

2017-2018 相原ゼミ (修士) ノート *

(2018 年 7 月 2 日更新)

このノートでは, 2017-2018 年度の相原ゼミ (修士) の補足を簡単にまとめる^{*1*2}.

以下, K を体, A を K 上有限次元多元環とする. また, 特に断りのない限り, 加群はすべて, 有限次元右 A 加群を意味する. (記号や設定はなるべく [DK] に合わせる.)

目次

| | | |
|-------|-----------------------|----|
| 1 | 多元環の準同型と加群 | 3 |
| 2 | Theorem 3.7.4 の証明の補足 | 4 |
| 3 | 圏論 | 5 |
| 3.1 | 単射と全射 | 5 |
| 3.2 | 核と余核 | 6 |
| 4 | 完全列とコホモロジー | 9 |
| 5 | Ext と Tor | 13 |
| 5.1 | 射影分解 | 14 |
| 5.2 | Ext | 16 |
| 5.2.1 | 定義 | 16 |
| 5.2.2 | 低次の Ext | 19 |
| 5.2.3 | 移入分解による Ext | 25 |
| 5.2.4 | Ext に関する公式 | 26 |

* 教科書は [DK]

*¹ 2017.8.4 の思いつきでスタートしたため, それ以前についてはフォローしきれていないものもある. できるだけ更新するつもり.

*² 当初は簡単にまとめるつもりだったが, 筆者の趣味が入り, 長くなった (2017.8.28, 43 ページ).

| | | |
|-------|--------------------------------|----|
| 5.3 | Tor | 29 |
| 5.4 | 完全性を保つ加群 | 33 |
| 5.5 | 低次の Ext v.s. 高次の Ext | 34 |
| 6 | 森田理論 | 35 |
| 6.1 | 圏論 (再) | 35 |
| 6.2 | 森田理論 | 38 |
| 7 | 次元 | 40 |
| 7.1 | 加群に付随する次元 | 40 |
| 7.1.1 | 射影次元 | 40 |
| 7.1.2 | 入射次元 | 41 |
| 7.1.3 | 支配次元 | 43 |
| 7.2 | 多元環に付随する次元 | 44 |
| 7.2.1 | 大域次元 | 44 |
| 7.2.2 | 表現次元 | 49 |
| 7.2.3 | 有限性次元 | 51 |
| 7.2.4 | 剛性次元 | 52 |
| 8 | 傾理論 | 53 |
| 8.1 | 傾加群 | 53 |
| 8.1.1 | グロタンディーク群 | 57 |
| 8.2 | ブレナー-バトラーの定理 | 61 |
| 8.3 | ボンガルツの補題 | 66 |
| 8.4 | ボンガルツの補題の一般化 | 75 |
| 8.5 | 傾変異理論 | 77 |
| 9 | 多元環の構成方法 | 82 |
| 9.1 | ディンキン図形 ADE | 82 |
| 9.2 | ブラウアーツリー | 84 |
| 10 | 関手圏 | 84 |
| 10.1 | クルル-シュミット圏 | 85 |

1 多元環の準同型と加群

この節で書かれることは、教科書 [DK] においてしばしば使われているように感じるが、それについての言及はないため、ここに記す。

以下、この節では、 $f: A \rightarrow B$ を多元環の間の準同型とする。

まず最初に次を用意する。

補題 1.1. 次は同値である:

- (i) M が単純 A 加群である;
- (ii) 任意の $m (\neq 0) \in M$ に対して、 $M = mA$ となる。

証明. (i) \Rightarrow (ii): 任意の $m \in M$ に対して、 M は mA を含むが、 M の単純性より $mA = 0$ か $mA = M$ となる。 A は少なくとも単位元を含むから、 $mA \neq 0$ 、ゆえに、 $mA = M$ 。

(ii) \Rightarrow (i): N を M の零でない部分加群とする。このとき、 $m \neq 0$ となる $m \in N$ を取れる。明らかに、 $mA \subseteq N \subseteq M$ であるが、仮定よりこれらはすべて一致する。 \square

次がこの節のメインである。

命題 1.2. (1) 右 B 加群は、自然な右 A 加群構造を持つ。

(2) f が全射ならば、単純 B 加群は (1) の作用で単純 A 加群である。

(3) f は全射とする。 A 加群 M の零化イデアル $\text{Ann } M$ が f の核 $\text{Ker } f$ を含むならば、 M は自然な B 加群構造を持つ。特に、 M が単純 A 加群ならば、(この作用で) 単純 B 加群である。

証明. (1) M を B 加群とする。 A の M への作用を $m \cdot a := mf(a)$ ($m \in M, a \in A$) で定義する (この作用が well-defined であることは明らか)。このとき、加群の公理を満たすことも簡単に確認できる。

(2) S を単純 B 加群とし、 $s \in S$ とする。補題 1.1 を考慮に入れて、 $S = sA$ であることを示す。 B 加群 S に補題 1.1 を適用して、 $S = sB$ を得る。 f は全射より、 $S = sB = sf(A) = sA$ 。(この等式の中の、 sB および sA の表記に注意すること。)

(3) B の M への作用を次で定義する: $m \cdot b := ma$ 。ここで、 $m \in M, b \in B$ であり、 f の全射性より $a \in A$ は $b = f(a)$ となる元である。

この作用が well-defined であることを示す: $f(a) = b = f(a')$ となる $a, a' \in A$ を取り、 $ma = ma'$ を示せばよい。 $f(a) = f(a')$ より、 $a - a' \in \text{Ker } f \subseteq \text{Ann } M$ を得るから、

$$m(a - a') = 0.$$

M が単純 A 加群のとき, B 上でも単純であることは (2) と同様の議論からわかる (f の全射性は必要ない). \square

参考 1. 上の命題を圏論の言葉で言い換えると次のようになる.

- (1) 自然な関手 $F : \text{mod } B \rightarrow \text{mod } A$ が存在する.
- (2) f が全射ならば, F は完全列を保つ充満忠実関手である. 特に, F は単純加群を保存する.
- (3) f が全射のとき, $\text{mod } B$ は次の $\text{mod } A$ の充満部分圏と圏同値である:

$$\{M \in \text{mod } A \mid \text{Ker } f \subseteq \text{Ann } M\} \text{ ((2) における } F \text{ の像)}.$$

このとき, (B は両側 (B, A) 加群^{*3}と見れて) F はテンサー関手 $- \otimes_B B_A$ で与えられる.

2 Theorem 3.7.4 の証明の補足

教科書 [DK] の Theorem 3.7.4 の証明最後の段落は, (ギャップはないと思うが) とても理解し難い. ここでは, それをフォローする.

主張は次である.

主張 2.1. $\pi : A \rightarrow B$ を多元環の間の全射準同型とし, $I := \text{Ker } \pi$ とおく. また, $R := \text{rad } A$ とし, I は R^2 に含まれると仮定する. このとき, B が遺伝的ならば, $I = 0$ となる. 特に, A も遺伝的多元環である.

証明. A 加群 I/RI および R/RI の零化イデアルは π の核 $\text{Ker } \pi$ を含む. よって, 命題 1.2 より, これらを B 加群とみなすことができる. 同型定理より, B 加群の完全列

$$0 \rightarrow I/RI \rightarrow R/RI \rightarrow R/I \rightarrow 0 \tag{2.1}$$

を得る.

ここで, $R/I = \text{rad } B$ を示す. $R/I = \pi(R) \subseteq \text{rad } B$ である. 一方, $B/(R/I) \simeq (A/I)/(R/I) \simeq A/R$ より, $B/(R/I)$ は半単純であるから, $R/I \supseteq \text{rad } B$.

このとき, B は遺伝的より, $R/I = \text{rad } B$ は射影 B 加群である. したがって, 完全列 (2.1) は分裂し, $R/RI \simeq R/I \oplus I/RI$ を得る. 特に, これは A 加群としての直和でもある.

^{*3} M が両側 (B, A) 加群であるとは, 右 A 加群かつ左 B 加群であり, $m \in M, a \in A, b \in B$ に対して, $(am)b = a(mb)$ が成り立つときにいう.

さらに, $\text{rad}(R/RI)_A = R^2/RI$ であり, 仮定よりこれは I/RI を含む. ゆえに, 中山の補題より, $I/RI = 0$ となり, $I = RI (= \text{rad}_A I)$ を得る. 結果的に, $I = 0$ が従う. ■

3 圏論

ここでは, [DK, Section 8.1] に付加する形で圏論の基本事項について紹介する. また, 参考書として [N] を挙げておく. (圏論について書かれている本はたくさんあるが, どれもとても難しい. [N] は日本語で書かれているということもあり, 勉強しやすいだろう.)

以下, \mathcal{C} を加法圏^{*4}とする: $\mathcal{C} = \text{mod } A$ を考えれば十分だが, 各対象の“元”は扱わないように気をつける^{*6}.

3.1 単射と全射

定義 3.1. $f : M \rightarrow N$ を \mathcal{C} の射とする.

- (1) f が単射であるとは, 任意の $g, g' : L \rightarrow M$ に対して, $fg = fg'$ ならば $g = g'$ であるときにいう.
- (2) f が全射であるとは, 任意の $g, g' : N \rightarrow L$ に対して, $gf = g'f$ ならば $g = g'$ であるときにいう.

練習問題 3.2. 上の定義は \mathcal{C} が一般の圏でも同様に用いることができる. そこで, \mathcal{C} を集合の圏としたとき, 上の単射および全射の概念は通常のものとは一致することを確認せよ.

注意 2. ‘集合論的’全射と‘圏論的’全射がいつでも一致するわけではない. 例えば, $\mathcal{C} = \text{Ring}$ を環の圏とする^{*7}. 実際, 自然な埋め込み $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ を考えると, これは‘集合論的’全射ではない. 一方, $g, g' : \mathbb{Q} \rightarrow R$ を環準同型とし, $gf = g'f$ を満たすと仮定する. このとき, 任意の有理数 $\frac{a}{b}$ に対して,

$$g\left(\frac{a}{b}\right) = g\left(\frac{a}{1} \cdot \frac{1}{b}\right) = g\left(\frac{a}{1}\right) \cdot g\left(\frac{1}{b}\right) = gf(a) \cdot (gf(b))^{-1}$$

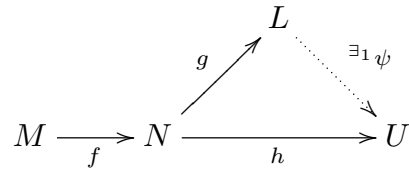
^{*4} (i) 零対象をもつ^{*5}. (ii) 2つの対象に対して, 直和が取れる. (iii) 射の集合はアーベル群である. (iv) 射の合成は双線型である.

^{*5} 対象 X が始対象 (終対象) であるとは, 任意の対象 Y に対して, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ($\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$) が1点集合となるときにいう. 始対象かつ終対象であるものを零対象という.

^{*6} 一般の圏では, 対象から“元”を取ってこれない.

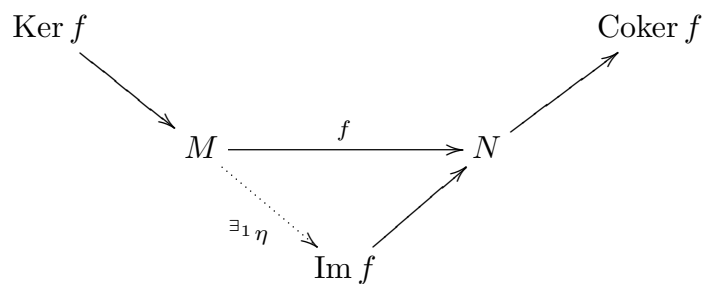
^{*7} 圏 Ring は加法圏ではない. なぜなら, 環準同型は単位元を保存するから, 射の集合はアーベル圏にならない (零射がない). 例えば, R を $K (\neq 0)$ 上2次正方行列環とすると, $\text{Hom}_{\text{Ring}}(R, K) = \emptyset$ である.

絵で書くと次のようになる:



また, L も同様に f の余核といい, $\text{Coker } f$ で表す.

(3) f の余核の核を f の像といい, $\text{Im } f$ で表す. このとき, 次のような関係を絵で観察できる:

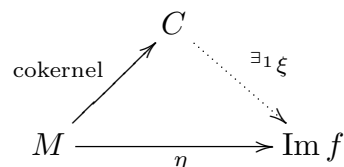


注意 3. 射 f に対して, 核や余核がいつも存在するとは限らない.

注意 4. 環の圏 Ring は加法圏ではない (零射がない) ため, ‘圏論的’ 核を考えることはできない. ただし, 環論的な意味 での核は存在する: これは, 環を (加法に関する) アーベル群と見たときの ‘圏論的’ 核である. (練習問題 3.6 参照)

練習問題 3.5. 任意の射に対して, 核や余核が存在するとき, 次を確認せよ.

- (1) 核 $\text{Ker } f \rightarrow M$ は単射である.
- (2) 余核 $N \rightarrow \text{Coker } f$ は全射である.
- (3) 核および余核は同型を除いて一意に決まる.
- (4) 定義 3.4 (3) の図における η のような射が一意的に存在する.
- (5) さらに, η は $\text{Ker } f \rightarrow M$ の余核を通過する: つまり, $C := \text{Coker}(\text{Ker } f \rightarrow M)$ として,



⑨ 一般に, ξ は同型とは限らない.

練習問題 3.6. $C = \text{mod } A$ のとき, 準同型 $f : M \rightarrow N$ に対して, 次を確認せよ.

- (1) $\text{Ker } f \simeq \{m \in M \mid f(m) = 0\}$ (2) $\text{Im } f \simeq \{f(m) \mid m \in M\}$ (通常の核と像に一致)
 (3) $\text{Coker } f \simeq N/\text{Im } f$ (4) $\text{Im } f \simeq \text{Coker}(\text{Ker } f \rightarrow M) \simeq M/\text{Ker } f$ (準同型定理)

参考 5. 練習問題 3.5 のように, 任意の射が核および余核を持ち, さらに, (5) における ξ が同型になる (準同型定理が成り立つ) 加法圏をアーベル圏という. 練習問題 3.6 より, 加群の圏 $\text{mod } A$ は (最も基本的な) アーベル圏である.

参考 6. 圏論においては, 集合論のように対象から“元”を取って議論することをしてはいけない (対象が集合とは限らない). 一方, “小さい”アーベル圏では, “元”を取って議論することが可能である. それは以下で保証されている:

定理 (ミッチェルの埋め込み). 小さいアーベル圏は, 環 R の加群圏 $\text{Mod } R$ へ埋め込める.

ここで, $\text{Mod } R$ は (有限生成とは限らない) 右 R 加群全体の圏を表す. このように, 加群の圏 (よって対象は集合) に埋め込むことによって, “元”を取って議論することが可能になる*8. ミッチェルの埋め込みのアイデアは, 森田理論のそれと同様である: R はあるアーベル圏の射影生成対象の自己準同型環 (6 節参照).

