.

Def. 4.9 (関数の零点)

$f(z) = 0$ となる z を, $f(z)$ の零点という.

e.g. 4.10

- (1) $\sin z$ の零点は, $z = n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

実際, $\sin z = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff e^{-y}(\cos x + i \sin x) = e^y(\cos(-x) + i \sin(-x)) \iff y = 0, \sin x = 0$, であるから, $z = n\pi$.

- (2) $\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$.

4.3 対数関数

Prop. 4.4 でみたように, $w = e^z$ は全単射ではないからその逆関数は定義できない. 以下では, $r > 0$ に対して $\log_e r = \ln r$ とかく.

Def. 4.11 (対数関数)

$z = re^{i\theta}$ の対数関数を,

$$\log z = \ln r + i\theta$$

と定義する.

$z = re^{i\theta}$ における θ の主値 $\text{Arg } z$ を Θ ($-\pi < \Theta \leq \pi$) とかくと, $\log z = \ln |z| + i(\Theta + 2n\pi)$ ($n \in \mathbb{Z}$) となるので, $\log z$ は無限多価関数である.

$n = 0$ のときを $\log z$ の主値といい, $\text{Log } z$ とかく. すなわち,

$$\text{Log } z = \ln |z| + i \text{Arg } z$$

とすることで, 1 価関数になる.

e.g. 4.12

(1) $\log 1 = \ln 1 + i(\text{Arg } 1 + 2n\pi) = 2n\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$),

(2) $\text{Log } 1 = \ln 1 + i \text{Arg } 1 = 0$,

(3) $\log(1+i) = \ln|1+i| + i(\text{Arg}(1+i) + 2n\pi) = \log\sqrt{2} + i\left(\frac{1}{4} + 2n\right)\pi$,

(4) $\text{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i \text{Arg}(1+i) = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$

Thm. 4.13

対数関数の主値 $\text{Log } z$ は,

$$|z| > 0, \quad -\pi < \text{Arg } z < \pi$$

で正則で,

$$(\text{Log } z)' = \frac{1}{z}.$$

Proof.

$$\text{Log } z = \ln r + i\theta, \quad \theta = \text{Arg } z$$

とかける. $\text{Log } z = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ とおくと,

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{r} = \frac{v_\theta}{r}, \\ v_r &= 0 = -\frac{u_\theta}{r} \end{aligned}$$

となるから、極形式の Cauchy-Riemann の方程式 Thm. 3.15 が成り立ち、偏導関数 $u_r, u_\theta, v_r, v_\theta$ は連続である。Thm. 3.7 より、 $\text{Log } z$ は $|z| > 0, -\pi < \text{Arg } z < \pi$ で微分可能で、

$$(\text{Log } z)' = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}.$$

□

偏角の主値を、 $\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$ としても、 $\log z$ は 1 価であり、 $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$ で正則なことがわかる。

e.g. 4.14

(1) 任意の $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ に対して、 $e^{\log z} = z$.

実際、 $z = re^{i\theta}$ とおくと、 $\log z = \ln r + i(\theta + 2n\pi)$ であるから、 $e^z = e^{\ln r + i(\theta + 2n\pi)} = e^{\ln r} e^{i(\theta + 2n\pi)} = re^{i\theta}$.

(2) 任意の z に対して、 $\log e^z = z + 2n\pi i$.

実際、 $e^z = e^x e^{iy}$ より、 $|e^z| = e^x$, $\arg e^z = y + 2n\pi$ より、

$$\log e^z = \ln e^x + i(y + 2n\pi) = z + 2n\pi i.$$

(3) $-\pi < y \leq \pi$ のときは、

$$\text{Log } e^z = x + iy = z.$$

よって、 $-\pi < y \leq \pi$ では、指数関数と対数関数は互いに逆関数となっている。

(4) $z = -1 - i$ のとき、 $\text{Log } z^2 = \text{Log } 2i = \ln 2 + i\frac{\pi}{2}$ だが、 $2\text{Log } z = 2\left(\ln \sqrt{2} - i\frac{3\pi}{4}\right) = \ln 2 - i\frac{3\pi}{2}$ となるので、 $\text{Log } z^2 \neq 2\text{Log } z$.

Def. 4.15 (複素数のべき)

$z \neq 0, z, c \in \mathbb{C}$ に対して、べき z^c を、

$$z^c = e^{c \log z} = \exp(c \log z)$$

と定義する。 $\log z$ が多価関数なので、 z^c も多価関数である。

e.g. 4.16

(1) $i^i = \exp(i \log i) = e^{i(0 + i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi))} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)}$

$n = 0$ のとき、 $e^{\frac{\pi}{2}} \sim 0.207879 \dots$ である。

(2) $z = \pi i, w = i, zw = -\pi$ のとき、

$$(e^z)^w = (e^{\pi i})^i = (-1)^i = \exp(i \log(-1)) = e^{-(2n+1)\pi},$$

$$e^{zw} = e^{-\pi}$$

であるから、一般には、

$$(e^z)^w = e^{zw}$$

は成り立たない。

z の偏角を $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$ にすると, $\log z$ は 1 価で正則である. このとき, 複素数のべき $z^c = \exp(c \log z)$ も 1 価である.

$$(z^c)' = (\exp(c \log z))' = (c \log z)' \exp(c \log z) = \frac{c}{z} \exp(c \log z) \stackrel{z=e^{\log z}}{=} c \exp\{(c-1) \log z\} = cz^{c-1}$$

となるので, z^c は正則である. このように, $\log z$ を主値 $\text{Log } z$ でとった複素数べき $z^c = \exp(c \text{Log } z)$ を, 複素数べきの主枝という.

5 複素積分

5.1 Cauchy の積分定理

実数変数複素数値関数 $w(t) = u(t) + iv(t)$ ($a \leq t \leq b$) の定積分を,

$$\int_a^b w(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

と定義する.

e.g. 5.1

$w(t) = e^{i2t} = \cos 2t + i \sin 2t$ を, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ で積分すると,

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} w(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2t dt + i \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2t dt = \frac{\sqrt{3}}{4} + i \frac{1}{4}.$$

Thm. 5.2

実数変数複素数値関数 $w(t)$ と $z_0 \in \mathbb{C}$ に対して,

$$(1) \operatorname{Re} \int_a^b w(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} w(t) dt,$$

$$(2) \operatorname{Im} \int_a^b w(t) dt = \int_a^b \operatorname{Im} w(t) dt,$$

$$(3) \int_a^b z_0 w(t) dt = z_0 \int_a^b w(t) dt,$$

$$(4) \left| \int_a^b w(t) dt \right| \leq \int_a^b |w(t)| dt,$$

$$(5) \int_a^\infty w(t) dt, \int_a^\infty |w(t)| dt \text{ が存在すれば, } \int_a^\infty w(t) dt \leq \int_a^\infty |w(t)| dt.$$

次は, 複素数変数複素数値関数の積分を考える.

Def. 5.3 (曲線)

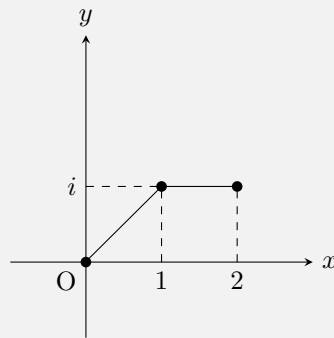
連続な実関数 $x(t), y(t)$ に対して, 複素数平面上の曲線 (弧) を,

$$C : z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

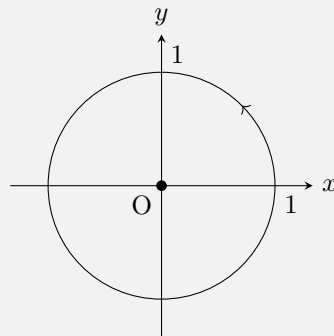
と定義する. $t_1 \neq t_2 \implies z(t_1) \neq z(t_2)$, すなわち, 自分自身と交わらないとき, C を単純弧という.
 $z(a) = z(b)$ であり, それ以外では自分自身と交わらないとき, C を単純閉曲線という.

e.g. 5.4

(1) $z(t) = \begin{cases} t + it & 0 \leq t \leq 1, \\ t + i & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$ は, 単純弧.