注意

以下, [DK] の Section 1, 2, 3, および, 8.1, 8.2, 8.3, 9.1 は既知とする.

4 節および 5 節について

多元環の表現論の研究では, コホモロジー論は欠かせない道具である. コホモロジー論とは, 加群圏 $\text{mod } A$ の構造を計算するためのものであり, 特に, アーベル圏や完全圏としての構造を観察するために非常に重要である. 具体的には, Hom の計算および以下で見る Ext , Tor の計算をすることがコホモロジー論である.

多元環を分類する上でも, コホモロジー論は威力を発揮する. 例えば, [DK] の 3.7 節に登場する遺伝的多元環も, あるコホモロジーの値によって測ることができる. さらに, [卒 16, 付録 B.2] に掲載したアウスランダー (Auslander) 多元環も, コホモロジーによって理解することができる.

また, 多元環に付随する各種の次元もコホモロジーを用いて定義される.

*8 ただし, 対象から直接“元”を取るわけではない.

上記のことからも、今後最も重要になるのがコホモロジー論である。しかし、それを学ぶためには準備することが多く、理解することもとても難しい。そこで、次の2つの節において、勉強の助けとなるようにまとめる。(これからの勉強で必要なことを、“過不足なく”最低限のことに絞って載せられるように心がけたつもりだけどちょっと多くなったか。)

内容としては、[DK, Section 11] および [IS, 第5章 §3, 第6章] を主としている。詳細はそれらを参照のこと。

参考 7. 以下では圏として、有限次元多元環 A 上の加群圏 $\text{mod } A$ を主に扱う。一方で、すべての結果は一般のアーベル圏で成り立つ。その場合、“元”を取ることなく、圏論の言葉のみで証明することもできるが [N, 第4章], (小さいアーベル圏のときは) ミッチェルの埋め込み (参考 6) を適用すれば、下記の証明と同様に“元”を取って議論することができる。

また、これから主に使う証明方法は、実際に“元”を取り完全列や核、余核の定義に当てはめて証明する方法である。そのとき、与えられた図式 (写像の矢の組み合わせ) を辿ることから、この方法を図式を追う (*diagram chasing*) という。

4 完全列とコホモロジー

加群と準同型の列 $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ が $gf = 0$ を満たしているとき、これを複体という。このとき、 $\text{Im } f$ は $\text{Ker } g$ に含まれるが、これらの差 $\text{Ker } g / \text{Im } f$ を複体の (M における) (コ)ホモロジーといい、 $H(L \rightarrow M \rightarrow N)$ で表す。コホモロジーが 0 であることと (M において) 完全であることは同値である。

また、複体は 3 項からなる必要はなく、無限に多くの加群と準同型の列に対しても同様に定義される。重要なことは列の中にある 2 つの連続する射を合成すると零になることである。

2 つの複体 $X : \dots \rightarrow X^n \xrightarrow{f^n} X^{n+1} \rightarrow \dots$ と $Y : \dots \rightarrow Y^n \xrightarrow{g^n} Y^{n+1} \rightarrow \dots$ に対して、各四角形

$$\begin{array}{ccc} X^n & \xrightarrow{f^n} & X^{n+1} \\ \varphi^n \downarrow & & \downarrow \varphi^{n+1} \\ Y^n & \xrightarrow{g^n} & Y^{n+1} \end{array}$$

を可換にするような $\varphi^n : X^n \rightarrow Y^n$ の全体 $\varphi := \{\varphi^n\}$ を X から Y の射といい、(加群の

準同型と同様に) $\varphi: X \rightarrow Y$ とかく*⁹.

複体と射の列 $(*) 0 \rightarrow X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \rightarrow 0$ に対して, 各項の加群と準同型の列 $0 \rightarrow X^n \xrightarrow{\varphi^n} Y^n \xrightarrow{\psi^n} Z^n \rightarrow 0$ も完全列になっているとき, 列 $(*)$ も完全であるという (複体の完全列)*¹⁰.

練習問題 4.1. 次を示せ. (cf. [DK, Theorem 8.3.5])

- (1) 射影加群 P に対して, 関手 $\text{Hom}_A(P, -)$ は完全である: つまり, 完全列を保存する.
- (2) 移入加群 I に対して, 関手 $\text{Hom}_A(-, I)$ は完全である.

練習問題 4.2. 行および列がすべて完全列である (3×3) の可換図式を考える:

$$\begin{array}{ccccc} L_1 & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & L_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 \end{array}$$

また, $L_1 \rightarrow M_1$ のような上段縦の矢の核を (左から) U_1, U_2, U_3 , さらに, $L_1 \rightarrow L_2$ のような左横の矢の核を (上から) V_1, V_2, V_3 とおく. 自然に, 複体 $U_1 \rightarrow U_2 \rightarrow U_3$ および $V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_3$ を得る. このとき, 次が成り立つ:

$$H(U_1 \rightarrow U_2 \rightarrow U_3) \simeq H(V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_3).$$

練習問題 4.3. 各行が完全である可換図式を考える:

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\ f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow & & f_5 \downarrow \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5 \end{array}$$

また, $U_i := \text{Ker } f_i$, $V_i := \text{Im } f_i$, $W_i := \text{Coker } f_i$ ($:= N_i / \text{Im } f_i$) とおくと, 自然に, 複体 $U_{i-1} \rightarrow U_i \rightarrow U_{i+1}$ および $V_{i-1} \rightarrow V_i \rightarrow V_{i+1}$, $W_{i-1} \rightarrow W_i \rightarrow W_{i+1}$ を得る. このとき, 次が成り立つ:

$$H(U_3 \rightarrow U_4 \rightarrow U_5) \simeq H(V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow V_4) \simeq H(W_1 \rightarrow W_2 \rightarrow W_3).$$

*⁹ これによって, 複体の圏 $\mathbf{C}(\text{mod } A)$ が定義される.

*¹⁰ 核および余核も同様のアイデアで定義して, 複体の圏 $\mathbf{C}(\text{mod } A)$ はアーベル圏になる. ただし, 対象は集合ではないため, 対象 (複体) から “元” を取って議論することはできない.

補題 4.4. 行および列が完全列である可換図式を考える:

$$\begin{array}{ccccccc}
 M_{11} & \longrightarrow & M_{12} & \longrightarrow & M_{13} & \longrightarrow & \cdots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 M_{21} & \longrightarrow & M_{22} & \longrightarrow & M_{23} & \longrightarrow & \cdots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 M_{31} & \longrightarrow & M_{32} & \longrightarrow & M_{33} & \longrightarrow & \cdots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

また, $M_{1i} \rightarrow M_{2i}$ (上段縦の矢) の核を U_i , $M_{i1} \rightarrow M_{i2}$ (左横の矢) の核を V_i とおくと, 自然に, 複体 $U_{i-1} \rightarrow U_i \rightarrow U_{i+1}$ および $V_{i-1} \rightarrow V_i \rightarrow V_{i+1}$ を得る. このとき, 次が成り立つ:

$$H(U_{i-1} \rightarrow U_i \rightarrow U_{i+1}) \simeq H(V_{i-1} \rightarrow V_i \rightarrow V_{i+1}).$$

ただし, $U_0 = \{0\} = V_0$ とする.

証明. 各縦の矢 $M_{ij} \rightarrow M_{i+1,j}$ の核を W_{ij} とおく ($W_{1j} = U_j$). 練習問題 4.3 を繰り返し用いて,

$$\begin{aligned}
 H(U_{i-1} \rightarrow U_i \rightarrow U_{i+1}) &= H(W_{1,i-1} \rightarrow W_{1,i} \rightarrow W_{1,i+1}) \\
 &\simeq H(W_{2,i-2} \rightarrow W_{2,i-1} \rightarrow W_{2,i}) \\
 &\simeq H(W_{3,i-3} \rightarrow W_{3,i-2} \rightarrow W_{3,i-1}) \\
 &\dots \\
 &\simeq H(W_{i-1,1} \rightarrow W_{i-1,2} \rightarrow W_{i-1,3})
 \end{aligned}$$

そこで, 次の 3×3 の可換図式を考える:

$$\begin{array}{ccccccc}
 M_{i-1,1} & \longrightarrow & M_{i-1,2} & \longrightarrow & M_{i-1,3} & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 M_{i,1} & \longrightarrow & M_{i,2} & \longrightarrow & M_{i,3} & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 M_{i+1,1} & \longrightarrow & M_{i+1,2} & \longrightarrow & M_{i+1,3} & &
 \end{array}$$

これに練習問題 4.2 を適用すれば, $H(W_{i-1,1} \rightarrow W_{i-1,2} \rightarrow W_{i-1,3}) \simeq H(V_{i-1} \rightarrow V_i \rightarrow V_{i+1})$ が得られる. \square

次の2つの補題は、基本的かつ重要であり、しばしば使われる。

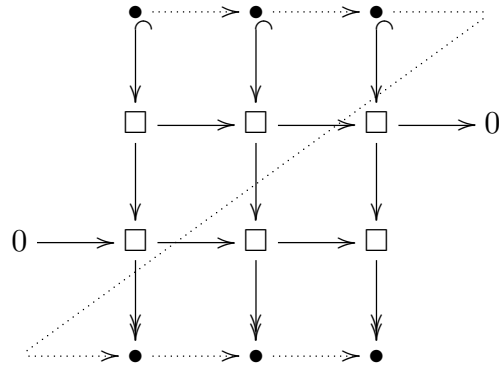
補題 4.5 (蛇の補題, Snake Lemma). 2つの完全列の可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow 0 \\
 & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{p} & V & \xrightarrow{q} & W
 \end{array}$$

に対して、次の完全列が存在する:

$$\text{Ker } \alpha \rightarrow \text{Ker } \beta \rightarrow \text{Ker } \gamma \xrightarrow{\delta} \text{Coker } \alpha \rightarrow \text{Coker } \beta \rightarrow \text{Coker } \gamma.$$

蛇の補題を絵で書くと、



であり、‘ $\cdots \rightarrow$ ’が完全列を作る。(“蛇”っぽい?)

蛇の補題の証明. 準同型 $\delta : \text{Ker } \gamma \rightarrow \text{Coker } \alpha$ を構成することが山である。あとは、定義に従って完全であることを示せばよい。

まずは、(well-defined であることは置いて) 対応を確立する。 $x \in \text{Ker } \gamma$ とする。 g は全射だから、ある m が存在して、 $g(m) = x$ とかける。可換性より、 $q\beta(m) = \gamma g(m) = \gamma(x) = 0$: つまり、 $\beta(m) \in \text{Ker } q$. 図式の下段は完全だから、ある $u \in U$ が存在して、 $\beta(m) = p(u)$ とかける。そこで、 $\delta(x) := u$ (in $\text{Coker } \alpha$) とする。

次に、上で定義した δ が well-defined であることを示す。 $x = x'$ (in $\text{Ker } \gamma$) とする。 g の全射性より、 $g(m) = x$, $g(m') = x'$ となる $m, m' \in M$ を取る。さらに、 $p(u) = \beta(m)$, $p(u') = \beta(m')$ となる $u, u' \in U$ を取る。このとき、 $\delta(x) = u$, $\delta(x') = u'$ だから、 $u = u'$ (in $\text{Coker } \alpha$) であることを示せばよい。

$x = x'$ より $m - m' \in \text{Ker } g$, よって、上段の完全性より、 $m - m' = f(\ell)$ となる $\ell \in L$ が存在する。したがって、

$$p\alpha(\ell) = \beta f(\ell) = \beta(m - m') = p(u - u')$$

を得るが, p は単射だから, $\alpha(\ell) = u - u'$ (in U) となる. ゆえに, $u - u' = \alpha(\ell) = 0$ (in $\text{Coker } \alpha$). \square

補題 4.6 (馬の蹄鉄補題, Horseshoe Lemma). $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ を完全列とする. また, $\cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow L \rightarrow 0$ および $\cdots \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_0 \rightarrow N \rightarrow 0$ を, P_i, Q_i たちがすべて射影加群の完全列とする. このとき, 次を可換にする完全列 $\cdots \rightarrow P_1 \oplus Q_1 \rightarrow P_0 \oplus Q_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ が存在する:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & L \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & P_1 \oplus Q_1 & \longrightarrow & P_0 \oplus Q_0 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & 0
 \end{array}$$

ここで, 各列 $P_i \rightarrow P_i \oplus Q_i \rightarrow Q_i$ は分裂する完全列である.

証明. 全射準同型 $P_0 \oplus Q_0 \rightarrow M$ を構成することが問題である: その後は核に対して同様の議論を適用すればよい.

$f: L \rightarrow M$, $g: M \rightarrow N$, $\varphi: P_0 \rightarrow L$, $\psi: Q_0 \rightarrow N$ とおく. Q_0 は射影加群だから, $\psi = g \circ \bar{\psi}$ となる $\bar{\psi}: Q_0 \rightarrow M$ が存在する. このとき, $\rho := \begin{bmatrix} f \circ \varphi & \bar{\psi} \end{bmatrix}: P_0 \oplus Q_0 \rightarrow M$ が題意の条件を満たす準同型である.

ρ の全射性のみ示す. (ここでは圏論的な証明を載せる.) $h: M \rightarrow U$ を $h \circ \rho = 0$ を満たす準同型とする. このとき, $hf\varphi = 0$ であり, φ は全射だから, $hf = 0$ を得る. 余核の定義より, $h = pg$ となる $p: N \rightarrow U$ が存在する. これは, $p \circ \psi = 0$ であることを導く. 結果的に, ψ の全射性より $p = 0$, ゆえに, $h = 0$ であることがわかる. \square

5 Ext と Tor

ここでは, Ext と Tor について簡単にまとめる. 詳しくは, [DK, Section 11] や [IS, 第 6 章] を参照.

5.1 射影分解

加群 M に対して, M の射影被覆から得られる完全列 $0 \rightarrow N \rightarrow P(M) \rightarrow M \rightarrow 0$ を考える. このとき, N は (同型を除いて) 一意的に決まるので, $\Omega(M)$ とかき, M の (第 1) シジジーという.

さらに, N に対して射影被覆を取ることで, 完全列 $0 \rightarrow L \rightarrow P(N) \rightarrow N \rightarrow 0$ を得る. このとき, $L (= \Omega(N)) = \Omega^2(M)$ とかく (M の第 2 シジジー): 以下, $P(M)$ や $\Omega(M)$ のかっこは省略し, PM や ΩM と書くことがある.