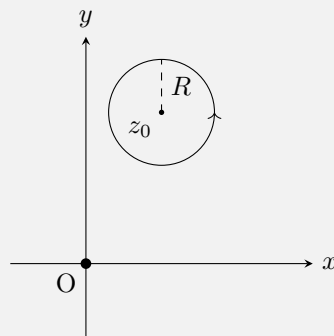


(2) $z(\theta) = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) は単純閉曲線.



この向き (反時計回り, 内部を内側にみて進む方向) を, 正の向きという. 以下では, 単純閉曲線はことわらないかぎり, 正の向きをもつとする.

(3) 中心 z_0 , 半径 R の円, $z = z_0 + Re^{i\theta}$ は単純閉曲線で, 正の向きをもつ.



Def. 5.5 (曲線の長さ)

$C : z(t) = x(t) + iy(t)$ ($a \leq t \leq b$) の導関数を,

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

と定義する. ($z'(t)$ などは, パラメータ t での微分を考える.) $t = a, b$ では片側微分係数を考える. $x'(t), y'(t)$ が連続なとき, $z(t)$ は微分可能な弧という.

$z(t)$ が微分可能であるとき,

$$|z'(t)| = \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2}$$

は連続であるから $[a, b]$ で積分可能である.

$$L = \int_a^b \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2} dt$$

を, C の長さといい,

$$L = \int_a^b |z'(t)| dt = \int_C |dz|$$

などとかく.

$z = z(t)$ が微分可能な弧で, $z'(t) = 0$ となる t が存在しないとき, $z(t)$ はなめらかな弧という. なめらかな弧を有限個つなげた弧を, 区分的になめらかな弧という.

e.g. 5.6

$C : z(\theta) = Re^{i\theta} = R \cos \theta + iR \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) は, なめらかな弧である. $z'(\theta) = -R \sin \theta + iR \cos \theta$ であるから,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 \theta + R^2 \cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi R.$$

複素関数 $f(z)$ の, 複素変数 z による積分とは, 始点 z_1 , 終点 z_2 を結ぶ曲線 C 上の積分のことである. これを,

$$\int_C f(z) dz \quad (C : z(t) = x(t) + iy(t))$$

とかく. 以下では, C は区分的になめらかで, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ は C 上で区分的に連続 (有限個の点を除いて連続) とする. これは, 実 1 変数関数 $u(x(t), y(t)), v(x(t), y(t))$ が, 区分的に連続であることを表す.

Def. 5.7 (複素線積分)

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt$$

と定義する. 右辺は,

$$\begin{aligned}
 \int_C f(z) dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t) dt \\
 &= \int_a^b (u + iv) \left(\frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt} \right) dt \\
 &= \int_a^b \left(u \frac{dx}{dt} - v \frac{dy}{dt} \right) dt + i \int_a^b \left(v \frac{dx}{dt} + u \frac{dy}{dt} \right) dt \\
 &= \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy
 \end{aligned}$$

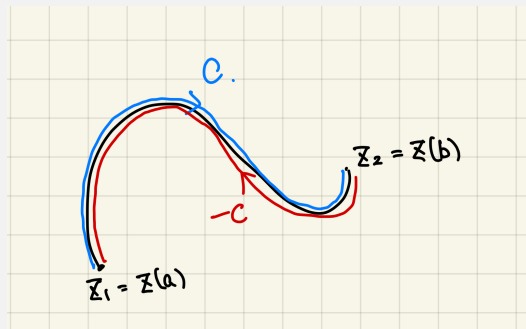
と表せる.

Def. 5.8

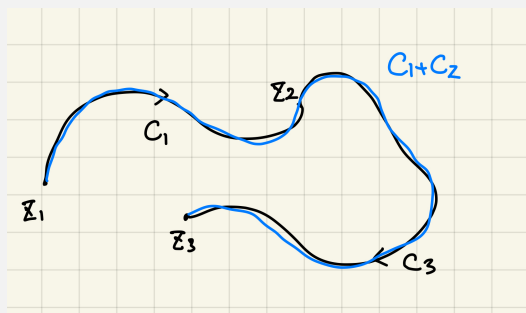
(1) $C : z(t) = x(t) + iy(t)$ ($a \leq t \leq b$) に対して, 曲線 $-C$ を,

$$-C : z = z(-t) \quad (-b \leq t \leq -a)$$

と定める.



(2) 2つの曲線 C_1 と C_2 に対して, C_1 の終点と C_2 の始点が一致しているとき, C_1 の終点と C_2 の始点をつなげた曲線を $C_1 + C_2$ とかく.



Prop. 5.9

線積分に対して次が成り立つ.

$$(1) \int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz,$$

$$(2) \int_{C_1+C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz,$$

$$(3) \int_C z_0 f(z) dz = z_0 \int_C f(z) dz,$$

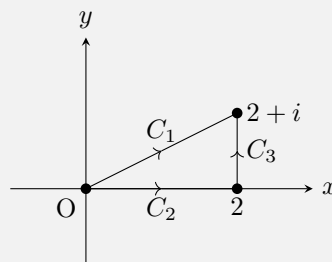
$$(4) \int_C \{f(z) + g(z)\} dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz,$$

$$(5) \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \leq ML \quad (|f(z)| \leq M, L = \int_C |dz|).$$

ただし, $\int_C f(z) |dz| = \int_a^b f(z(t)) |z'(t)| dt$ と定義する.

e.g. 5.10

以下のような曲線 C_1, C_2, C_3 を考える.



このとき,

$$C_1 : z(t) = 2t + it \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$$C_2 : z(t) = 2t \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$$C_3 : z(t) = 2 + it \quad (0 \leq t \leq 1).$$

と表せる. これらの曲線上で $f(z) = z^2$ を積分すると,

$$\begin{aligned}\int_{C_1} f(z) dz &= \int_0^1 (2t + it)^2 (2 + i) dt \\ &= (2 + i)^3 \int_0^1 t^2 dt \\ &= \frac{2}{3} + i \frac{11}{3}, \\ \int_{C_2} f(z) dz &= \int_0^1 (2t)^2 2 dt \\ &= \frac{8}{3}, \\ \int_{C_3} f(z) dz &= \int_0^1 (2 + it)^2 i dt \\ &= i \int_0^1 (4 + 4it - t^2) dt \\ &= i \left(4 + 2i - \frac{1}{3} \right) = -2 + i \frac{11}{3}.\end{aligned}$$

となる. これから, $\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz + \int_{C_3} f(z) dz$ が成り立つことがわかる.

e.g. 5.11 (円上の積分)

$C_R : z(\theta) = \alpha + Re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) と $m \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\int_{C_R} (z - \alpha)^m dz = \begin{cases} 0 & m \neq -1, \\ 2\pi i & m = -1. \end{cases}$$

が成り立つ. 実際には, $z'(\theta) = iRe^{i\theta}$ であり, $m \neq -1$ のとき,

$$\begin{aligned}\int_{C_R} (z - \alpha)^m dz &= \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^m iRe^{i\theta} d\theta \\ &= iR^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{(m+1)i\theta} d\theta \\ &= iR^{m+1} \left(\int_0^{2\pi} \{\cos(m+1)t + i \sin(m+1)t\} dt \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

であり, $m = -1$ のとき,

$$\begin{aligned}\int_{C_R} (z - \alpha)^{-1} dz &= \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^{-1} iRe^{i\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} i dz = 2\pi i\end{aligned}$$

となる.