これを続けることで, 完全列

$$\cdots \rightarrow P_n \xrightarrow{\pi_n} P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{\pi_1} P_0 \xrightarrow{\pi_0} M \rightarrow 0$$

を得ることができる: $P_n = P(\Omega^n M)$ で, 各 π_n は可換図式

$$\begin{array}{ccc} P_n & \xrightarrow{\pi_n} & P_{n-1} \\ & \searrow & \nearrow \\ & \Omega^n M & \end{array}$$

によって作られる ($P_n \rightarrow \Omega^n M$ は射影被覆, $\Omega^n M \rightarrow P_{n-1}$ は自然な単射). このような完全列を, M の (極小) 射影分解という. また, M を無視した列 $\cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow 0$ (便宜上, 右端に “0” を入れる) を P_M とかく. このとき, P_M に現れる π_n について, $\pi_{n-1} \circ \pi_n = 0$ が成り立つ. このような性質を満たす列を複体という.

参考 8. 上において, かっこ書きで極小という言葉を用いた. 極小性は射に対して定義される概念であり, 上に登場する射たちは実際に極小になっている (ラフな言い方をすると, “無駄がない” 射). 一方, 馬の蹄鉄補題に登場する射たちは極小であることを要求されていないが, ここで登場する完全列も (極小でない) 射影分解という (“無駄がある” かもしれない). 極小性は非常に重要な概念であるが, ここでは省略する*¹¹.

次の事実を確認しておく [DK, Theorem 3.3.7].

事実 5.1. 加群 M と射影加群 P に対して, 任意の全射準同型 $f: P \rightarrow M$ は (同型の可換図式を通して) 全射準同型 $\begin{bmatrix} \pi & 0 \end{bmatrix}: PM \oplus Q \rightarrow M$ (Q はある射影加群) に書き換えることができる. ここで, π は M の射影被覆とする.

*¹¹ 8 節最後に追加した (2018.5.31).

証明. P の射影性から, 次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & M \\ g \downarrow & & \parallel \\ PM & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

それぞれを根基で割って, 中山の補題を適用すれば, g が全射であることがわかる. したがって, g は分裂全射である: 分裂完全列 $0 \longrightarrow Q \xrightleftharpoons[h']{h} P \xrightarrow{g} PM \longrightarrow 0$. このとき,

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & M \\ \begin{matrix} [g] \\ [h'] \end{matrix} \downarrow & & \parallel \\ PM \oplus Q & \xrightarrow{[\pi \ 0]} & M \end{array}$$

は縦の矢が同型な可換図式を与える. □

上記を用いて, 極小射影分解が“極小”である意味がわかる.

命題 5.2. $P_M : \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{\pi_1} P_0 \rightarrow 0$ を M の極小射影分解とする. また, $Q_M : \cdots \rightarrow Q_1 \xrightarrow{\varphi_1} Q_0 \rightarrow 0$ を M の (別の) 射影分解とする. このとき, 複体としての直和 $Q_M \simeq P_M \oplus R$ を得る. ここで, R は恒等写像の積み重ねで構成されている射影加群の複体である.

証明. π_1 および φ_1 の余核をそれぞれ, π_0 および φ_0 とおく. また, 核に対して, それぞれ適当に $M_i (= \Omega^i M)$, N_i のような記号を使う.

事実 5.1(の証明の議論) より, 次の可換図式が得られる:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & Q_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & M \longrightarrow 0 \\ & & \beta_1 \downarrow & & \downarrow [\text{id}_{P_0} \ 0] & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & P_0 & \xrightarrow{\pi_0} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

($\varphi_0 = [\pi_0 \ 0]$) さらに, $\beta_1 = [\text{id}_{M_1} \ 0]$ と書けることもわかる.

上および事実 5.1(の証明の議論) より, 次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & R_1 & \xrightarrow{\varphi'_1} & R_0 & \\
 & & & \downarrow \scriptstyle t[0 \text{ id}_{R_1}] & & \downarrow \scriptstyle t[0 \text{ id}_{R_0}] & \\
 0 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & Q_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & N_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \scriptstyle \beta_2 & & \downarrow \scriptstyle [\text{id}_{P_1} \ 0] & & \downarrow \scriptstyle [\text{id}_{M_1} \ 0] \\
 0 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{\pi_1} & M_1 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

$\left(\varphi_1 = \begin{bmatrix} \pi_1 & 0 \\ 0 & \varphi'_1 \end{bmatrix} \right)$ φ_1 は全射より, φ'_1 もまた全射である. このとき, 蛇の補題より, β_2 が全射になる. 特に, 分裂することがわかり, $\beta_2 = [\text{id}_{M_2} \ 0]$ と書ける.

上の議論を繰り返せば, 分裂全射 $Q_M \rightarrow P_M$ が得られる. □

5.2 Ext

5.2.1 定義

加群 M とその射影分解 $\cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{\pi_1} P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ に対して, 関手 $\text{Hom}_A(-, N)$ を適用する (完全列は得られない!):

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(P_0, N) \rightarrow \text{Hom}_A(P_1, N) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Hom}_A(P_n, N) \rightarrow \cdots$$

ここで, 各 $\text{Hom}_A(P_{n-1}, N) \rightarrow \text{Hom}_A(P_n, N)$ は $\text{Hom}_A(\pi_n, N) : f \mapsto f \circ \pi_n$ である (α^{n-1} と表す). さらに, 一番左端を切って, (ただの) ベクトル空間と線型写像の列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(P_0, N) \rightarrow \text{Hom}_A(P_1, N) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Hom}_A(P_n, N) \rightarrow \cdots \quad (5.1)$$

を考え (便宜上, 左端の “0” は残す), $\text{Hom}_A(P_M, N)$ とかく. これはベクトル空間の複体をなす: つまり, この列のどの 3 項

$$\text{Hom}_A(P_{n-1}, N) \xrightarrow{\alpha^{n-1}} \text{Hom}_A(P_n, N) \xrightarrow{\alpha^n} \text{Hom}_A(P_{n+1}, N)$$

を取っても, $\alpha^n \circ \alpha^{n-1} = 0$ が成り立つ*12.

*12 次数 (添え字) に注意する. 列の添え字が矢印の方向へ向かって, 下がっているものをチェイン, 上がっているものをコチェインという. 射影分解から得られる複体 P_M はチェイン複体, Hom 関手を施して得られる複体 $\text{Hom}_A(P_M, N)$ はコチェイン複体. なお, “チェイン” を使うか “コチェイン” を使うかは, 使う人の趣味で決まる.

よって, $\text{Im } \pi_{n-1}$ は $\text{Ker } \pi_n$ に含まれる. [DK, Theorem 8.3.5] に注意して, 一般にこれらは一致しない. その差を考えるのが複体の (コ) ホモロジーである. 少し一般的な状況で定義を書いておく.

定義 5.3. $X : \cdots \rightarrow X^n \xrightarrow{f^n} X^{n+1} \rightarrow \cdots$ を A 加群の (コチェイン) 複体とする^{*13}. このとき, 剰余加群 $\text{Ker } f^n / \text{Im } f^{n-1}$ を X の第 n 次コホモロジーといい, $H^n(X)$ とかく^{*14}.

これによって, Ext を導入することができる.

定義 5.4. M, N を A 加群とする. このとき, M と N の第 n 次拡大 $\text{Ext}_A^n(M, N)$ を次で定義する:

$$\text{Ext}_A^n(M, N) := H^n(\text{Hom}_A(P_M, N)).$$

一般に, $\text{Ext}_A^n(M, N)$ は (ただの) ベクトル空間である^{*15}.

また, $\text{Ext}_A^n(M, N)$ は M の射影分解の取り方に依らない. これは, 命題 5.2 を用いても確認することができるが, より一般的な状況 (極小が取れるとは限らない射影的に豊富なアーベル圏, 参考 19) を想定して示す.

命題 5.5. $X : \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow 0$ および $Y : \cdots \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_0 \rightarrow 0$ を (極小とは限らない) M の射影分解とする. つまり, これらは第 0 項以外において完全で, $H^0(X) \simeq M \simeq H^0(Y)$, さらに, 各 P_i および Q_i は射影加群である. このとき,

$$H^n(\text{Hom}_A(X, N)) \simeq H^n(\text{Hom}_A(Y, N))$$

が成り立つ.

証明. P_i および Q_i の射影性より, 複体の中の射 $X \rightleftarrows Y$ を取ることができる. よって, $\text{Hom}_A(X, N) \xrightleftharpoons[\psi]{\varphi} \text{Hom}_A(Y, N)$ を得る. φ および ψ は X や Y における各射の核および像を保存することが簡単に確認できるから, コホモロジーの間の射 $H^n(\text{Hom}_A(X, N)) \xrightleftharpoons[\bar{\psi}]{\bar{\varphi}} H^n(\text{Hom}_A(Y, N))$ を誘導することがわかる.

^{*13} K 加群 = (K 上) ベクトル空間であることに注意する.

^{*14} コホモロジーは H^n を用い, ホモロジーは H_n を用いることが多い. これらの差は, 複体の番号が右に向かって, “増える” か “減るか”.

^{*15} M が (B, A) 両側加群ならば, $\text{Ext}_A^n(M, N)$ は右 B 加群になる. このように, M や N に左加群の構造が定まっている場合は Ext も加群構造を持つ.

最初に取った $X \rightleftarrows Y$ の合成を $f: X \rightarrow X$ とおく:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{\pi_2} & P_1 & \xrightarrow{\pi_1} & P_0 & \xrightarrow{\pi_0} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \parallel & & \\
 \cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{\pi_2} & P_1 & \xrightarrow{\pi_1} & P_0 & \xrightarrow{\pi_0} & M & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

$\pi_0(1 - f_0) = 0$ および P_0 の射影性より, $1 - f_0$ は P_1 を通過する:

$$\begin{array}{ccc}
 & P_0 & \\
 & \swarrow h_0 & \downarrow 1-f_0 \\
 P_1 & \xrightarrow{\pi_1} & P_0
 \end{array}$$

また, P_1 が射影的であることと

$$\pi_1 h_0 \pi_1 = (1 - f_0) \pi_1 = \pi_1 - \pi_1 f_1 = \pi_1 (1 - f_1)$$

より, $1 - f_1 - h_0 \pi_1$ は P_2 を通過する:

$$\begin{array}{ccc}
 & P_1 & \\
 & \swarrow h_1 & \downarrow 1-f_1-h_0\pi_1 \\
 P_2 & \xrightarrow{\pi_2} & P_1
 \end{array}$$

これを繰り返していくと, 次を満たす $h_i: P_i \rightarrow P_{i+1}$ を得る:

$$f_i = \begin{cases} 1 - \pi_1 h_0 & (i = 0) \\ 1 - h_{i-1} \pi_i - \pi_{i+1} h_i & (i \geq 1) \end{cases} \quad (5.2)$$

ここで, $g \in H^n(\text{Hom}_A(X, N))$ を取る:

$$\begin{array}{ccccc}
 P_{n+1} & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & P_{n-1} \\
 \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n+1} \\
 P_{n+1} & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & P_{n-1} \\
 & & \searrow 0 & & \downarrow g \\
 & & & & N
 \end{array}$$

このとき,

$$\begin{aligned}
 gf_n &= \begin{cases} g - g\pi_1h_0 & (n=0) \\ g - gh_{n-1}\pi_n - g\pi_{n+1}h_n & (n \geq 1) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} g & (n=0) \\ g - gh_{n-1}\pi_n & (n \geq 1) \end{cases}
 \end{aligned}$$

となるから, $g = gf_n$ in $H^n(\text{Hom}_A(X, N))$ を得る. つまり, $\bar{\psi}\bar{\varphi}$ は恒等写像である. 同様に, $\bar{\varphi}\bar{\psi} = \text{id}$ もわかるから, $H^n(\text{Hom}_A(X, N)) \simeq H^n(\text{Hom}_A(Y, N))$ が得られる. \square

参考 9. 上の証明は, 複体の間の射に対するホモトピックという概念を用いている. 実際, (5.2) は f (よって $\psi\varphi$) が恒等射とホモトピックであることを示している.

複体の間の射 φ は各コホモロジーの間の射 $H^n(\varphi)$ を誘導するが, φ と φ' がホモトピックならば, $H^n(\varphi) = H^n(\varphi')$ が成り立つ. したがって, $\psi\varphi$ が恒等射とホモトピックだったので, $\bar{\psi}\bar{\varphi} = H^n(\psi\varphi) = H^n(\text{id}) = \text{id}$ となる.

5.2.2 低次の Ext

まずは低次の Ext を見てみよう. 次は簡単な練習問題である.

練習問題 5.6. $\text{Ext}_A^0(M, N) \simeq \text{Hom}_A(M, N)$

次に, 1 次の Ext を観察する. $\text{Ext}_A^1(M, N)$ は短完全列 $0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ に関係しており, このような完全列が “どのくらい存在するか” を測る指標となる: 絵で描くと真ん中の加群 L は

$$L = \begin{array}{|c|} \hline M \\ \hline N \\ \hline \end{array}$$

という構造を持っており (L を M と N の拡大という), $\text{Ext}_A^1(M, N)$ を計算することで, どのくらい拡大を作ることができるかを知ることができる.

加群 M, N に対して, $\mathcal{E} := \mathcal{E}(M, N)$ を完全列 $0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ 全体の集合とする. このような完全列が分裂する場合 ($L \simeq M \oplus N$) は, M と N から新しい加群を作れたとは言えない. そのため, 分裂する完全列は ‘ある意味で’ 排除したい. また, 異なる完全列 $0 \rightarrow N \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$ と $0 \rightarrow N \xrightarrow{f'} L' \xrightarrow{g'} M \rightarrow 0$ によって, $L \simeq L'$ となってしまう場合も, 拡大で同じ加群しか得られていないため, 無視したい (実際にはもう少し弱い意味で無視する).

上のような要求から、 \mathcal{E} に以下で同値関係を定義する：二つの完全列 $E : 0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ と $E' : 0 \rightarrow N \rightarrow L' \rightarrow M \rightarrow 0$ に対して、

$E \sim E' \iff$ 次のような可換図式が存在する：

$$\begin{array}{ccccccccc} E : & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & & \parallel & & \downarrow & & \parallel & & \\ E' : & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(このとき、 L と L' は同型になる.)