2つの例では、経路によって積分の結果が変わらなかつたり、円上での積分の値が半径によらずに0になったりした。これらは複素積分における非常に興味深い結果であるが、これらの結果が偶然起こったわけではないことを証明する。その準備として、次の定理を経由する。

Thm. 5.12 (Green の定理)

xy 平面上の区分的になめらかな単純閉曲線 C で囲まれた閉集合 (境界を含む領域) R 上で、実数値関数 $P(x, y), Q(x, y)$ が連続、1 階偏導関数 P_x, P_y, Q_x, Q_y もそれぞれ連続だと仮定する。また、 C は正の向きで考える。

このとき、

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_R (Q_x - P_y) dx dy$$

が成り立つ。

Thm. 5.13 (Cauchy の積分定理)

区分的になめらかな単純閉曲線 C 上と C の内部 R で $f(z)$ が正則、 $f'(z)$ が連続ならば、

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

Proof. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とおくと、

$$\int_C f(z) dz = \int_C udx - vdy + i \int_C vdx + udy$$

である。

Thm. 2.11 より、 u, v は C の内部 R で連続であり、Thm. 3.4 と Thm. 2.11 より 1 階偏導関数 u_x, u_y, v_x, v_y は R で連続であるから、Green の定理より、

$$\int_C udx - vdy + i \int_C vdx + udy = \iint_R -(v_x + u_y) dx dy + \iint_R (u_x - v_y) dx dy$$

となるが、 $f(z)$ は正則であるから Thm. 3.4 より、

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

が成り立つので、右辺は 0. □

実は、仮定の「 $f'(z)$ が連続」を外すことができる。すると上のような証明はできず、またその証明は複雑なので省略する。

Thm. 5.14

区分的になめらかな単純閉曲線 C 上と C の内部 R で $f(z)$ が正則ならば、

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

e.g. 5.15

$f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ は整関数なので, 区分的になめらかな単純閉曲線 C 上で,

$$\int_C z^n dz = 0.$$

e.g. 5.10 をもう一度見てみよう. 曲線 $-C_1 + C_2 + C_3$ は単純閉曲線であり, その上と内部で $f(z) = z^2$ は整関数であるから,

$$\int_{-C_1+C_2+C_3} f(z) dz = 0$$

が成り立つ. よって,

$$\int_{C_2+C_3} f(z) dz = - \int_{-C_1} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz$$

が成り立つのである.

これは, 積分経路を折線 (複雑) から直線 (単純) へと変更できたことになる. これを定式化しておこう.

Def. 5.16

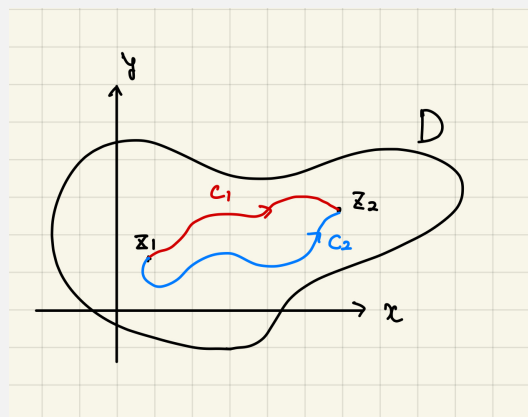
D 内の任意の単純閉曲線 C の内部が D に含まれるとき, D は単連結であるという. ある単純閉曲線の周と内部からなる集合は, 単連結である.

Prop. 5.17 (積分経路の変更①)

D を単連結な集合とし, $f(z)$ は D 上で正則とする. このとき, D の 2 点を結ぶ 2 つの区分的なめらかな曲線を C_1, C_2 とすると,

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

が成り立つ.



さらに, Prop. 5.17 の仮定を満たさない図のような領域の場合でも, 積分経路を変更することができる.

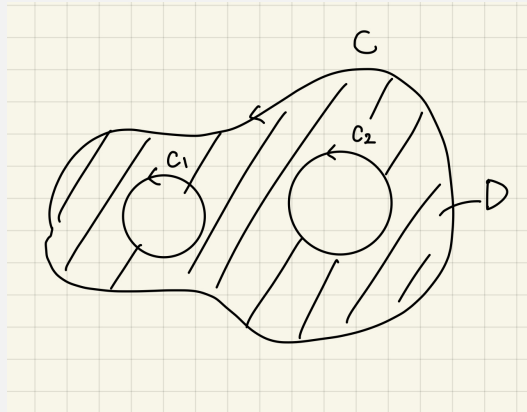
Prop. 5.18 (積分経路の変更②)

C, C_1, \dots, C_n はすべて区分的になめらかな単純閉曲線で, C_1, \dots, C_n はすべて C の内部にあり, $i \neq j$ なら C_i と C_j の内部は交わらないとする. さらに, D を, C の内部から C_1, \dots, C_n の内部を除いた部分と, C 上の点からなる集合とする.

このとき, $f(z)$ が D で正則ならば,

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz$$

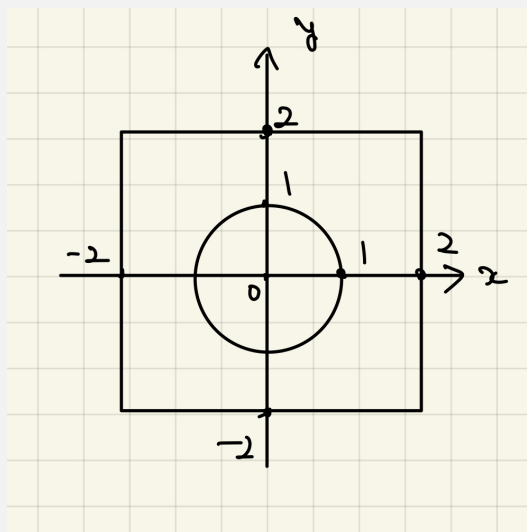
が成り立つ.



e.g. 5.19

$C_1 : |z| = 1$, C_2 : 図の正方形, とする. $f(z) = \frac{1}{z^2(z^2+9)}$ は, C_2 の内部から C_1 の内部を除いた領域で正則 (特異点は $z = 0, \pm 3i$) なので,

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$



e.g. 5.20 (基本公式)

(1) 任意の単純閉曲線 C に対して,

$$\int_C \frac{1}{z - \alpha} dz = \begin{cases} 0 & \alpha \text{ が } C \text{ の外部にある,} \\ 2\pi i & \alpha \text{ が } C \text{ の内部にある.} \end{cases}$$

(2) $C: i + e^{i\theta}$ に対して,

$$I = \int_C \frac{1}{z^2 + 2} dz$$

を求める. まず,

$$\frac{1}{z^2 + 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}i} \left(\frac{1}{z - \sqrt{2}i} - \frac{1}{z + \sqrt{2}i} \right)$$

であり, $\sqrt{2}i$ は C の内部にあり, $-\sqrt{2}i$ は C の外部にあるので,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\sqrt{2}i} \left(\int_C \frac{1}{z - \sqrt{2}i} dz - \int_C \frac{1}{z + \sqrt{2}i} dz \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}i} (2\pi i - 0) \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

5.2 原始関数

領域 D 上の連続関数 $f(z)$ に対して, D の各点で

$$F'(z) = f(z)$$

となるような D で正則な関数 $F(z)$ を, $f(z)$ の原始関数という.

Thm. 5.21

$f(z)$ は D で連続, $F(z)$ が $f(z)$ の原始関数であるとき, D 内の区分的になめらかな曲線 $C: z = z(t)$ ($a \leq t \leq b$) の上での線積分は,

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt = F(z(b)) - F(z(a))$$

と計算できる.

Proof. C は区分的になめらかであるから, なめらかな部分ごとに定理を示せばよく, C は初めからなめらかとして考える. まず,

$$\frac{d}{dt} F(z(t)) = f(z(t))z'(t)$$

を示す. $F(x, y) = U(x, y) + iV(x, y)$, $z(t) = x(t) + iy(t)$ とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(z(t)) &= \frac{d}{dt}U(x(t), y(t)) + i\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) \\ &= U_x x' + U_y y' + i(V_x x' + V_y y') \\ &= U_x x' - V_x y' + i(V_x x' + U_x y') \\ &= (x' + iy')U_x + i(x' + iy')V_x = f(z(t))z'(t), \end{aligned}$$

が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(z(t))z'(t) dt &= \int_a^b \frac{d}{dt}F(z(t)) dt \\ &= \int_a^b \{\operatorname{Re} F(z(t))\}' dt + i \int_a^b \{\operatorname{Im} F(z(t))\}' dt \\ &= \operatorname{Re}\{F(z(b)) - F(z(a))\} + i \operatorname{Im}\{F(z(b)) - F(z(a))\} = F(z(b)) - F(z(a)). \end{aligned}$$

□

これは, 連続で原始関数をもつ複素関数の線積分が積分経路の取り方によらないこと, すなわち, 始点 z_1 と終点 z_2 のみによってもとまることを表している:

$$\int_C f(z) dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1).$$

また, z_0 を D の定点として, 積分経路が常に D 上にあるとすると,

$$\int_{z_0}^z f(w) dw$$

は D で定義される z の関数であり, $f(z)$ の原始関数である. これは, 実関数の微分積分学の基本定理の複素関数版といえる.