練習問題 5.7. 上の関係 \sim が \mathcal{E} において同値関係となっていることを確かめよ。

そこで、この同値関係 \sim による商集合 \mathcal{E}/\sim を改めて \mathcal{E} とかくことにする：以下の \mathcal{E} はすべて、上の同値関係で割った集合とする。

さらに $\text{Ext}_A^1(M, N)$ に近づけるために、 \mathcal{E} にベクトル空間としての構造を定める。そのためには、完全列に対して和とスカラー倍を定義する必要がある。

定義-定理 5.8. $E_1 : 0 \rightarrow N \xrightarrow{f_1} L_1 \xrightarrow{g_1} M \rightarrow 0$, $E_2 : 0 \rightarrow N \xrightarrow{f_2} L_2 \xrightarrow{g_2} M \rightarrow 0 \in \mathcal{E}$ とする。 $L_1 \oplus L_2$ の部分加群 L を次のように定義する：

$$L := \{(x, y) \in L_1 \oplus L_2 \mid g_1(x) = g_2(y)\}.$$

(実際に L は $L_1 \oplus L_2$ の部分加群になっていることを確かめよ。) さらに、 L の部分加群 L' を考える：

$$L' := \{(f_1(n), -f_2(n)) \mid n \in N\}.$$

(実際に L' は L の部分加群であることを確かめよ.)

このとき、 $\tilde{L} := L/L'$ とおくと、次の \mathcal{E} に属す完全列を得る：

$$E : 0 \rightarrow N \xrightarrow{f} \tilde{L} \xrightarrow{g} M \rightarrow 0.$$

ここで、 $f : n \mapsto (f_1(n), 0)$, $g : (x, y) \mapsto g_1(x)$. この完全列を $E_1 + E_2$ として定義する。

証明. E が完全列であることを示す。

- (i) f が準同型であることは明らか。
- (ii) f が単射であることを示す。 $n \in \text{Ker } f$ とすると、 $(f_1(n), 0) \in L'$ より、ある $m \in N$ が存在して、 $(f_1(n), 0) = (f_1(m), -f_2(m))$ とかける。 よって、 $f_1(n) = f_1(m)$ かつ $f_2(m) = 0$ を得るが、 f_2 は単射より、 $m = 0$ 。 したがって、 $f_1(n) = 0$ となるから、 f_1 の単射性より、 $n = 0$ であることがわかる。

- (iii) g が準同型であることを示す. 問題は well-defined 性のみ. そのために, \tilde{L} の零元が g によって M の零元に移ることを示せばよい. $(f_1(n), -f_2(n)) \in L'$ とする. このとき, $g(f_1(n), -f_2(n)) = g_1 f_1(n) = 0$.
- (iv) g が全射であることは g_1 および g_2 の全射性から導かれる.
- (v) $\text{Im } f = \text{Ker } g$ であることを示す. “ \supseteq ” を示せばよい. $(x, y) \in \text{Ker } g$ とする: つまり, $g_1(x) = 0$. さらに, $(x, y) \in L$ であることに注意して, $g_2(y) = g_1(x) = 0$. E_1, E_2 は完全列より, $x = f_1(n)$, $y = f_2(m)$ となる $n, m \in N$ が存在する. このとき,

$$(x, y) = (f_1(n + m), 0) - (f_1(m), -f_2(m)) = f(n + m) \in \text{Im } f.$$

以上より, E が完全列, 特に, $E \in \mathcal{E}$ であることがわかる. □

練習問題 5.9. 上で定めた \mathcal{E} 上の加法について, 以下を確かめよ:

- (1) well-defined であること.
- (2) 分裂完全列が \mathcal{E} の零元 (加法に関する単位元) であること.

次に, 完全列のスカラー倍を定義しよう.

定義-定理 5.10. $E: 0 \rightarrow N \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \rightarrow 0 \in \mathcal{E}$, $\alpha \in K$ とする. $L \oplus N$ の部分加群 U を次のように定義する:

$$U := \{(f(n), -\alpha n) \mid n \in N\}.$$

このとき, $\bar{L} := (L \oplus N)/U$ とおくと, 完全列 $0 \rightarrow N \xrightarrow{\iota} \bar{L} \xrightarrow{\rho} M \rightarrow 0$ が存在して, これを αE とかく. ここで, $\iota: n \mapsto (0, n)$, $\rho: (x, n) \mapsto g(x)$.

証明. (i) ι が準同型であることは明らか.

(ii) ι が単射であることを示す. $n \in \text{Ker } \iota$ とする: つまり, ある $m \in N$ が存在して, $(0, n) = (f(m), -\alpha m)$ とかける. よって, f の単射性より $m = 0$, ゆえに $n = 0$.

(iii) ρ が well-defined であること, および, 全射準同型であることは簡単に確認できる.

(iv) $\text{Im } \iota = \text{Ker } \rho$ を示す. “ \supseteq ” を証明する. $(x, n) \in \text{Ker } \rho$ とすると, $g(x) = 0$ が従う. E は完全列だから, ある $m \in N$ が存在して, $x = f(m)$ とかける. このとき,

$$(x, n) = (0, n + \alpha m) + (f(m), -\alpha m) = \iota(n + \alpha m) \in \text{Im } \iota.$$

以上から, αE が完全列であることが従う. □

練習問題 5.11. 以下を確かめよ:

(1) $0_K E = 0_{\mathcal{E}}$; (2) $-E = (-1)E$. (0_{\spadesuit} は \spadesuit における零元)

練習問題 5.12. 上で定義した加法とスカラー倍によって、 \mathcal{E} が K 上ベクトル空間になっていることを示せ.

参考 10. 押し出し (*Push-Out*) および引き戻し (*Pull-Back*) (例えば [IS, 第 4 章 §2]) を使うと、圏論的な立場から加法およびスカラー倍を定義することができ、とても見やすくなる. (“圏論的な立場” を除いても、押し出しと引き戻しは非常に重要で便利な概念なので、勉強しておくことを勧める^{*16}. 以下では既知として用いる.)

参考 11. 押し出しおよび引き戻しによって、完全列の和とスカラー倍を定義してみよう.

和 $E_i : 0 \rightarrow N \xrightarrow{f_i} L_i \xrightarrow{g_i} M \rightarrow 0$ を完全列とする. 図 $\begin{array}{c} L_1 \\ \downarrow g_1 \\ L_2 \xrightarrow{g_2} M \end{array}$ に対して、引き

戻しを適用して、次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L_1 \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & \text{PB} & \downarrow g_1 \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f_2} & L_2 & \xrightarrow{g_2} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

さらに、可換図式

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f_1} & L_1 \\ & \searrow -f_2 & \downarrow \text{PB} \\ & & L \longrightarrow L_1 \\ & & \downarrow g_1 \\ & & L_2 \xrightarrow{g_2} M \end{array}$$

があるが、引き戻しの性質から“三角形分割” $N \xrightarrow{\iota} L$ が取れる. f_1 の単射性より、 ι も単射である. さらに、 ι の像が定義 5.8 における L' であることがわかる. つまり、 $\tilde{L} := \text{Coker } \iota$ とすればよい.

このとき、経路 $N \xrightarrow{\iota} L \rightarrow L_1 \xrightarrow{g_1} M$ は零だから、余核の普遍性から、 $\tilde{L} \xrightarrow{g} M$ が取れる. また、全射 $L \rightarrow L_1 \xrightarrow{g_1} M$ より、 g も全射である.

^{*16} 2017.11.27 のゼミにおいて勉強した.

ここで, 可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\iota} & L & \longrightarrow & \tilde{L} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow g \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f_1} & L_1 & \xrightarrow{g_1} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

を觀察すると, これは引き戻し $\begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & \tilde{L} \\ \downarrow & \text{PB} & \downarrow g \\ L_1 & \xrightarrow{g_1} & M \end{array}$ から来ていることがわかる. したがって, (もう一度上の可換図式を見れば) $\text{Ker } g \simeq N$ であることがわかる.

このように, 完全列 $0 \rightarrow N \rightarrow \tilde{L} \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$ を構成できた.

ス $E : 0 \rightarrow N \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$ を完全列とし, $\alpha \in K$ とする. このとき, 図

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & L \\ \alpha \times - \downarrow & & \\ N & & \end{array} \quad \text{に対して, 押し出しを適用すると, 可換図式}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & L & \xrightarrow{g} & M \longrightarrow 0 \\ & & \alpha \times - \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\iota} & \tilde{L} & \xrightarrow{\rho} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

を得るが, 下段が E のスカラー倍 αE に対応している.

これで準備が整ったので, 実際に 1 次の拡大 $\text{Ext}_A^1(M, N)$ と短完全列 $0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ との関係を見ていこう.

$E : 0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ を完全列とし, $\cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ を M の射影分解とする. P_0 は射影加群より, 次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi = \varphi_E & & \downarrow \psi_E & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

(実際に, well-defined な準同型 $\varphi : P_1 \rightarrow N$ が取れることを確認せよ.) ここで, $\text{Ext}_A^1(M, N)$ の定義を思い出すと,

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(P_0, N) \xrightarrow{\alpha^0} \text{Hom}_A(P_1, N) \xrightarrow{\alpha^1} \text{Hom}_A(P_2, N)$$

に対して, $\text{Ext}_A^1(M, N) := \text{Ker } \alpha^1 / \text{Im } \alpha^0$ である. このとき, 上で得た φ は $\alpha^1(\varphi) = 0$ を満たすため, φ は $\text{Ker } \alpha^1$ に属している. このように, 完全列 E に対して, $\text{Ext}_A^1(M, N)$ の元 $\varphi + \text{Im } \alpha^0$ を対応させることができる: 以下, 混乱がない限り, $\varphi + \text{Im } \alpha^0$ も φ と略記する.

この対応はベクトル空間の間の同型を引き起こす.

定理 5.13. M, N を加群とする. このとき, 対応 $E \mapsto \varphi_E$ はベクトル空間の間の同型写像 $\Phi: \mathcal{E} \rightarrow \text{Ext}_A^1(M, N)$ である.

証明. $E: 0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$, $E': 0 \rightarrow N \rightarrow L' \rightarrow M \rightarrow 0 \in \mathcal{E}$ とする.

(i) Φ が well-defined であることを示す. $E = E'$ とし, 次の図式を考える:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{\pi_1} & P_0 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \searrow \varphi_E & & \searrow \psi_E & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow \eta & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \searrow \varphi_{E'} & & \searrow \psi_{E'} & &
 \end{array}$$

この図式において, 2つの三角形

$$\begin{array}{ccc}
 & P_1 & \\
 & \swarrow & \searrow \\
 N & & \\
 \parallel & & \\
 N & &
 \end{array}
 \quad \text{および} \quad
 \begin{array}{ccc}
 & P_0 & \\
 & \swarrow & \searrow \\
 L & & \\
 \downarrow & & \\
 L' & &
 \end{array}$$

は可換とは限らない (他の図形はすべて可換). 示すことは, $\varphi_E = \varphi_{E'}$ (in $\text{Ext}_A^1(M, N)$) である: ここからは読者に任せる.

(ii) Φ は和を保存することを示す (記号は定義 5.8 と同じものを用いる). このために, 以下の可換図式が存在することを確かめればよい:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \varphi_E + \varphi_{E'} & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & \tilde{L} & \xrightarrow{g} & M \longrightarrow 0
 \end{array}$$

- (iii) Φ がスカラー倍を保つことも同様に示せる.
- (iv) Φ が単射であることを示す. $E \in \text{Ker } \Phi$ とする: つまり, $\varphi_E \in \text{Im } \alpha^0$ ($\alpha^0 := \text{Hom}_A(\pi_1, N) : \text{Hom}_A(P_0, N) \rightarrow \text{Hom}_A(P_1, N)$). よって, ある $\delta : P_0 \rightarrow N$ が存在して, $\varphi_E = \delta \circ \pi_1$ とかける. このとき, $\psi_E \circ \pi_1 = f \circ \varphi_E = f \circ \delta \circ \pi_1$ より, $(\psi_E - f \circ \delta) \circ \pi_1 = 0$, ゆえに, $\psi_E - f \circ \delta$ は M を通過する. つまり, ある $\varepsilon : M \rightarrow L$ が存在して, $\psi_E - f \circ \delta = \varepsilon \circ \pi_0$ とかける. この ε によって, g が分裂全射であることを確認することができる. したがって, E は分裂完全列より, $E = 0$ (in \mathcal{E}).
- (v) Φ が全射であることを示す. $\varphi \in \text{Ext}_A^1(M, N)$ とする: 特に, $\varphi \in \text{Ker } \alpha^1$ としてよい. よって, $\varphi \circ \pi_2 = 0$ より, ある $h : \Omega M \rightarrow N$ が存在して, $\varphi = h \circ \theta$ とかける. ここで, $\theta : P_1 \rightarrow \Omega M$ は ΩM の射影被覆とする. 次の可換図式が得られる:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \Omega M & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow h & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M \longrightarrow 0
 \end{array}$$

ここで, PO は図式 $\begin{array}{ccc} \Omega M & \longrightarrow & P_0 \\ \downarrow h & & \\ N & & \end{array}$ における押し出しを表す. 結果的に, 可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \varphi & \searrow \theta & \downarrow & & \parallel \\
 & & \Omega M & & L & & \\
 & & \swarrow h & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M \longrightarrow 0
 \end{array}$$

が得られたから, $\Phi(E) = \varphi$ であることがわかる.

以上より, ベクトル空間としての同型 $\mathcal{E} \simeq \text{Ext}_A^1(M, N)$ が確立できた. □

注意 12. 高次の Ext についても同様に完全列との関係があるが, ここでは省略する.

5.2.3 移入分解による Ext

上の $\text{Ext}_A^n(M, N)$ の定義では M の射影分解を用いたが, 双対的に, N の移入分解^{*17}を用いても全く同じものが構成できることを観察する.

^{*17} 移入分解も, 射影分解の双対として定義できるため, 省略する.

N の移入分解 $0 \rightarrow N \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \cdots$ から, $\text{Hom}_A(M, -)$ を施して得られる複体

$$\text{Hom}_A(M, I_N) : 0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, I_0) \rightarrow \text{Hom}_A(M, I_1) \rightarrow \cdots$$

を考える (I_N は複体 $0 \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \cdots$ を表す).

ここでの主定理は次である.

定理 5.14. $\text{Ext}_A^n(M, N) \simeq H^n(\text{Hom}_A(M, I_N))$.

証明. M の射影分解を P_M , I の移入分解を I_N とおく. 練習問題 4.1 より, すべての行および列が完全列となる可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}_A(P_0, I_0) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(P_1, I_0) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(P_2, I_0) & \longrightarrow & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{Hom}_A(P_0, I_1) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(P_1, I_1) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(P_2, I_1) & \longrightarrow & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{Hom}_A(P_0, I_2) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(P_1, I_2) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(P_2, I_2) & \longrightarrow & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \end{array}$$

(行は $\text{Hom}_A(P_M, I_i)$, 列は $\text{Hom}_A(P_j, I_N)$) このとき, 最上段縦の矢の核として $\text{Hom}_A(P_j, N)$, 一番左の横の矢の核として $\text{Hom}_A(M, I_i)$ が現れる. つまり, 図形の見えていない最上段に複体 $\text{Hom}_A(P_M, N)$ があり, 最も左端に複体 $\text{Hom}_A(M, I_N)$ があると思えばよい. そこで, 補題 4.4 を適用すると,

$$\begin{aligned} \text{Ext}_A^n(M, N) &= H(\text{Hom}_A(P_{n-1}, N) \rightarrow \text{Hom}_A(P_n, N) \rightarrow \text{Hom}_A(P_{n+1}, N)) \\ &\simeq H(\text{Hom}_A(M, I_{n-1}) \rightarrow \text{Hom}_A(M, I_n) \rightarrow \text{Hom}_A(M, I_{n+1})) \\ &= H^n(\text{Hom}_A(M, I_N)) \end{aligned}$$

が得られる. □

5.2.4 Ext に関する公式

実際に $\text{Ext}_A^n(M, N)$ を計算するためには, 次の完全列を用いるのが非常に有効である.

定理 5.15. 加群 U と完全列 $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ に対して, 次のような長い完全列が存在する:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(N, U) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(M, U) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(L, U) \\
 & & & & & & \searrow \\
 & & & & & & \text{Ext}_A^1(N, U) & \longrightarrow & \text{Ext}_A^1(M, U) & \longrightarrow & \text{Ext}_A^1(L, U) \\
 & & & & & & \searrow \\
 & & & & & & \dots & & \dots & \longrightarrow & \text{Ext}_A^{n-1}(L, U) \\
 & & & & & & \searrow \\
 & & & & & & \text{Ext}_A^n(N, U) & \longrightarrow & \text{Ext}_A^n(M, U) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

証明. 馬の蹄鉄補題より, 複体の完全列 $0 \rightarrow P_L \rightarrow P'_M \rightarrow P_N \rightarrow 0$ を得る. ここで, 命題 5.5 より, $\text{Ext}_A^n(M, -)$ を得るために P'_M を用いて差し支えない. さらに, 各項は分裂完全列より,

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(P_N, U) \rightarrow \text{Hom}_A(P'_M, U) \rightarrow \text{Hom}_A(P_L, U) \rightarrow 0 \quad (5.3)$$

も複体の完全列になる.

そこで, 次の主張を示せばよい.

主張. 複体の完全列 $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ に対して, 次のような完全列が存在する:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H^n(X) & \longrightarrow & H^n(Y) & \longrightarrow & H^n(Z) \\
 & & & & & & \searrow \\
 & & & & & & H^{n+1}(X) & \longrightarrow & H^{n+1}(Y) & \longrightarrow & H^{n+1}(Z) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

主張の証明. 複体 X に対して,

$$X = (X, f) = \dots \rightarrow X^n \xrightarrow{f^n} X^{n+1} \rightarrow \dots$$

のような用語を用いる. また, 各 f^n は, $\overline{f^n} : \text{Coker } f^{n-1} \rightarrow \text{Ker } f^{n+1}$ を通過する:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X^{n-1} & \xrightarrow{f^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{f^n} & X^{n+1} & \xrightarrow{f^{n+1}} & X^{n+2} \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \\
 & & \text{Coker } f^{n-1} & \xrightarrow{\overline{f^n}} & \text{Ker } f^{n+1} & &
 \end{array}$$

このとき、定義より、

$$- \text{Ker } \overline{f^n} = H^n(X) \quad - \text{Im } \overline{f^n} = \text{Im } f^n \quad - \text{Coker } \overline{f^n} = H^{n+1}(X)$$

であることに注意する. 同様に, $Y = (Y, g)$, $Z = (Z, h)$ についてもこの用語と同型に注意する.

2つの完全列の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X^n & \longrightarrow & Y^n & \longrightarrow & Z^n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f^n & & \downarrow g^n & & \downarrow h^n & & \\ 0 & \longrightarrow & X^{n+1} & \longrightarrow & Y^{n+1} & \longrightarrow & Z^{n+1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

に対して、蛇の補題を適用して、完全列

$$0 \rightarrow \text{Ker } f^n \rightarrow \text{Ker } g^n \rightarrow \text{Ker } h^n \rightarrow \text{Coker } f^n \rightarrow \text{Coker } g^n \rightarrow \text{Coker } h^n \rightarrow 0$$

を得る. さらに、最初の注意から、次のような2つの完全列の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Coker } f^{n-1} & \longrightarrow & \text{Coker } g^{n-1} & \longrightarrow & \text{Coker } h^{n-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \overline{f^n} & & \downarrow \overline{g^n} & & \downarrow \overline{h^n} & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker } f^{n+1} & \longrightarrow & \text{Ker } g^{n+1} & \longrightarrow & \text{Ker } h^{n+1} & & \end{array}$$

そこで、最初の注意を意識して、これに蛇の補題を適用すれば、完全列

$$H^n(X) \rightarrow H^n(Y) \rightarrow H^n(Z) \rightarrow H^{n+1}(X) \rightarrow H^{n+1}(Y) \rightarrow H^{n+1}(Z)$$

を得る. ■

結果的に、(5.3)の複体の完全列に対して主張を適用すれば、目的は達成される. □

注意 13. 定理 5.15 の完全列において、最初の曲がり道 (連結準同型) $\text{Hom}_A(L, U) \rightarrow \text{Ext}_A^1(N, U)$ の対応を観察してみよう. 準同型 $\varphi : L \rightarrow U$ に対して、完全列 $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow N \rightarrow 0$ を次のように構成する:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow \text{PO} & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & V & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

このように、 φ に対して、上の図式における下段の完全列を対応させるのが、連結準同型 $\text{Hom}_A(L, U) \rightarrow \text{Ext}_A^1(N, U)$ である.

定理 5.15 は、射影分解バージョンの Ext の定義および馬の蹄鉄補題を用いている。一方、第 2 項の入射分解を用いても Ext は一致し (定理 5.14)、さらに、入射分解バージョンの馬の蹄鉄補題も容易に手に入る。

このように、定理 5.15 の双対版を確立することができる。

定理 5.16. 加群 V と完全列 $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ に対して、次のような長い完全列が存在する:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(V, L) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(V, M) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(V, N) & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & & & & & \text{Ext}_A^1(V, L) & \longrightarrow & \text{Ext}_A^1(V, M) & \longrightarrow & \text{Ext}_A^1(V, N) & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \text{Ext}_A^{n-1}(V, N) & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & \text{Ext}_A^n(V, L) & \longrightarrow & \text{Ext}_A^n(V, M) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

5.3 Tor

ここでは、Tor について勉強する。しかし、それらはすべて上で書いた Ext の双対の概念なので、証明は省略する。

M を右 A 加群、 W を左 A 加群とする。また、 $P_M : \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow 0$ を M の射影分解とする。

このとき、複体

$$P_M \otimes_A W : \dots \rightarrow P_1 \otimes_A W \rightarrow P_0 \otimes_A W \rightarrow 0$$

の第 n ホモロジー $H_n(P_M \otimes_A W)$ を $\text{Tor}_n^A(M, W)$ とかく (添え字の上下に注意) *18。

練習問題 5.17. $\text{Tor}_0^A(M, W) \simeq M \otimes_A W$ であることを確認せよ。

Tor も Ext と同様に、第 2 項に上の操作を適用しても結果は一致する。

*18 今の設定では、 $\text{Tor}_n^A(M, W)$ は (ただの) ベクトル空間である。一方、 W が (A, B) 両側加群の構造を持っていると、 $\text{Tor}_n^A(M, W)$ は (自然な作用で) 右 B 加群になる。 M が両側加群である場合も同様のことが言える。

定理 5.18. $\text{Tor}_n^A(M, W) \simeq H_n(M \otimes_A P_W)$.

注意 14. Ext の場合, 第 1 項の射影分解により得られる Ext と第 2 項の入射分解により得られる Ext が一致した. 一方, Tor の場合は, 第 1 項に対しても第 2 項に対しても射影分解を用いる.

前者は, 射影加群 P , 入射加群 I に対して, 関手 $\text{Hom}_A(P, -)$ および $\text{Hom}_A(-, I)$ が完全関手であること, 後者は, 右射影加群 P , 左射影加群 Q に対して, 関手 $- \otimes_A Q$ および $P \otimes_A -$ が完全関手であることから, その妥当性が観察できる. (入射加群 I に対して, $I \otimes_A -$ は完全関手ではない!)

次の定理は, 実際に Tor を計算する際に有効である.

定理 5.19. 左加群 W と右加群の完全列 $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ に対して, 次の長い完全列が存在する:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & \text{Tor}_n^A(M, W) & \longrightarrow & \text{Tor}_n^A(N, W) & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & \text{Tor}_{n-1}^A(L, W) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & & & & & \text{Tor}_1^A(L, W) & \longrightarrow & \text{Tor}_1^A(M, W) & \longrightarrow & \text{Tor}_1^A(N, W) & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & L \otimes_A W & \longrightarrow & M \otimes_A W & \longrightarrow & N \otimes_A W & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

注意 15. 上の定理において, 第 1 項と第 2 項の差はないから, 第 1 項を固定した完全列も得ることができる.

次に, Ext と Tor が双対的な概念であることを見ていく.

D を右加群の圏から左加群の圏 (または左加群の圏から右加群の圏) への関手 $D := \text{Hom}_K(-, K)$ とし, これを K 双対という^{*19} [DK, Section 9]. 加群 M と準同型 f に対して, DM および Df をそれぞれ, M^* および f^* で略記することがある.

練習問題 5.20. 右 (左) 加群 M に対して, M^* が左 (右) 加群になることを確かめよ.

^{*19} $A = K$ の場合でも考えられて, その場合は K 上ベクトル空間の圏の自己関手になる.

練習問題 5.21. A が半単純多元環ならば、両側 (A, A) 加群として、 $A \simeq DA$ であることを示せ. (したがって、右加群としても、左加群としても、これらは同型である.)

参考 16. 上のような同型 $(*) A \simeq DA$ を満たす多元環はとても特徴的であり、重要な多元環として扱われる:

- 同型 $(*)$ が右加群としての同型であるとき、 A をフロベニウス (*Frobenius*) 多元環という.
 - このとき、練習問題 5.22 および練習問題 5.23 より、左加群としての同型 $(*)$ も導く. よって、フロベニウス多元環の定義において、左右の差はない.
 - フロベニウス多元環のすべての射影加群は入射的である. (この性質がとても特徴的)
 - 上の性質に注目して、フロベニウス多元環より、少し弱い多元環が定義される: すべての射影加群が入射的のとき、その環を自己入射的多元環、または、擬フロベニウス (*quasi-Frobenius*) 多元環という.
 - A が基本的のとき、フロベニウス・擬フロベニウスの差はない: つまり、これらはすべて一致する. (2つの多元環の差は、 A の直和因子に現れる射影加群の重複度を考えるかどうか.)
- 同型 $(*)$ が両側加群としての同型であるとき、 A を対称多元環という.

明らかに、次の implication が成り立つ:

半単純多元環 \implies 対称多元環 \implies フロベニウス多元環 \implies 自己入射的多元環
 (行列環の直積) (群環など)

練習問題 5.22. D^2 は恒等関手であることを示せ.

練習問題 5.23. 準同型 f に対して、

$$f \text{ は単射} \iff f^* \text{ は全射}$$

であることを示せ.

練習問題 5.24. 右加群 $M \supseteq N$ に対して、 M^* の部分集合 W を次のように定義する:

$$W := \{\alpha \in M^* \mid \alpha(N) = 0\}.$$

このとき、次を確かめよ:

(1) W は M^* の左部分加群になる.

(2) f を自然な単射 $N \rightarrow M$ とすると, $W = \text{Ker } f^*$ となる: ゆえに, $M^*/W \simeq N^*$.

コチェイン複体 $X := \cdots \rightarrow X^n \xrightarrow{f^n} X^{n+1} \rightarrow \cdots$ に対して, $DX = \cdots \rightarrow DX^{n+1} \xrightarrow{Df^n} DX^n \rightarrow \cdots$ はチェイン複体である. このような複体の双対について, 次のような (コ) ホモロジーの間の同型を観察できる.

補題 5.25. X を (チェイン) 複体とする. このとき, 次が成り立つ:

$$H^n(DX) \simeq DH_n(X).$$

練習問題 5.26. 上の補題を確かめよ.

体上の多元環での Tor は, 次の意味で Ext と一致する (これによって, 体上の多元環では多くの場合, Ext を考えれば十分).

定理 5.27. M を右加群, W を左加群とする. このとき, 次が成り立つ:

$$\text{Ext}_A^n(M, DW) \simeq D \text{Tor}_n^A(M, W).$$

証明. P_W を左 A 加群 W の射影分解とすると, DP_W は DW の入射分解である. Hom とテンサーの随伴性 [DK, Proposition 8.3.4] を用いて,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A(M, DP_W) &= \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_K(P_W, K)) \\ &\stackrel{(\clubsuit)}{\simeq} \text{Hom}_K(M \otimes_A P_W, K) \\ &= D(M \otimes_A P_W). \end{aligned}$$

したがって, 補題 5.25 より,

$$\begin{aligned} \text{Ext}_A^n(M, DW) &= H^n(\text{Hom}_A(M, DP_W)) \\ &\simeq H^n(D(M \otimes_A P_W)) \\ &\simeq DH_n(M \otimes_A P_W) \\ &= D \text{Tor}_n^A(M, W) \end{aligned}$$

を得る. □

練習問題 5.28. 上の証明における同型 (\clubsuit) をきちんと理解せよ.

参考 17. 定理 5.19 の完全列に K 双対を施してから定理 5.27 を用いると, 定理 5.15 の完全列を得ることができる.

5.4 完全性を保つ加群

ここでは, Hom 関手やテンサー関手によって, 与えられた完全列の完全性を保つ加群を紹介する. 重要な加群は次の 3 つである:

- ① 射影加群 ② 入射加群 ③ 平坦加群

射影加群および入射加群についてはすでに学んでいる. ここでは, 圏論的な立場からそれらを観察してみる.

以下, \mathcal{C} をアーベル圏とする*20.

注意 18. (少し高度な注意だが, メモとして記す.) 5.2 節では, Ext の定義に射影被覆 (射影分解) を用いている. 一方, 5.2.2 節や注意 12 で見たように, 完全列の言葉を用いて Ext を定義することもできる. このように, 射影被覆が取れないアーベル圏では, 後者の定義を用いる [W, Vista 3.4.6].

参考 19. (上の注意に関連して) 体上有限次元多元環上の加群圏 $\text{mod } A$ は各対象が射影被覆を持つアーベル圏である. このように, 任意の対象 M が射影対象 P からの全射 $\pi : P \rightarrow M$ を持つアーベル圏を射影的に豊富という. (π の極小性は仮定しなくてよい.) 双対的に, 入射的に豊富であるアーベル圏が定義される.

表現論 (加群) 的な立場からの定義と Ext の性質から, 射影的および入射的の概念を次のように定義し直すことができる.