Thm. 5.22

(1) $f(z)$ が領域 D で連続, 定点 z_0 と z を結ぶ積分経路 C が D 内にあり, 積分の値が経路 C によらないとき,

$$\frac{d}{dz} \int_{z_0}^z f(s) ds = f(z).$$

(2) 領域 D で連続な関数 $f(z)$ の線積分の値が D 内部の積分経路に無関係に定まるならば, $f(z)$ は D で原始関数をもつ.

(3) 単連結な集合 D 上で正則な関数は, Prop. 5.17 から積分の値が始点と終点のみで決まるので, D で原始関数をもつ.

Proof. (1) を示せば (2), (3) が従うので, (1) を示す.

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(s) ds$$

とおくと, 十分小さい $|\Delta z|$ に対して, z と $z + \Delta z$ が D 内で結べる. z はこの領域内で 1 の原始関数であるから,

$$\int_z^{z+\Delta z} ds = \Delta z,$$

$$\therefore f(z) = f(z) \cdot 1 = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z) ds$$

が成り立つ。また,

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s) ds - \int_{z_0}^z f(s) ds = \int_z^{z+\Delta z} f(s) ds$$

である。ここで、 f の連続性より,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |s - z| < \delta \implies |f(s) - f(z)|, \varepsilon$$

が成り立つので、 $|\Delta z| < \delta$ とすれば,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| &< \left| \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(s) ds - \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z) ds \right| \\ &= \left| \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} \{f(s) - f(z)\} ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} |f(s) - f(z)| |ds| \\ &< \varepsilon \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} |ds| \end{aligned}$$

となるので,

$$\frac{d}{dz} \int_{z_0}^z f(s) ds = f(z).$$

□

Thm. 5.23

$F(z), G(z)$ が D で正則であるとする,

$$F'(z) = G'(z) = f(z) \implies F(z) - G(z) \text{ は定数.}$$

5.3 Cauchy の微積分公式

Thm. 5.24 (Cauchy の積分公式)

区分的になめらかな単純閉曲線 C の上と内部で $f(z)$ は正則であるとする。 C 内の任意の z_0 に対して,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

が成り立つ。

式を,

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

とかくと、積分計算に利用できる。

e.g. 5.25

$C: |z| = 2$ とする.

(1) $f(z) = \frac{z}{9-z^2}$ は C の上と内部で正則である. $z_0 = -i$ はこの内部の点であるから,

$$\int_C \frac{z}{(9-z^2)(z+i)} dz = \int_C \frac{f(z)}{z-(-i)} dz = 2\pi i f(-i) = \frac{\pi}{5}$$

と, 線積分や原始関数の計算をせずに積分の値を求めることができる.

(2) $f(z) = \frac{z^2}{z-i}$ とすると, i は C の内部に含まれるので,

$$\int_C f(z) dz = \int_C \frac{z^2}{z-i} dz = 2\pi i (i)^2 = -2\pi i.$$

(3) $f(z) = \frac{e^z}{z^2-4z+3}$ とすると, 分母を 0 にする $z = 1$ は C に含まれる. $g(z) = \frac{e^z}{z-3}$ とすると, $g(z)$ は C の内部で正則で,

$$\int_C f(z) dz = \int_C \frac{g(z)}{z-1} dz = 2\pi i g(1) = -e\pi i$$

Proof. $f(z)$ は z_0 で連続なので,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

が成り立つ. $C_0: |z - z_0| = \rho, \rho < \delta$ とすると, C_0 上で, $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ が成り立つ. C の内部 $\setminus \{z_0\}$ と C 上で, $\frac{f(z)}{z - z_0}$ は正則なので, Prop. 5.18 より,

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

が成り立つから,

$$\begin{aligned} \left| \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| &= \left| \int_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \int_{C_0} \frac{1}{z - z_0} dz \right| \\ &= \left| \int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \\ &\leq \int_{C_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} |dz| < \frac{\varepsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon \end{aligned}$$

となって示された. □

Cauchy の積分定理は 次の形で拡張することができる.

Thm. 5.26 (Cauchy の微積分公式)

D を区分的になめらかな単純閉曲線 C で囲まれた領域とする.

このとき, $f(z)$ が D で正則ならば, $f'(z), f''(z), \dots$ も正則であり, n 階導関数は,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

で与えられる.

これも,

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

とかけば積分計算に利用できる. 証明は省略する (n の帰納法で示せる).

e.g. 5.27

z_0 を, 区分的になめらかな単純閉曲線 C の内部の点とする. $f(z) = 1$ は正則で, $f^{(n)}(z_0) = 0, n = 1, 2, \dots$ であるから, $n = 1, 2, \dots$ に対して,

$$\int_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} dz = 0$$

が成り立つ.

(2) $C: |z-i| = 2$ として,

$$I = \int_C \frac{1}{(z^2+4)^2} dz$$

を求める. まず,

$$\frac{1}{(z^2+4)^2} = \frac{1}{(z-2i)^2(z+2i)^2}$$

であり, $2i$ は C の内部に含まれる. $f(z) = (z+2i)^{-2}$ とおいて, Thm. 5.26 で $n = 1, z_0 = 2i$ とすれば,

$$I = \int_C \frac{f(z)}{(z-2i)^2} dz = \frac{2\pi i}{1} f'(2i) = 2\pi i(-2)(4i)^{-3} = \frac{\pi}{16}.$$

6 Laurent 級数展開

6.1 Taylor 級数展開

Def. 6.1 (複素数列の極限)

複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |z_n - z| < \varepsilon$$

をみたすとき, 数列 $\{z_n\}$ は z に収束するといい, $z_n \rightarrow z (n \rightarrow \infty)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ とかく. 数列が収束しないとき, 発散するという.

Prop. 6.2

極限が存在すれば, ただひとつである.

Prop. 6.3

$z_n = x_n + iy_n$ ($n = 1, 2, \dots$), $z = x + iy$ とするとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

が成り立つ.

e.g. 6.4

$z_n = -2 + i \frac{(-1)^n}{n^2}$ とおくと, $x_n = -2, y_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ であり, $x_n \rightarrow -2, y_n \rightarrow 0$ であるから, $z_n \rightarrow -2$.

Def. 6.5

複素数の級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots$$

が S に収束するとは, 第 N 部分和

$$S_N = \sum_{n=1}^N z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_N$$

がつくる数列 $\{S_N\}$ が S に収束することをいう. S をこの級数の和という. 級数の和が存在する場合もただひとつであり, $\{S_N\}$ が発散するとき級数は発散するという.

Prop. 6.6

級数が収束するための必要十分条件は, $\rho_N = S - S_N$ が 0 に収束することである.

Def. 6.7

複素数 z_0 と複素数列 $\{a_n\}$ に対して,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots + a_n (z - z_0)^n + \dots$$

という形をした級数を, べき級数という.

Thm. 6.8

領域 $D: |z - z_0| < R$ の各点 z で収束するべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ は, D で連続である.

Proof. $\varepsilon > 0$ を任意にとる. $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $S_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n(z - z_0)^n$ とおくと,

$$|S(z) - S(w)| \leq |S(z) - S_N(z)| + |S_N(z) - S_N(w)| + |S_N(w) - S(w)|$$

となる. S_N の収束性より, 十分大きい N に対して,

$$|S(z) - S_N(z)| < \varepsilon, |S_N(w) - S(w)| < \varepsilon$$

が成り立つ. また, $S_N(z)$ は連続なので, 十分小さい δ に対して,

$$|z - w| < \delta \implies |S_N(z) - S_N(w)| < \varepsilon$$

が成り立つ. よって,

$$|z - w| < \delta \implies |S(z) - S(w)| < 3\varepsilon$$

となって連続. □

e.g. 6.9

$1 + z + \dots + z^N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$ である.

$$S_N = \sum_{n=0}^N z^n, S = \frac{1}{1 - z}$$

とおくと, $\rho_N = S - S_N = \frac{z^{N+1}}{1 - z}$ であるから,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N = 0 \iff |z| < 1$$

となる. したがって, べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ は $D: |z| < 1$ で収束して, 和 $\frac{1}{1 - z}$ は D で連続である.

Thm. 6.10 (Taylor の定理)

中心 z_0 , 半径が R の円 C の内部で関数 $f(z)$ が正則であるとき, C 内の点 z において,

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots$$

という形のべき級数に展開できる. すなわち, 右辺の和は $|z - z_0| < R$ で $f(z)$ に収束する. このべき級数を, $f(z)$ の Taylor 級数展開という.

e.g. 6.11

(1) $f(z) = e^z$ は整関数であるから, 任意の z に対して Taylor 級数は収束する. $f^{(n)}(z) = e^z$ であるから, $z_0 = 0$ に対して,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, (|z| < \infty)$$

と, Taylor 級数展開できる.