定義 5.29 (再定義). アーベル圏 \mathcal{C} の対象 U が射影的 (入射的) であるとは, 任意の対象 M に対して, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(U, M) = 0$ ($\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, U) = 0$) となるときにいう. 言い換えると, 完全列 $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ に対して,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, L) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, N) \rightarrow 0 \\ (0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, U) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, U) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(L, U) \rightarrow 0) \end{aligned}$$

が完全列になる: つまり, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, -)$ ($\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, U)$) が完全関手になる.

練習問題 5.30. 射影加群および入射加群の ‘表現論的’ 定義と ‘圏論的’ 定義が一致することを確かめよ. (練習問題 4.1 参照)

*20 圏論的立場から観察するため, なるべく圏論の言葉を用いて書く. しかし, いつも通り, $\mathcal{C} = \text{mod } A$ と思えば十分である. ここで大切なことは, 射影加群や入射加群を Ext の言葉で理解することである.

次の命題も定義から簡単に確認できる.

命題 5.31. アーベル圏 \mathcal{C} に対して, 次は同値である:

- (i) U は射影的 (入射的);
- (ii) 任意の対象 M と任意の正の整数 n に対して, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(U, M) = 0$ ($\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(M, U) = 0$).

このように, Hom 関手が完全性を保つための条件は理解できた.

次に, テンサー関手が完全性を保つための条件を見てみよう.

定義 5.32. 右 A 加群 M が平坦であるとは, 任意の左加群 U に対して, $\text{Tor}_1^A(M, U) = 0$ となるときにいう. 言い換えると, 左加群の完全列 $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$ に対して,

$$0 \rightarrow M \otimes_A U \rightarrow M \otimes_A V \rightarrow M \otimes_A W \rightarrow 0$$

が完全になる: つまり, $M \otimes_A -$ が完全関手になる.

練習問題 5.33. 右加群 M, N が平坦であることと $M \oplus N$ が平坦であることは同値になることを示せ.

上の練習問題から次を得る.

事実 5.34. 射影加群は平坦である.

実は, 体上の多元環では, 上の事実の逆も成り立つ.

命題 5.35. 体上有限次元多元環 A に対して, 平坦加群は射影的である.

証明. 定理 5.27 より. □

5.5 低次の Ext v.s. 高次の Ext

前述の通り, 体上有限次元多元環の表現論では, Tor はだいたい無視してよい (Ext に書き換える). ただし, テンサーを使うことが便利で, Tor が登場することも多々あるので, 心に留めておくこと.

このように, Ext の計算が主に重要となり, 今後はそれに集中することになる. このとき, 低次の Ext は, Hom の計算 (練習問題 5.6) および短完全列の計算 (定理 5.13) を行えば済むため, それなりに理解できる. 一方, 高次の Ext は計算がとてもし辛い. そこで用いるテクニックが, 「次数落とし」である (正式名称ではない).

方法 5.36. M, N を右 A 加群とし, 次のように $\text{Ext}_A^n(M, N)$ の次数を落とす:

① M の射影被覆を取る:

$$0 \rightarrow \Omega M \rightarrow PM \rightarrow M \rightarrow 0.$$

② 上の完全列に $\text{Hom}_A(-, N)$ を適用すると, 次の完全列と同型を得る (定理 5.15):

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(PM, N) \rightarrow \text{Hom}_A(\Omega M, N) \rightarrow \text{Ext}_A^1(M, N) \rightarrow 0;$$

$$\text{Ext}_A^n(M, N) \simeq \text{Ext}_A^{n-1}(\Omega M, N) \quad (n \geq 2).$$

③ これを繰り返して ($\Omega^{\square} M$ に適用), 次の同型を得る:

$$\text{Ext}_A^n(M, N) \simeq \text{Ext}_A^1(\Omega^{n-1} M, N).$$

多元環のコホモロジー論では, 同様のテクニックをしばしば用いる. (例えば, N の入射包絡に対して, $\text{Hom}_A(M, -)$ を適用しても同じように Ext の次数を落とすことができる.)

以降の節について

ここから先の節はとても難しくなるが, 修士論文のネタとして使えるものがあることを期待する.

6 森田理論

ここでは, 森田理論についてフォローする [DK, Section 8.4]. 森田理論は, 加群の自己準同型多元環を取ることで引き起こる, ある圏の間の圏同値について理解する理論である. これを用いると, とても難しい多元環も, “うまく” 加群を選んで自己準同型多元環を考えることで, 優しい多元環に帰着できる.

6.1 圏論 (再)

以下, 圏論を必要とするので, 必要事項をまとめる. \mathcal{C}, \mathcal{D} を圏とする.

定義 6.1. $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を関手とする.

(1) 任意の対象 $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して, $F: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$ が単射 (全射) であるとき, F は忠実 (充満) であるという.

- (2) \mathcal{C} が \mathcal{D} の充満部分圏であるとは、充満忠実な関手 $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が存在するときをいう。
- (3) 任意の $W \in \mathcal{D}$ に対して、 $FX \simeq W$ となる $X \in \mathcal{C}$ が存在するとき、 F は稠密であるという。
- (4) \mathcal{C} と \mathcal{D} が圏同値 $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ であるとは、稠密な充満忠実関手 $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が存在するときをいう。

注意 20. (i) 圏同値と圏同型は異なる概念であることに注意する。(圏同型の方が強い.)

(ii) 圏同値の定義は、実際は上と異なるものを用いることが多い。上の定義は、集合論の言葉では全射かつ単射であることを言っている感覚である。一方、同値や同型という概念には、(逆写像のような) ‘逆’ に当たるものを用いるべきである: 圏同値 F の逆を与える関手を F の準逆関手という (これによって、圏の同値や同型が同値関係であることもわかる)。どちらの定義を用いてもまったく同じ概念になるので、ここでは簡単のため上の定義を用いる。通常使われる定義については、[DK, Section 8.4] を参照。

(iii) 考える圏が特殊なものである場合は、圏同値も同じように特殊なものを考えなければいけない。(今までも、「(ただの) 集合としての同型」か「群としての同型」か「環としての同型」か... などを考えてきた。) 考える圏としては例えば、加法圏やアーベル圏がある。しかしこれらの場合 (「加法圏の間の圏同値」および「アーベル圏の間の圏同値」) は、自動的に「加法圏としての圏同値」および「アーベル圏としての圏同値」になる [N, 系 3.2.28, 系 4.2.36].

注意 21. 上でも指摘した圏同値と圏同型について、面白い例を見つけたので載せておく [N, 例 2.2.15].

set を有限集合の圏とする。また、set の充満部分圏 \mathcal{C} を次で定義する:

$$\mathcal{C} := \{\bar{n} := \{1, \dots, n\} \mid n \text{ は非負整数}\}.$$

(ただし、 $\bar{0} = \emptyset$.) このとき、自然な充満忠実関手 $\mathcal{C} \rightarrow \text{set}$ は圏同値を与えるが、これら二つの圏は圏同型でない。

注意 20 (iii) で指摘したことを、アーベル圏の場合できちんと述べておく。

加法圏の間の関手 $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が加法的であるとは、 F が誘導する写像 $F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$ がアーベル群の準同型であるときをいう。このとき、 F は直和を保つ^{*21}。アーベル圏の構造を決めるものは核や余核であったが、結果的には完全列がその構造を

^{*21} 圏論的な直和の定義は難しいので、このノートではここまでに止める。詳しくは [N, 第 3 章] を参照。

決めていることになる。つまり、アーベル圏の間の圏同値は、「完全列を保つ」圏同値であってほしい: これを「アーベル圏としての圏同値」とよぶ。

注意 20 (iii) のように、「アーベル圏の間の圏同値」は自動的に「アーベル圏としての圏同値」になる (加法圏の場合は認めることにする)。

命題 6.2. $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ をアーベル圏の間の圏同値とする。このとき、以下が成り立つ:

- (1) F は核および余核を保つ。
- (2) $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ が \mathcal{C} での完全列ならば、 $FX \rightarrow FY \rightarrow FZ \rightarrow 0$ は \mathcal{D} での完全列である。
- (3) $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z$ が \mathcal{C} での完全列ならば、 $0 \rightarrow FX \rightarrow FY \rightarrow FZ$ は \mathcal{D} での完全列である。
- (4) F は射影的対象および入射的対象を保存する。

証明. 核が F によって保たれることのみ示す。 $f : X \rightarrow Y$ を \mathcal{C} の射とする ($\iota : Z := \text{Ker } f \rightarrow X$ を自然な単射とする)。明らかに、 $Ff \circ F\iota = F(f\iota) = F(0) = 0$ (F は加法的)。そこで、合成 $U \xrightarrow{\varphi} FX \xrightarrow{Ff} FY$ が零射ならば $F\iota$ を通過することを証明すればよい: このとき、核の普遍性より、 $FZ \simeq \text{Ker } Ff$ を得る。 F は圏同値を与えるから、 U および φ は \mathcal{C} の対象 W および射 $g : W \rightarrow X$ から来る: $U \simeq FW$, $\varphi = Fg$ (正確には同型を用いている)。 $F(fg) = Ff \circ Fg = 0 = F(0)$ (F は加法的) であり、 F は忠実だから、 $fg = 0$ 。ゆえに、 g は ι を通過する。結果的に、 $\varphi = Fg$ は $F\iota$ を通過する。 \square

練習問題 6.3. 上の命題の証明を完成させよ。

注意 22. F は圏同値より F の準逆関手が取れるので、上の命題の (2)(3) の逆が成り立つ。

以下の記号を用いる。

表記. 加法圏 \mathcal{C} の対象 M に対して、 M のいくつかの直和の直和因子全体からなる \mathcal{C} の充満部分圏を $\text{add } M$ とかく:

$$\text{add } M := \{N \in \mathcal{C} \mid \text{ある非負整数 } n \text{ が存在して, } N \text{ は } nM \text{ の直和因子になる.}\}.$$

アーベル圏 \mathcal{C} の対象 M に対して、 \mathcal{C} の充満部分圏 $\text{mod } M$ を次で定義する:

$$\text{mod } M := \{X \in \mathcal{C} \mid \text{完全列 } M_1 \rightarrow M_0 \rightarrow X \rightarrow 0 \text{ (} M_0, M_1 \in \text{add } M \text{) が取れる.}\}.$$

例えば、 K 上有限次元多元環 A に対して、 $\text{mod } A = \text{mod}(A_A)$ とかける。

A の射影 (入射) 加群全体からなる $\text{mod } A$ の充満部分圏を $\text{proj } A$ ($\text{inj } A$) とかく. $\text{proj } A = \text{add } A$ ($\text{inj } A = \text{add } DA$) である.

参考 23. 上で導入した $\text{mod } M$ について, そのアイデアを説明する.

環 R の表現論では, その (有限生成とは限らない) 加群の圏 $\text{Mod } R$ を考えることになる. すぐに $\text{mod } R$ を考えない理由は, “これがアーベル圏とは限らない” からである ($\text{Mod } R$ はいつもアーベル圏).

ここで, 有限生成加群について復習しよう. 右 R 加群 M が有限生成であるとは, 射影加群 P と全射準同型 $P \rightarrow M$ が存在するときをいう. また, 射影加群 P_0, P_1 および完全列 $P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ が存在するとき, M は有限表示であるという: このような完全列を M の射影表示という. 明らかに, 有限表示ならば有限生成である. 体上有限次元多元環においては, 有限生成, 有限表示, 有限次元はすべて一致する.

圏 $\text{mod } M$ のアイデアは有限表示から来ており, しばしばアーベル圏になる.

6.2 森田理論

ここで, 森田の定理を学ぶ.

以下, 右 A 加群 M に対して, $B := \text{End}_A(M)$ とおく.

練習問題 6.4. このとき, M は両側 (B, A) 加群の構造を持つことを確かめよ.

練習問題 6.5. 一般に, 多元環 A, B と, 両側 (B, A) 加群 M および右 A 加群 N に対して, ベクトル空間 $\text{Hom}_A(M, N)$ は右 B 加群構造を持つことを確かめよ: 上の練習問題と合わせて, 今の設定でも $\text{Hom}_A(M, N)$ は右加群構造を持つ (以下, この考え方が重要になる.)

射影 B 加群は $B_B = \text{Hom}_A(M, M)$ の直和因子だから, $\text{Hom}_A(M, N)$ ($N \in \text{add } M$) の形でかけることに注意する.

また, $F := \text{Hom}_A(M, -) : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } B$ とおく.

定理 6.6 (森田の定理 1). (1) F は圏同値 $\text{add } M \rightarrow \text{proj } B$ を引き起こす.

(2) さらに, M が射影的ならば, F は圏同値 $\text{mod } M \rightarrow \text{mod } B$ を与える.

(3) 特に, $\text{mod } M = \text{mod } A$ ならば, 圏同値 $\text{mod } A \rightarrow \text{mod } B$ を得る.

証明. (1) $F : \text{Hom}_A(M_1, M_2) \rightarrow \text{Hom}_B(FM_1, FM_2)$ が全単射であることを示す: (i) $M_1 = M$, (ii) $M_1 = nM$, (iii) $M_1 \in \text{add } M$ の順で示せばよい.

(2) $X, Y \in \text{mod } M$ とすると, 完全列

$$M_1 \xrightarrow{\varphi} M_0 \rightarrow X \rightarrow 0 \text{ および } N_1 \xrightarrow{\psi} N_0 \rightarrow Y \rightarrow 0$$

($M_0, M_1, N_0, N_1 \in \text{add } M$) が取れる.

(i) 忠実であること: $f: X \rightarrow Y$ が $Ff = 0$ を満たすとする. M_0, M_1 は射影的より, 次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ f_1 \downarrow & & f_0 \downarrow & & \downarrow f & & \\ N_1 & \longrightarrow & N_0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

よって,

$$\begin{array}{ccccccc} FM_1 & \longrightarrow & FM_0 & \longrightarrow & FX & \longrightarrow & 0 \\ Ff_1 \downarrow & & Ff_0 \downarrow & & \downarrow Ff=0 & & \\ FN_1 & \longrightarrow & FN_0 & \longrightarrow & FY & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

を得る. FM_0 は射影的だから, Ff_0 は $F\psi$ を通過する. このときの準同型 $FM_0 \rightarrow FN_1$ は (1) より, ある $p: M_0 \rightarrow N_1$ によって, Fp とかける: $Ff_0 = F\psi \circ Fp = F(\psi p)$. よって, (1) より $f_0 = \psi p$ が従う. これは $f = 0$ を導く.

(ii) 充満であること: $g: FX \rightarrow FY$ とする. FM_0, FM_1 の射影性より, 図式を可換にするような $FM_i \rightarrow FN_i$ が存在するが, (1) より, それらは $f_i: M_i \rightarrow N_i$ から来る. このとき, 余核を取ることで, $f: X \rightarrow Y$ を得ることができる. 最後に, 2つの準同型 $g, Ff: FX \rightarrow FY$ が一致することは簡単にわかる.

(iii) 稠密であること: $W \in \text{mod } B$ とする. 射影表示を取ることで, $Q_1 \xrightarrow{g} Q_0 \rightarrow W \rightarrow 0$ ($Q_0, Q_1 \in \text{proj } B$) を得るが, (1) より, $g: Q_1 \rightarrow Q_0$ は $f: M_1 \rightarrow M_0$ (in $\text{add } M$) から来る: $g = Ff$. $X := \text{Coker } f$ とすれば, M は射影的だから, 完全列 $FM_1 \xrightarrow{g} FM_0 \rightarrow FX \rightarrow 0$ が得られ, $FX \simeq \text{Coker } g \simeq W$ が従う.

(3) (2) より. □

このように, 射影的かつ $\text{mod } M = \text{mod } A$ となる加群 M は, 加群圏の圏同値を導く: 圏同値 $\text{mod } A \simeq \text{mod } B$ が存在するとき, A と B は森田同値であるという. このような M を射影生成加群という.

逆に, 森田同値はいつも, 射影生成加群によって引き起こされることがわかる: M および B の設定はリセットする.

定理 6.7 (森田の定理 2). A と B が森田同値ならば, A の射影生成加群 M が存在し, $B \simeq \text{End}_A(M)$ が成り立つ.

証明. A と B は森田同値だから, 稠密な充満忠実関手 $G : \text{mod } B \rightarrow \text{mod } A$ が存在する. このとき, $M := GB$ とおく. 命題 6.2 より, M は射影的である. 任意の A 加群 N は B 加群 U から来る: $N \simeq GU$. U の射影表示 $P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow U \rightarrow 0$ を取ると, $GP_1 \rightarrow GP_0 \rightarrow N \rightarrow 0$ を得る. GP_0, GP_1 は $\text{add } M$ に属すから, $N \in \text{mod } M$. よって, $\text{mod } M = \text{mod } A$ より, M は射影生成加群である.

最後に, G は圏同値より, $\text{End}_A(M) = \text{End}_A(GB) \simeq \text{End}_B(B) \simeq B$ を得る. \square

参考 24. 射影生成 A 加群 M に対して, $F := \text{Hom}_A(M, -) : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } B$ が森田同値を与えることを見たが, F の準逆関手は $- \otimes_B M_A : \text{mod } B \rightarrow \text{mod } A$ であることも確認できる.

7 次元

ここでは, 多元環および加群に付随する各種の次元について説明する.

以下, 簡単のため, A を基本的とする.

最も基本的な次元は, ベクトル空間としての次元である.

7.1 加群に付随する次元

7.1.1 射影次元

加群 M の射影次元 $\text{proj.dim } M$ を次で定義する:

$$\text{proj.dim } M := \sup\{\ell \geq 0 \mid \text{ある加群 } N \text{ に対して, } \text{Ext}_A^\ell(M, N) \neq 0\}.$$

練習問題 7.1. M が射影的 $\iff \text{proj.dim } M = 0$ であることを示せ.

射影次元を言い換えると次のようになる.

定理 7.2. 次は同値である:

- (1) $\text{proj.dim } M \leq n$.
- (2) 次のような完全列が存在する:

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

ただし, P_i はすべて射影的である.

(3) 任意の加群 N に対して, $\text{Ext}_A^{n+1}(M, N) = 0$.

(4) 任意の加群 N と $i > n$ に対して, $\text{Ext}_A^i(M, N) = 0$.

証明. (1) \Rightarrow (4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1) は明らか.

(2) \Leftrightarrow (3): M の射影分解を考えることで, (2) \Leftrightarrow 「 $\Omega^n M$ は射影的」は簡単にわかる. さらに, 方法 5.36 を適用して,

$$\text{Ext}_A^1(\Omega^n M, N) \simeq \text{Ext}_A^{n+1}(M, N)$$

より, 「 $\Omega^n M$ は射影的」 \Leftrightarrow (3) が成り立つ. □

7.1.2 入射次元

入射次元は, 射影次元の双対版である.

$$\text{inj.dim } M := \sup\{\ell \geq 0 \mid \text{ある加群 } N \text{ に対して, } \text{Ext}_A^\ell(N, M) \neq 0\}.$$

定理 7.3. 次は同値である:

(1) $\text{inj.dim } M \leq n$.

(2) 次のような完全列が存在する:

$$0 \rightarrow M \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_n \rightarrow 0.$$

ただし, I_i はすべて入射的である.

(3) 任意の加群 N に対して, $\text{Ext}_A^{n+1}(N, M) = 0$.

(4) 任意の加群 N と $i > n$ に対して, $\text{Ext}_A^i(N, M) = 0$.

とても有名な予想を紹介する (未解決).

予想 7.4 (Gorenstein Symmetric Cojecture, GSC). 右正則加群の入射次元が有限ならば, 左正則加群の入射次元も有限である: $\text{inj.dim } A_A < \infty \iff \text{inj.dim } {}_A A < \infty$.

一方, 左右の入射次元が有限ならば, それらは一致することが知られている [AR].

定理 7.5. $\text{inj.dim } A_A < \infty$ かつ $\text{inj.dim } {}_A A < \infty$ ならば, $\text{inj.dim } A_A = \text{inj.dim } {}_A A$.

証明. $n := \text{inj.dim } A_A$ とおく. $\text{inj.dim } {}_A A = \text{proj.dim } D A_A$ より, 長さが n 以下の $D A_A$

の射影分解を構成すればよい (定理 7.2). $M := DA$ の射影分解を

$$0 \rightarrow P_m \rightarrow P_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

とする. 方法 5.36 を適用して,

$$\text{Ext}_A^1(\Omega^{m-1}M, P_m) \simeq \text{Ext}_A^m(M, P_m) \quad (7.1)$$

を得る. $n = \text{inj.dim } A_A$ より, $m > n$ ならば, (7.1)の両辺は 0 になる: つまり, 完全列 $0 \rightarrow P_m \rightarrow P_{m-1} \rightarrow \Omega^{m-1}M \rightarrow 0$ は分裂し, 特に, $\Omega^{m-1}M$ は射影加群である (ここで改めて, $P_{m-1} := \Omega^{m-1}M$ と置き直す). このように, 一つ長さが短い M の射影分解

$$0 \rightarrow P_{m-1} \rightarrow P_{m-2} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

が得られた. これを繰り返せば, $\text{proj.dim } DA \leq n$ であることが導かれる. 双対的に, 逆の不等式も成り立つことを確認できる. よって, 両者は等しい. \square

参考 25. 右正則加群および左正則加群の入射次元が有限である多元環 ($\text{inj.dim } A_A < \infty$ かつ $\text{inj.dim } {}_A A < \infty$) を岩永-ゴーレンシュタイン (*Gorenstein*) 多元環という. 自己入射的多元環 A は $\text{inj.dim } A_A = 0 = \text{inj.dim } {}_A A$ を満たすので,

$$\text{自己入射的多元環} \implies \text{岩永-ゴーレンシュタイン多元環}$$

が成り立つ.

任意の加群 N による $\text{Ext}_A^\square(?, N)$ および $\text{Ext}_A^\square(N, ?)$ の計算について

任意の加群 N を取って, 上記の計算をすることは少々厄介である. 一方, A は体上有限次元多元環であり, 任意の加群は単純加群の積み重ねで構成されている. つまり, 加群の列

$$0 = \text{rad}^n N \subsetneq \text{rad}^{n-1} N \subsetneq \cdots \subsetneq \text{rad} N \subsetneq N$$

が取れて, 各 $\text{rad}^{i-1} N / \text{rad}^i N$ は半単純である (この列をルビー (*Loewy*) 列といい, n をその長さ (*Loewy length*) という).

このとき, ルビー列の長さに関する帰納法および定理 5.15, 5.16 を用いることで, $\text{Ext}_A^\square(?, N)$ および $\text{Ext}_A^\square(N, ?)$ の計算はそれぞれ, 任意の単純加群 S に対して, $\text{Ext}_A^\square(?, S)$ および $\text{Ext}_A^\square(S, ?)$ の計算に帰着される.

実際に練習問題として, 次を与える.

練習問題 7.6. (1) 次は同値であることを示せ:

① $\text{proj.dim } M \leq n$; ② 任意の単純加群 S に対して, $\text{Ext}_A^{n+1}(M, S) = 0$.

(2) 次は同値であることを示せ:

① $\text{inj.dim } M \leq n$; ② 任意の単純加群 S に対して, $\text{Ext}_A^{n+1}(S, M) = 0$.

これによって, 次の対称性を得る.

命題 7.7. $\text{proj.dim}(A/\text{rad } A)_A = \text{inj.dim}(A/\text{rad } A)_A$

証明. $A/\text{rad } A$ は単純加群すべての直和である. そこで, $\text{Ext}_A^n(A/\text{rad } A, A/\text{rad } A)$ を考えて, 練習問題 7.6 を適用すればよい. □

練習問題 7.8. 任意の加群 M に対して, $\text{proj.dim } M \leq \text{proj.dim}(A/\text{rad } A)$ が成り立つことを示せ: 完全列 $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ に対して, $\text{proj.dim } M \leq \sup\{\text{proj.dim } L, \text{proj.dim } N\}$ であることを示し, ルビー列を考えればよい.

参考 26. 上記のように, 加群圏 $\text{mod } A$ はアーベル圏というだけでなく, 各対象に対して (有限な) ‘長さ’ という概念も付加されている. このように, ‘長さ’ の概念も付加されている圏を長さ圏 (*length category*) という.

7.1.3 支配次元

右加群 M の極小入射分解を $0 \rightarrow M \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots$ とおく. このとき, M の支配次元 $\text{dom.dim } M$ を次で定義する:

$$\text{dom.dim } M := \inf\{\ell \geq 0 \mid I_\ell \text{は射影的でない}\}.$$

練習問題 7.9. 次が同値であることを示せ.

- (1) $\text{dom.dim } A_A \geq 1$;
- (2) 忠実*²²な射影的-入射的 A 加群が存在する.

正則加群の支配次元は左右対称であることが知られている.

定理 7.10. [M, Theorem 4] $\text{dom.dim } A_A = \text{dom.dim } {}_A A$

A が自己入射的多元環ならば, $\text{dom.dim } A_A = \infty$ である. 一方, その逆が正しいかは知

*²² 加群 M が忠実 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \text{Ann}(M_A) = 0 \iff$ 単射準同型 $A \rightarrow M'$ ($M' \in \text{add } M$) が存在する.

られていない.

予想 7.11 (Nakayama Conjecture, NC). $\text{dom.dim } A_A = \infty$ ならば, A は自己入射的.

7.2 多元環に付随する次元

7.2.1 大域次元

A の大域次元 (*global dimension*) $\text{gl.dim } A$ を次で定義する:

$$\text{gl.dim } A := \sup\{\text{proj.dim } M \mid M \in \text{mod } A\}.$$

注意 27. 上の定義では, すべての右加群 M の射影次元を測ることで, A の大域次元としているから, 特に, 右大域次元というべきである. 一方, 双対的に, すべての左加群の射影次元の上限を左大域次元とよぶ.

A^{op} によって, A の反転環を表す: つまり, A^{op} はベクトル空間としては A と一致し, 元 a, b の A^{op} での積は, $a \cdot b := ba$ によって定義される. その加群圏 $\text{mod } A^{\text{op}}$ は, (有限次元) 左 A 加群の圏と圏同値である. そのため, $\text{mod } A^{\text{op}}$ の対象は, 左 A 加群と考えて差し支えない.

A が体上有限次元多元環のとき, 右大域次元と左大域次元は一致する.

定理 7.12. $\text{gl.dim } A = \sup\{\text{proj.dim } U \mid U \in \text{mod } A^{\text{op}}\}$

証明. 次のように等号を得る:

$$\begin{aligned} \text{gl.dim } A &\stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\text{proj.dim } M \mid M \in \text{mod } A\} \\ &\stackrel{7.8}{=} \text{proj.dim}(A/\text{rad } A)_A \\ &\stackrel{7.7}{=} \text{inj.dim}(A/\text{rad } A)_A \\ &\stackrel{(\clubsuit)}{=} \text{proj.dim}_A(A/\text{rad } A) \\ &\stackrel{7.8}{=} \sup\{\text{proj.dim } U \mid U \in \text{mod } A^{\text{op}}\}. \end{aligned}$$

□

練習問題 7.13. 上の証明における等号 (\clubsuit) をきちんと理解せよ. ($A/\text{rad } A$ の, 右加群としての入射次元と左加群としての射影次元が一致する.) ヒント: 練習問題 5.21 を用いる.

練習問題 7.14. $\text{gl.dim } A = 0 \iff A$ は半単純であることを示せ.

遺伝的 (hereditary) 多元環^{*23}は大域次元を用いて, 次のように理解できる.

命題 7.15. A が遺伝的であることと $\text{gl.dim } A \leq 1$ であることは同値である.

遺伝的多元環の定義は, 左右の差があるように思える: つまり, 定義からすると, 右遺伝的多元環と左遺伝的多元環は分ける必要がある. しかし, 定理 7.12 および命題 7.15 より, それらは一致する.

系 7.16. 遺伝的多元環の任意の左イデアルは射影的である.

有限高次の大域次元を持つ多元環も特殊なものであり, 次が成り立つ.

命題 7.17. 大域次元有限な多元環は, 岩永-ゴーレンシュタイン多元環である.

証明. 左正則加群の入射次元について,

$$\text{inj.dim } {}_A A = \text{proj.dim } D A_A \leq \text{gl.dim } A < \infty$$

が成り立つ. 右についても同様. □

次のアウスランダー (Auslander) 多元環も非常に重要な多元環である: [卒 16, 付録 B] においても紹介したが, ここで正確な定義を載せる.

定義 7.18. A がアウスランダー多元環であるとは, $\text{gl.dim } A \leq 2 \leq \text{dom.dim } A_A$ を満たすときにいう.

アウスランダー多元環はホモロジー的な性質を持つ多元環である.

(同型を除いて) 有限個の直既約加群しか持たない多元環を有限表現型という: これは表現論的な特徴である.

次がとても興味深い.

定理 7.19. 基本的なアウスランダー多元環は, 基本的な有限表現型多元環と (同型を除いて) 一対一に対応する.

証明. (i) A を有限表現型多元環とする. 直既約加群は有限個しかないから, それらを M_1, \dots, M_n とおき, $M := M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ とする. このとき, $B := \text{End}_A(M)$ がアウスランダー多元環になることを示す.

^{*23} (定義を思い出すと) 遺伝的多元環とは, 右イデアルがすべて射影的であるときにいう.