(2) $g(z) = \sin z$ とおくと, $g^{(2n)}(0) = 0, g^{(2n+1)}(0) = (-1)^n (n = 0, 1, \dots)$ であるから,

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

と Taylor 級数展開できる.

(3) $(\sin z)' = \cos z$ であるから, (2) の級数を項別に微分して,

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

を得る. 収束するべき級数は, 収束円内で項別に微分できる.

(4) $f(z) = \frac{1}{1-z}$ とおくと, $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$ であるから, $f^{(n)}(0) = n!$ である. よって,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1)$$

である.

(5) (4) で, $z \rightarrow -z$ とおくと, $|-z| < 1$ であるから,

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad (|z| < 1)$$

である.

(6) (4) で, $z \rightarrow z^2$ とおくと, $|z^2| < 1$ であるから,

$$\frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}, \quad (|z| < 1)$$

である.

また,

$$\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \{(-1)^n z^n + z^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$$

とも計算できる.

6.2 Laurent 級数展開

$f(z) = \frac{1+2z}{z^2+z^3}$ を級数展開してみよう.

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1+2z}{1+z} = \frac{1}{z^2} \left(2 - \frac{1}{1+z} \right)$$

と変形できる. $z = 0$ で Taylor 級数展開することはできないが, $\frac{1}{1+z}$ を $0 < |z| < 1$ で級数展開すると,

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \{2 - (1 - z + z^2 - z^3 + \dots)\} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + z^3 - \dots$$

と展開することができる. 上の $f(z)$ は $z_0 = 0$ では正則でないため Taylor の定理を適用できないが, $z - z_0$ の正べきと負べきの項がでてくるような級数で表すことができる.

Thm. 6.12 (Laurent の定理)

点 z_0 を中心とする半径 R_1, R_2 の同心円をそれぞれ C_1, C_2 とする. $f(z)$ が, C_1, C_2 の上と 2 つの円で囲まれる円環領域で正則であるとき, この円環領域の中の任意の点 z において, $f(z)$ は,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (R_2 < |z - z_0| < R_1)$$

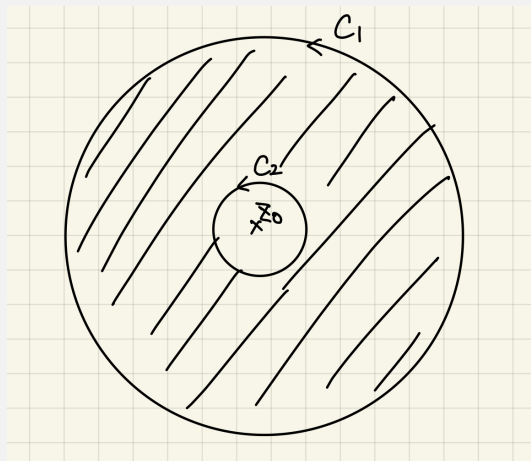
という級数で表される. ここで,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (n = 0, 1, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz \quad (n = 1, 2, \dots).$$

である.

この形の級数を, Laurent 級数という. z の負べきの部分を, 主要部という.



e.g. 6.13

(1) $f(z) = \frac{1}{4z - z^2}$ は, $0 < |z| < 4$ で,

$$\frac{1}{4z - z^2} = \frac{1}{4z} \left(1 + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{4^2} + \dots\right) = \frac{1}{4z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+2}}$$

と Laurent 級数展開できる.

(2) $1 < |z| < \infty$ のとき, $1/|z| < 1$ であるから,

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z} \frac{1}{1+1/z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$$

と, Laurent 級数展開できる.

(3) $z \neq 0$ のとき,

$$\frac{\sin z^2}{z^4} = \frac{1}{z^4} \left(z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} + \cdots \right) = \frac{1}{z^2} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^6}{5!}$$

と, Laurent 級数展開できる.

(4) $0 < |z-1| < 2$ のとき,

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z-1)(z-3)} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{3}{z-3} \right) = -\frac{1}{2(z-1)} + \frac{3}{2} \frac{1}{1-(z-1)/2} \\ &= -\frac{1}{2(z-1)} + \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^n} \\ &= -\frac{1}{2(z-1)} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

と, Laurent 級数展開できる.

6.3 べき級数の性質

Def. 6.14 (収束半径)

べき級数

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

が, $|z| < R$ の各点で収束し, その和が $S(z)$ となるような R のうち最大のものを, 収束半径という. 収束半径は, 係数 $\{a_n\}$ に注目して求められる.

$$\text{収束半径} = \begin{cases} \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \end{cases}$$

である. 半径が収束半径の円を, 収束円という.

Thm. 6.15

C をべき級数の収束円の内部にある区分的になめらかで, 長さが有限の単純閉曲線として, $g(z)$ を C

上で連続な関数とする。このとき、

$$\int_C g(z) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(z) z^n dz$$

が成り立つ。

Thm. 6.16 (項別微分)

べき級数は収束円内の各点で項別微分可能で、 $S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ が成り立つ。

Thm. 6.17 (Taylor 級数の一意性)

べき級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

が、円 $|z - z_0| = R$ の内部のすべての点で $f(z)$ に収束するならば、これは $f(z)$ の Taylor 級数展開であり、

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が成り立つ。

Thm. 6.18 (Laurent 級数の一意性)

べき級数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

が z_0 のまわりの円環領域のすべての点で $f(z)$ に収束するならば、これは $f(z)$ の Laurent 級数展開である。

7 極と留数

7.1 留数

Def. 7.1 (孤立特異点)

z_0 を $f(z)$ の特異点とする。 z_0 のある近傍をとると、その近傍内の z_0 以外の点では $f(z)$ が正則であるとき、 z_0 を孤立特異点という。

e.g. 7.2

- (1) $f(z) = \frac{1}{z}$ は $z = 0$ 以外の点で正則なので, $z = 0$ は $f(z)$ の孤立特異点.
- (2) $f(z) = \frac{z+1}{z^3(z^2+1)}$ は, 3つの孤立特異点 $z = 0, i, -i$ をもつ.
- (3) $z = 0$ は $\text{Log } z$ の特異点であるが, 孤立特異点ではない. なぜならば, 原点の任意の近傍は負の実軸を含み, 負の実軸は $\text{Log } z$ の特異点であるからである.
- (4) $f(z) = \frac{1}{\sin \pi/z}$ の特異点は, $z = 0, 1/n (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$ である. $z = 1/n$ は孤立特異点であるが, $z = 0$ は孤立特異点ではない. なぜならば, 原点の任意の近傍には $z = 1/n$ の形の特異点が無限個含まれるからである.

点 z_0 が関数 $f(z)$ の孤立特異点であるならば, ある R に対して, $0 < |z - z_0| < R$ で $f(z)$ は正則になるので, この穴あき円盤の内部で Laurent 展開できる.

Def. 7.3 (留数)

上の設定で, C を $0 < |z - z_0| < R$ の内部にある単純閉曲線とすると,

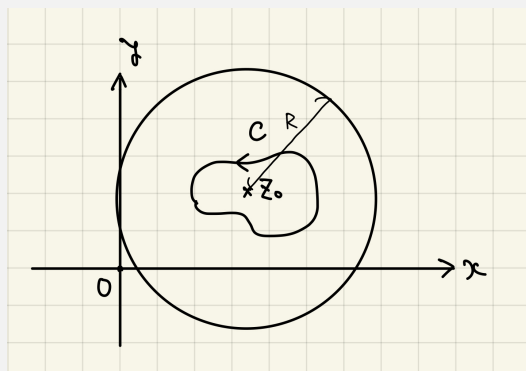
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz$$

と Laurent 級数展開できる. $n = 1$ として,

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

を, $f(z)$ の z_0 における留数という.



最後の式を,

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i b_1$$

と書けば, 積分計算が留数の計算で済んでしまうことがわかる.

e.g. 7.4

(1) $C : |z| = 2$, $f(z) = \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}$ とする. 孤立特異点 $z = 1$ を中心に Laurent 展開すると,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{e} \frac{e^{-(z-1)}}{(z-1)^2} \\ &= \frac{1}{e} \frac{1}{(z-1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^{n-2}}{n!} \\ &= \frac{1}{e} \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{e} \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2e} + \dots \end{aligned}$$

となるので, $b_1 = \frac{-1}{e}$ であり,

$$\int_C f(z) dz = -\frac{2\pi i}{e}.$$

(2) $C : |z| = 2$, $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ とする. 孤立特異点 $z = 0$ を中心に Laurent 展開すると,

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$$

となるので, $b_1 = 1$ であり,

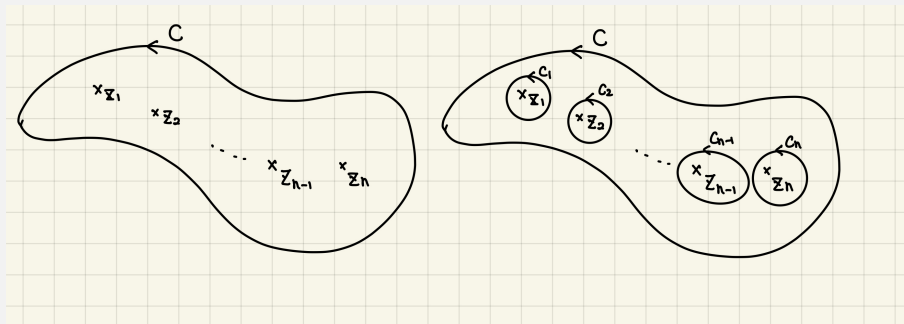
$$\int_C f(z) dz = 2\pi i.$$

Thm. 7.5 (留数定理)

C を単純閉曲線として, $f(z)$ は C の内部にある有限個の点 z_1, \dots, z_n を除いて正則であるとする. 各特異点 z_i における留数を $\text{Res}(z_i)$ とすると,

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \{ \text{Res}(z_1) + \dots + \text{Res}(z_n) \}$$

が成り立つ.



さて、複素積分の値が、関数 $f(z)$ の留数の値を調べることによってわかることがわかった。すなわち、 $f(z)$ をある穴空き円板上で Laurent 級数展開することで、積分の値を求められるということである。ここでは、Laurent 級数の主要部 (負べきの部分) を見てみる。

Def. 7.6 (特異点の種類)

(1) [m 位の極]

$f(z)$ の Laurent 級数展開が、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} \quad (b_m \neq 0, 0 < |z - z_0| < R)$$

の形のとき、 z_0 は位数 m の極、 m 位の極という。負べきの項は $-m$ 次までしかなく、 b_m 以外は 0 でもよい。

(2) [真性特異点]

z_0 における Laurent 展開の主要部が無数個の項を含むとき、 z_0 は真性特異点という。

(3) [除去可能な特異点]

$z = z_0$ で定義されないが、 z_0 における Laurent 展開の主要部が存在しないとき、 z_0 は除去可能な特異点という。 z_0 における値を a_0 と定めれば、 z_0 は特異点ではなくなる。

e.g. 7.7

(1) $\frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} + \cdots$ に対して、 $z = 0$ は 3 位の極で、 $\text{Res}(0) = \frac{1}{6}$ である。

(2) $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$ に対して、 $z = 0$ は真性特異点である。

(3) $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ は $z = 0$ で定義されないが、Laurent 級数展開は、

$$f(z) = \frac{1}{z} \left\{ \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots \right) - 1 \right\} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots$$

であるから、 $z = 0$ は除去可能な特異点である。

Thm. 7.8 (留数の求め方)

(1) [1 位の極]

z_0 が $f(z)$ の 1 位の極のとき、

$$\text{Res}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

(2) [m 位の極]

z_0 が $f(z)$ の m 位の極のとき、

$$\text{Res}(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z - z_0)^m f(z)\}.$$

Proof. (2) で $m = 1$ とすれば (1) を得るので, (2) を示す.

$f(z)$ の z_0 における Laurent 級数は,

$$f(z) = \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \frac{b_{m-2}}{(z - z_0)^{m-2}} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

である. 両辺に $(z - z_0)^m$ をかけて $m - 1$ 回微分すると,

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z - z_0)^m f(z)\} = (m - 1)! b_1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + m)(n + m - 1) \cdots (n + 2)(z - z_0)^{n+1}$$

となるから, この式で $z \rightarrow z_0$ とすれば, 右辺 $\rightarrow (m - 1)! b_1$. □

Thm. 7.9 (分数関数の留数の求め方)

$f(z)$ が $z = z_0$ で 1 位の極をもち,

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad p(z_0) \neq 0, \quad q(z_0) = 0, \quad q'(z_0) \neq 0$$

であるとする,

$$\operatorname{Res}(z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

が成り立つ.

Proof. $q(z) = (z - z_0)r(z)$, $r(z_0) \neq 0$ とかけるので,

$$f(z) = \frac{p(z)}{(z - z_0)r(z)}$$

で,

$$\operatorname{Res}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{p(z_0)}{r(z_0)}$$

となる.

また, $q'(z) = r(z) + (z - z_0)r'(z)$ となるから, $q'(z_0) = r(z_0)$ を代入すればよい. □

e.g. 7.10

(1) $f(z) = \frac{z + 1}{z^2 + 9}$ の留数を求める. 特異点は, $z = \pm 3i$ であり,

$$\operatorname{Res}(3i) = \frac{z + 1}{(z^2 + 9)'} \Big|_{z=3i} = \frac{3i + 1}{6i} = \frac{3 - i}{6}$$

$$\operatorname{Res}(-3i) = \frac{z + 1}{(z^2 + 9)'} \Big|_{z=-3i} = \frac{-3i + 1}{-6i} = \frac{3 + i}{6}.$$

である.

(2) $f(z) = \frac{z}{z^4 + 4}$ の留数を求める. $z_0 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ は, 位数 1 の特異点である.

$$\operatorname{Res}(z_0) = \frac{z}{(z^4 + 4)'} \Big|_{z=z_0} = \frac{z_0}{4z_0^3} = \frac{1}{8i} = -\frac{i}{8}.$$

他の特異点における留数も同様に求められる.

(3) $f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ の留数を求める. $f(z)$ の特異点は, $\sin z$ の零点である $z_n = \pm n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) である. $\cos z_n \neq 0$, $(\sin z)'|_{z=z_n} \neq 0$ であるから, z_n は 1 位の極なので,

$$\text{Res}(z_n) = \frac{\cos n\pi}{\cos n\pi} = 1$$

である.

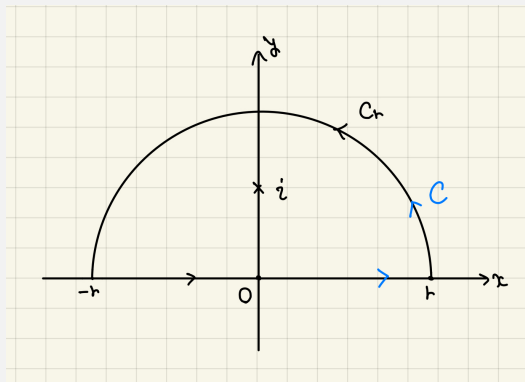
7.2 実積分への応用

e.g. 7.11 (原始関数がダルイ積分①)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

というよく知られた結果を考えよう.

実軸上の線分 $[-r, r]$ と, 原点を中心とする上半円 $C_r : |z| = r > 1$ によって与えられる単純閉曲線 C を考える.



$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ とおくと, C の内部にある特異点は i のみで, 留数定理により,

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(i)$$

が成り立つ. Thm. 7.9 を用いて, $\text{Res}(i) = \frac{1}{2i}$ と計算できるから, $2\pi i \text{Res}(i) = \pi$ となる.

また,

$$\int_C f(z) dz = \int_{-r}^r f(x) dx + \int_{C_r} f(z) dz$$

とかけるから, この式で $r \rightarrow \infty$ とすれば,

$$\pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} f(z) dz$$

が得られる. あとは, 最後の項が 0 に収束することを示せばよい.

さて, 三角不等式により, C_r 上で

$$|z^2 + 1| \geq |z|^2 - 1 = r^2 - 1$$

が成り立つから,

$$\left| \int_{C_r} f(z) dz \right| \leq \int_{C_r} \frac{1}{|z^2 + 1|} |dz| \leq \frac{1}{r^2 - 1} (C \text{ の長さ}) = \frac{\pi r}{r^2 - 1} \rightarrow 0 (r \rightarrow \infty)$$

となる. 以上より,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

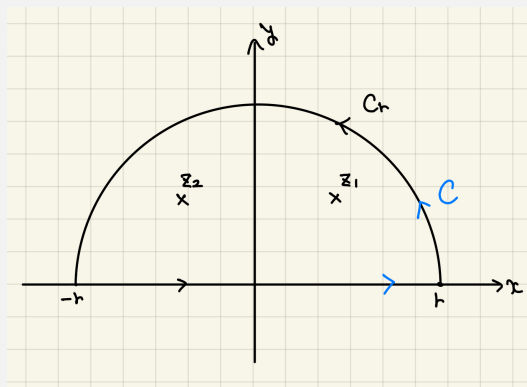
を得る.

e.g. 7.12 (原始関数がダルイ積分②)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

を示す.

実軸上の線分 $[-r, r]$ と, 原点を中心とする上半円 $C_r : |z| = r > 1$ によって与えられる単純閉曲線 C を考える.



$f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ とおくと, C の内部にある特異点は $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ であるから, 留数定理により,

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(z_1) + \text{Res}(z_2))$$

が成り立つ. Thm. 7.9 を用いて, $\text{Res}(z_1) = \frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}}$, $\text{Res}(z_2) = \frac{1}{4e^{i\frac{9\pi}{4}}}$ と計算できるから,

$$2\pi i (\text{Res}(z_1) + \text{Res}(z_2)) = 2\pi i \left(\frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} + \frac{1}{4e^{i\frac{9\pi}{4}}} \right) = \frac{2\pi i}{-4} \left(-e^{i\frac{-\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{2\pi i}{2i} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

である。さて、三角不等式により、 C_r 上で

$$|z^4 + 1| \geq |z|^4 - 1 = r^4 - 1$$

が成り立つから、

$$\left| \int_{C_r} f(z) dz \right| \leq \int_{C_r} \frac{1}{|z^4 + 1|} |dz| \leq \frac{1}{r^4 - 1} (C \text{ の長さ}) = \frac{\pi r}{r^4 - 1} \rightarrow 0 (r \rightarrow \infty)$$

となる。以上より、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

を得る。

この形の積分を一般化しておこう。

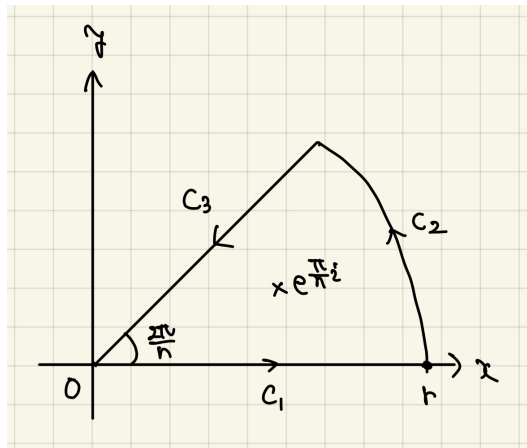
Thm. 7.13 (一般化)

自然数 n に対して、

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$$

が成り立つ。

Proof. $n = 2, 4$ のときは示した。 n が奇数のときは、実軸上に特異点が存在するので、上の例のような積分経路は使えない。そこで、 C_1, C_2, C_3 を次のように考えて、それらの和を C とする。



$$\int_C \frac{1}{1+z^n} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(e^{i\frac{\pi}{n}}) = 2\pi i \frac{1}{ne^{i\frac{(n-1)\pi}{n}}} = 2\pi i \frac{1}{-ne^{-i\frac{\pi}{n}}} \quad (7.1)$$

である。

$$\left| \int_{C_2} \frac{1}{1+z^n} dz \right| \leq \int_{C_2} \frac{1}{|1+z^n|} |dz| \leq \frac{2\pi r}{n} \frac{1}{r^n - 1} \rightarrow 0 (r \rightarrow \infty)$$

である。次に、 $z = -se^{i\frac{2\pi}{n}}$, $-r \leq s \leq 0$ とおくと、

$$\int_{C_3} f(z) dz = \int_{-r}^0 \frac{1}{(-s)^n + 1} (-e^{i\frac{2\pi}{n}} ds) = (-e^{i\frac{2\pi}{n}}) \int_0^r \frac{1}{1+x^n} dx$$

である。以上より、(7.1) で $r \rightarrow \infty$ として、

$$(1 - e^{i\frac{2\pi}{n}})I = 2\pi i \frac{1}{-ne^{-i\frac{\pi}{n}}}$$

$$\therefore I = \frac{2\pi i}{-n} \frac{1}{e^{-i\frac{\pi}{n}} - e^{i\frac{\pi}{n}}} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}.$$

□

次は、 $f(x) = p(x) \cos x$, $g(x) = q(x) \sin x$ のような、被積分関数に三角関数を含むような積分を考える。積分区間が $(-\infty, \infty)$ のものは Fourier 積分を考える際にあらわれる形であり、複素積分を用いてその値を求めることができる。

e.g. 7.14 (三角関数が入ってる積分①)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}$$

を示す。実軸上では、被積分関数が $\operatorname{Re} \frac{e^{iz}}{1+z^2}$ であることに注目して、 $\frac{e^{iz}}{1+z^2}$ を積分したあとに実部を比較すればよい。

下の図のように C_1, C_2 をとると、留数定理より、

$$\int_{C_1+C_2} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(i) = \frac{\pi}{e}$$

である。

$z = x + iy$ が C_2 上にあるとき、

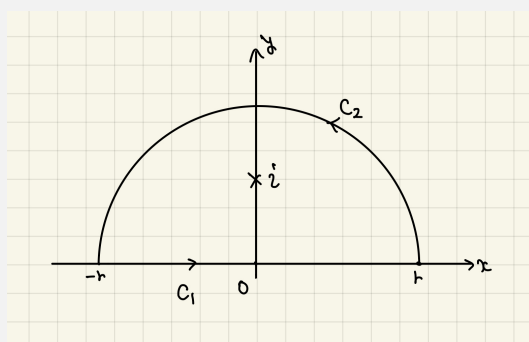
$$|e^{iz}| = |e^{ix-y}| = e^{-y} \leq 1, |1+z^2| \geq r^2 - 1$$

であるから、

$$\left| \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz \right| \leq \int_{C_2} |dz| \frac{1}{r^2 - 1} = \frac{\pi r}{r^2 - 1} \rightarrow 0 (r \rightarrow \infty).$$

以上より、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}.$$



似たような積分だが、同じ方法ではうまくいかないこともある。

e.g. 7.15 (三角関数が入ってる積分②)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} = \frac{\pi}{e}$$

を示す. 実軸上では, 被積分関数が $\text{Im} \frac{ze^{iz}}{1+z^2}$ であることに注目して, $\frac{ze^{iz}}{1+z^2}$ を積分したあとに虚部を比較すればよい. 積分経路は前の例と同じであるとして, 留数定理により,

$$\int_{C_1+C_2} \frac{ze^{iz}}{1+z^2} dz = 2\pi i \text{Res}(i) = i \frac{\pi}{e}$$

である.

あとは, 上と同じように C_2 上の積分が $r \rightarrow \infty$ で 0 に収束することを示せばよいが, 今までのやり方では,

$$\left| \int_{C_2} \frac{ze^{iz}}{1+z^2} dz \right| \leq \int_{C_2} |dz| \frac{r}{r^2-1} = \frac{\pi r^2}{r^2-1}$$

となってしまう. そこで, C_2 上での $|e^{iz}|$ を少し計算してみると,

$$|e^{iz}| = |e^{-r \sin \theta + ir \cos \theta}| = e^{-r \sin \theta}$$

となることがわかるので, より厳しい評価

$$\left| \int_{C_2} \frac{ze^{iz}}{1+z^2} dz \right| \leq \int_{C_2} \frac{r e^{-r \sin \theta}}{r^2-1} |dz|$$

を得る. $z = r e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ とおくと, $|dz| = |i r e^{i\theta}| d\theta = r d\theta$ であるから

$$\int_{C_2} \frac{r e^{-r \sin \theta}}{r^2-1} |dz| = \frac{r^2}{r^2-1} \int_0^\pi e^{-r \sin \theta} d\theta$$

となる. あとは, 後ろの積分を評価すればよいが, $[0, \pi]$ において, $\sin \theta$ が $\theta = \frac{\pi}{2}$ に関して対称であることと, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ において $\frac{2}{\pi} \theta \leq \sin \theta$ であることを用いると,

$$\int_0^\pi e^{-r \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin \theta} d\theta \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \frac{2}{\pi} \theta} d\theta = \frac{\pi}{r} (1 - e^{-r}) < \frac{\pi}{r}$$

となる. これを用いれば,

$$\left| \int_{C_2} \frac{ze^{iz}}{1+z^2} dz \right| < \frac{\pi}{r} \frac{r^2}{r^2-1} \rightarrow 0$$

となり, $I = \frac{\pi}{e}$ を得る.

上で使った不等式をまとめておこう.

Thm. 7.16 (Jordan の補題)

$r > 0$ のとき,

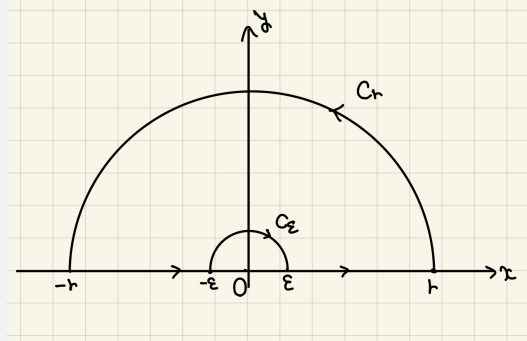
$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin \theta} d\theta < \frac{\pi}{2r},$$

$$(2) \int_0^{\pi} e^{-r \sin \theta} d\theta < \frac{\pi}{r}.$$

e.g. 7.17 (三角関数が入ってる積分③)

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

を示す. 被積分関数は, $z = 0$ を特異点にもつので, 原点を避けるような次の積分経路を考える.



積分経路の内部で $\frac{e^{iz}}{z}$ は正則なので,

$$\left(\int_{\epsilon}^r + \int_{-r}^{-\epsilon} + \int_{C_{\epsilon}} + \int_{C_r} \right) \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \quad (7.2)$$

である. ここで,

$$\int_{-r}^{-\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_r^{\epsilon} \frac{e^{-iz}}{-z} (-dz) = - \int_{\epsilon}^r \frac{e^{-iz}}{z} dz$$

であるから,

$$\left(\int_{\epsilon}^r + \int_{-r}^{-\epsilon} \right) \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\epsilon}^r \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{z} dz = 2i \int_{\epsilon}^r \frac{\sin x}{x} dx$$

である. 次に,

$$\left| \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \left| \int_0^{\pi} \frac{e^{-r \sin \theta + ir \cos \theta}}{r e^{i\theta}} i r e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^{\pi} e^{-r \sin \theta} d\theta < \frac{\pi}{r} \rightarrow 0 (r \rightarrow \infty)$$

である. 最後に,

$$\int_{C_{\epsilon}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\pi}^0 \frac{e^{i\epsilon(\cos \theta + i \sin \theta)}}{\epsilon e^{i\theta}} i \epsilon e^{i\theta} d\theta \rightarrow -i \int_0^{\pi} d\theta = -\pi i (\epsilon \rightarrow 0)$$

である. 以上より, (7.2) で $r \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$ として,

$$2i \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx - \pi i = 0$$

を得る.

いくつか例を見てきたが, その少なくないものは実軸上の積分以外の部分の極限が 0 になることで, 実軸上の積分の極限が留数を計算することで得られている. ジョルダンの不等式を使うものや e.g. 7.17 のように特異点を避けているものには使えないが, 次の命題を用いれば計算を省略できることもある.

Prop. 7.18 (便利な公式)

$q(z)$ の上半平面上の零点を z_1, z_2, \dots, z_n とする.

(1) $(q(x) \text{ の次数}) \geq (p(x) \text{ の次数}) + 2$ ならば,
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}(z_i).$$

ただし, $\text{Res}(z_i)$ は $p(z)/q(z)$ の $z = z_i$ における留数.

(2) $(q(x) \text{ の次数}) \geq (p(x) \text{ の次数}) + 1$ ならば,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x) \cos x}{q(x)} dx = \text{Re}\{2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}(z_i)\},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x) \sin x}{q(x)} dx = \text{Im}\{2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}(z_i)\}.$$

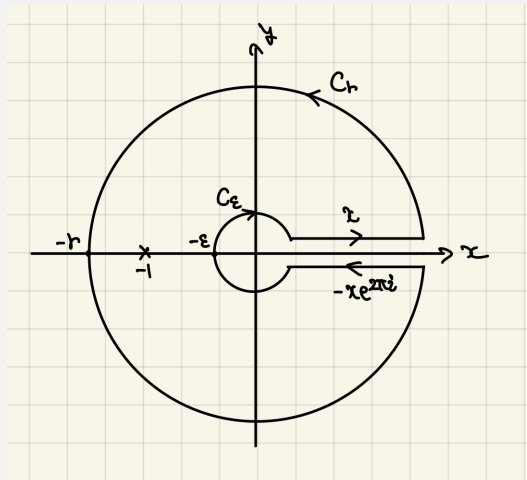
ただし, $\text{Res}(z_i)$ は $p(z)e^{iz}/q(z)$ の $z = z_i$ における留数.

e.g. 7.19 (log(多価関数)が入ってる積分)

$0 < a < 1$ のとき,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-a}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

を示す. z の偏角は, $0 \leq \arg z < 2\pi$ で考えると, $f(z) = \frac{z^{-a}}{1+z}$ は原点, -1 , 実軸の正の部分を除いて正則であるから, 下の積分経路を考える.



積分経路全体を C とおくと,

$$\int_C \frac{z^{-a}}{1+z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(-1) = 2\pi i (-1)^{-a} = 2\pi i e^{-a\pi i} \quad (7.3)$$

が成り立つ. また,

$$\left| \int_{C_r} f(z) dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{r^{-a}}{r-1} r d\theta \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

であり,

$$\left| \int_{C_\epsilon} f(z) dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon^{-a}}{1-\epsilon} \epsilon d\theta \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

が成り立つ. さらに,

$$\int_{-r}^{-\epsilon} \frac{(-1)^{-a} x^{-a}}{1-x} (-dx) = -e^{-2\pi a i} \int_\epsilon^r \frac{x^{-a}}{1+x} dx$$

であるから, (7.3) で $r \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0$ とすれば,

$$(1 - e^{2\pi a i}) \int_0^\infty \frac{x^{-a}}{1+x} dx = 2\pi i e^{-a\pi i}$$

したがって,

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{1+x} dx = \frac{2\pi i e^{-a\pi i}}{1 - e^{2\pi a i}} = \frac{\pi}{\sin \pi/a}.$$

e.g. 7.20 (三角関数が入ってる積分④)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \sin \theta} = \frac{2\pi}{3}$$

を示す. $C: |z|=1$ に対して,

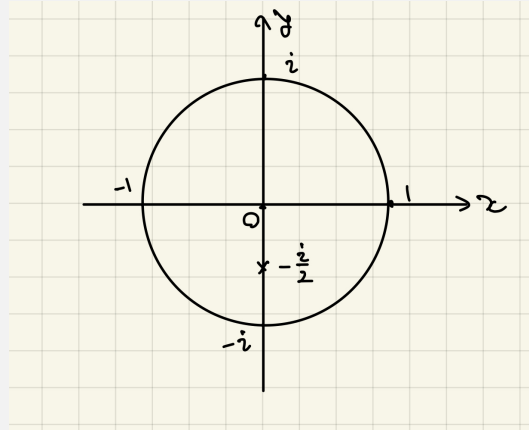
$$\int_C \frac{1}{5 + 4(z - z^{-1}/2i)} \frac{dz}{iz} = \int_C \frac{1}{2z^2 + 5iz + 2} dz$$

を考える. $z = e^{i\theta}$ とおくと,

$$(\text{左辺}) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \sin \theta}$$

である. また, Prop. 7.18 より,

$$(\text{右辺}) = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{-i}{z} \right) = \frac{2\pi}{3}$$



Thm. 7.21

$\cos \theta, \sin \theta$ を含む有理関数 $F(\cos \theta, \sin \theta)$ の積分, $I = \int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ を考える. $C : z = e^{i\theta} (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ とおくと,

$$\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

であるから,

$$I = \int_C F \left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i} \right) \frac{1}{iz} dz$$

は z の有理関数の積分として計算できる.