まず、関手 $F := \text{Hom}_A(M, -)$ は圏同値 $\text{mod } A \rightarrow \text{proj } B$ を引き起こすに注意する ($\text{mod } A = \text{add } M$ と定理 6.6).

$\text{gl.dim } B \leq 2$: U を右 B 加群とし、 U の射影表示を取る: $P_1 \xrightarrow{\varphi} P_0 \rightarrow U \rightarrow 0$. F は圏同値 $\text{mod } A \rightarrow \text{proj } B$ を引き起こすから、 $\varphi : P_1 \rightarrow P_0$ に対して、 A 加群の準同型 $f : N_1 \rightarrow N_0$ を以下を満たすように取ることができる:

$$- P_i = FN_i \quad - \varphi = Ff \quad (\text{正確には、同型と可換図式を用いる.})$$

そこで、 $N = \text{Ker } f$ とおくと、 A は有限表現型より、 N, N_1, N_0 は $\text{add } M$ に属す. ゆえに、 FN, FN_1, FN_0 は射影的な B 加群である. このように、 U の射影分解

$$0 \rightarrow FN \rightarrow FN_1 \xrightarrow{\varphi} FN_0 \rightarrow U \rightarrow 0$$

を得るから、 $\text{proj.dim } U \leq 2$ となる. よって、 $\text{gl.dim } B \leq 2$ が従う.

$\text{dom.dim } B \geq 2$: M の入射分解を $0 \rightarrow M \rightarrow I_0 \rightarrow I_1$ とすると、 B 加群の完全列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, M) \rightarrow \text{Hom}_A(M, I_0) \rightarrow \text{Hom}_A(M, I_1) \quad (7.2)$$

を得る.

以下を示す.

主張. 入射 A 加群 I に対して、 FI は入射 B 加群である.

証明. U を B 加群とする. 上で見たように、 U の射影分解を次のように取れる:

$$0 \rightarrow FN_2 \rightarrow FN_1 \rightarrow FN_0 \rightarrow U \rightarrow 0$$

ここで、 $0 \rightarrow N_2 \rightarrow N_1 \rightarrow N_0$ は A 加群の完全列である. この 2 つの列に $\text{Hom}_B(-, FI)$ および $\text{Hom}_A(-, I)$ を適用すると、次の複体の間の同型を得る (定理 6.6):

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}_B(FN_0, FI) & \longrightarrow & \text{Hom}_B(FN_1, FI) & \longrightarrow & \text{Hom}_B(FN_2, FI) & \longrightarrow & 0 \\ \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq & & \\ \text{Hom}_A(N_0, I) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(N_1, I) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(N_2, I) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

I は入射的だから、この図式の下段は完全列である. したがって、上段も完全列になる. このように、 $\text{Ext}_B^1(U, FI) = 0$ を得るから、 FI は入射的であることがわかる. ■

このことから、(7.2)において、 FI_0 および FI_1 は入射的である. また、 $I_0, I_1 \in \text{add } M$ より、 FI_0 および FI_1 は射影的でもある. よって、 $\text{dom.dim } B \geq 2$ が従う.

(ii) B をアウスランダー多元環とし、 P を射影的かつ入射的な直既約 B 加群すべての直和とする. $C := \text{End}_B(P)$ とおき、 C が有限表現型であることを示す. 定理 6.6 よ

り, 圏同値 $\text{mod } C \simeq \text{mod } P$ を得る: $\text{mod } P := \{U \in \text{mod } B \mid \text{完全列 } P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow U \rightarrow 0 \text{ (} P_0, P_1 \in \text{add } P \text{) が取れる.}\}$.

主張. $\text{mod } P = \text{inj } B$

証明. まず, $\text{inj.dim } B_B = \text{proj.dim } {}_B DB \leq \text{gl.dim } B \leq 2$ であることに注意すると, B の (極小) 入射分解 $0 \rightarrow B \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow 0$ を得る. さらに, $\text{dom.dim } B_B \geq 2$ より, I_0, I_1 は射影的である.

“ \supseteq ” I を直既約入射加群とすると, I はある単純加群 S の入射包絡である. $\text{proj.dim } S \leq 2$ より, 以下のような場合分けを考える:

- (a) $\text{proj.dim } S = 0$: S は B の直和因子より, その入射包絡 I は I_0 の直和因子になる. よって, I は射影的であり, $\text{mod } P$ に属す.
- (b) $\text{proj.dim } S = 1$: B の入射分解に $\text{Hom}_B(S, -)$ を適用して, 次の図式を考える:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_B(S, B) & \longrightarrow & \text{Hom}_B(S, I_0) & \longrightarrow & \text{Hom}_B(S, I_1) \\
 & & & & \searrow & & \nearrow \\
 & & & & & \bullet & \\
 & & & & & \downarrow & \\
 & & & & & \text{Ext}_B^1(S, B) &
 \end{array}$$

$\text{proj.dim } S = 1$ より, $\text{Ext}_B^1(S, B) \neq 0$. これは $\text{Hom}_B(S, I_1) \neq 0$ を導く. ゆえに, I_1 は直和因子として I を持ち, $I \in \text{mod } P$ が従う.

- (c) $\text{proj.dim } S = 2$: (b) と同様に議論すると, I は I_2 の直和因子であることがわかる (♣). したがって, I の射影表示を $P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow I \rightarrow 0$ とすると, P_0 および P_1 はそれぞれ, I_0 および I_1 の直和因子となる: よって, $I \in \text{mod } P$.

“ \subseteq ” $U \in \text{mod } P$ とすると, U の射影表示

$$P_1 \xrightarrow{f} P_0 \rightarrow U \rightarrow 0$$

を得る: 特に, P_0, P_1 は入射的. よって, 任意の B 加群 V は $\text{proj.dim } V \leq \text{gl.dim } B \leq 2$ を満たすから,

$$\text{Ext}_B^1(V, U) \simeq \text{Ext}_B^2(V, \text{Im } f) \simeq \text{Ext}_B^3(V, \text{Ker } f) = 0,$$

ゆえに, U は入射的である. ■

結果的に, $\text{mod } C \simeq \text{inj } B$ となり, 直既約な入射 B 加群は (同型を除いて) 高々有限個だから, C は有限表現型であることがわかる.

(iii) 上の (i) および (ii) において, $A \simeq C$ であることを示す.

主張. $P \simeq F(DA)$

証明. $F : \text{inj } A \rightarrow \text{pi } B$ が圏同値になることを示せばよい. ここで, $\text{pi } B$ は射影的かつ入射的な B 加群からなる $\text{mod } B$ の充満部分圏である. このために, F が稠密であることを証明する. J を射影かつ入射 B 加群とする. $F : \text{mod } A \rightarrow \text{proj } B$ は圏同値だから, $J \simeq FN$ となる A 加群 N が取れる. A 加群の完全列 $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ に対して, 完全列 $0 \rightarrow FX \rightarrow FY \rightarrow FZ$ を得るが, それぞれに $\text{Hom}_A(-, N)$ および $\text{Hom}_B(-, FN)$ を適用すると, 複体の間の同型

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(Z, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(Y, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(X, N) \longrightarrow 0 \\ & & \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_B(FZ, FN) & \longrightarrow & \text{Hom}_B(FY, FN) & \longrightarrow & \text{Hom}_B(FX, FN) \longrightarrow 0 \end{array}$$

が成り立つ. 特に, $J \simeq FN$ は入射的より, この図式の下段は完全列である. したがって, 上段も完全列となり, N が入射的であることがわかる. ■

よって,

$$C := \text{End}_B(P) \simeq \text{End}_B(F(DA)) \simeq \text{End}_A(DA) \simeq A.$$

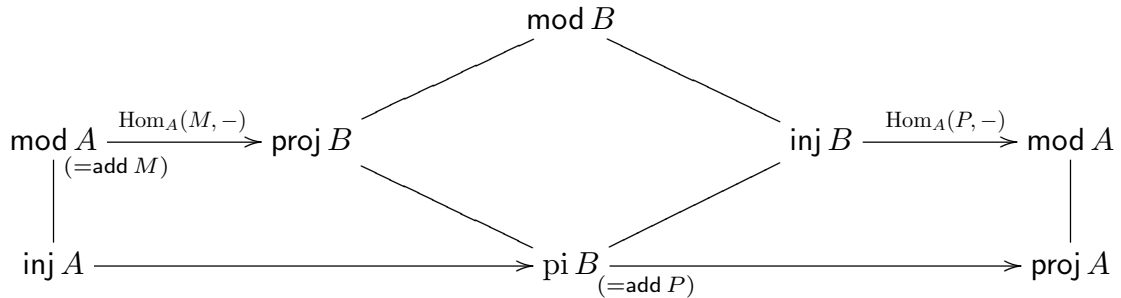
(iv) (ii) における C は有限表現型より, 直既約加群すべての直和を Λ とおいたとき, $B \simeq \text{End}_C(\Lambda)$ であることを示す. (ii) での圏同値 $G := \text{Hom}_B(P, -) : \text{inj } B \rightarrow \text{mod } C$ において, $\text{inj } B = \text{add } DB$ および $\text{mod } C = \text{add } \Lambda$ であることを考慮して, $DB \mapsto \Lambda$ であることが従う. よって,

$$\text{End}_C(\Lambda) \simeq \text{End}_C(G(DB)) \simeq \text{End}_B(DB) \simeq B.$$

結果的に, 基本的なアウスランダー多元環と基本的な有限表現型多元環との一対一対応が確立された. □

参考 28. 上の証明より, 有限表現型多元環 A およびそのアウスランダー多元環 B に付随

する各種の圏の間の圏同値が得られた:



練習問題 7.20. 上の証明における (♣) をきちんとフォローせよ.

例 7.21. Auslander algebras of A_n and $K[x]/(x^n)$

参考 29 (表現論的性質 v.s. ホモロジー的性質). 定理 7.19 で見たように, ホモロジー的性質によって与えられたアウスランダー多元環が, 表現論的性質を持つ有限表現型多元環ときれいに対応した. このように, ホモロジー的性質によってどのような表現論的性質を持つ多元環が得られるか? また, その逆はどうか? という考察が, 多元環の表現論における最も重要な研究の一つである.

7.2.2 表現次元

A の表現次元 (representation dimension) $\text{rep.dim } A$ を次で定義する:

$$\text{rep.dim } A := \inf \{ \text{gl.dim } \text{End}_A(M \oplus A \oplus DA) \mid M \in \text{mod } A \}.$$

ここで, 加群 $M \oplus A \oplus DA$ を見る意味について考察してみよう.

定義 7.22. 右 A 加群 M が生成加群であるとは, 任意の A 加群 N に対して, 全射準同型 $M' \rightarrow N$ ($M' \in \text{add } M$) が存在するときという. 双対的に, 余生成加群を定義する.

明らかに, (余) 生成加群は直和因子に A (DA) を含み, 逆も成り立つ. したがって, 表現次元とは, 生成-余生成加群の自己準同型多元環の大域次元を測っていることになる. このように, 生成-余生成加群の自己準同型多元環を観察することも重要になる. 例えば, A が有限表現型のとき, 直既約加群すべての直和は生成-余生成加群となり, その自己準同型多元環はアウスランダー多元環であることを見た (定理 7.19). このように, 表現次元はアウスランダー多元環の ‘高次元版’ を考察するための道具である.

ここで, ‘高次元版’ であることを見るために, 次を与える: ホモロジー的性質で定義された表現次元の表現論的性質である.

命題 7.23. A が有限表現型であることと $\text{rep.dim } A \leq 2$ であることは同値である。

証明. A を有限表現型と仮定する. M を直既約 A 加群すべての直和とすると, M は生成-余生成加群であり, $\text{gl.dim End}_A(M) \leq 2$ が成り立つ (定理 7.19).

$\text{rep.dim } A \leq 2$ と仮定する. このとき, $\text{gl.dim End}_A(M) \leq 2$ となる生成-余生成加群 M が存在する. N を A 加群とする. M は余生成加群より, 完全列 $0 \rightarrow N \rightarrow M_0 \rightarrow M_1$ ($M_0, M_1 \in \text{add } M$) が取れる. よって, B 加群の完全列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(M, M_1) \xrightarrow{\varphi} \text{Hom}_A(M, M_0)$$

を得る. $\text{gl.dim End}_A(M) \leq 2$ より, $\text{proj.dim Coker } \varphi \leq 2$. このとき, $\text{Hom}_A(M, N)$ が射影的であることが従い, N は $\text{add } M$ に属することがわかる (定理 6.6). このように, $\text{mod } A = \text{add } M$ となり, A は有限表現型である. \square

このように, 表現次元を測ることで, 「有限表現型からどのくらい離れているか?」を観察することができる.

多元環の表現次元をいくつか計算してみると, だいたい $\text{rep.dim } A \leq 3$ になってしまう. 表現次元が定義されてから長らく, $\text{rep.dim } A > 3$ となる多元環が見つかっていなかったが, ルキエ (Rouquier) によってそのような例も発見された.

また, 表現次元の有限性も知られていなかったが, 任意の体上有限次元多元環は有限な表現次元を持つことが, 伊山によって示されている [I].

参考 30. 上で見たように, 生成-余生成加群の自己準同型多元環を見ることは重要な役割を果し, これから多々使うことがある. そこで, 簡単な考察を載せておく.

M を A 加群とし, $B := \text{End}_A(M)$ とおく. このとき, M は自然に左 B 加群になる.

- (1) M_A が生成加群ならば, ${}_B M$ は射影的である.
- (2) M_A が余生成加群ならば, ${}_B M$ は入射的である.
- (3) M_A が生成-余生成加群ならば, $\text{dom.dim End}_A(M) \geq 2$ である.

証明. (1) ${}_B M \simeq {}_B \text{Hom}_A(A, {}_B M) \leq \bigoplus {}_B \text{Hom}_A(M, {}_B M) = {}_B B$. ただし, $Y \leq \bigoplus X$ によって, Y は X の直和因子であることを表す.

$$(2) {}_B M \simeq {}_B D \text{Hom}_A({}_B M, DA) \leq \bigoplus {}_B D \text{Hom}_A({}_B M, M) = {}_B DB.$$

(3) M_A の射影表示を $P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ とすると, 左 B 加群の完全列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, {}_B M) \rightarrow \text{Hom}_A(P_0, {}_B M) \rightarrow \text{Hom}_A(P_1, {}_B M)$$

が得られる. $\text{Hom}_A(P_i, {}_B M)$ が $\text{add } {}_B M$ に属することに注意すれば, (1) および (2) より, これは射影的かつ入射的な左 B 加群であることがわかる. このように, 上の列は ${}_B B$ の入射余表示であり, $\text{dom.dim } B \geq 2$ が従う (定理 7.10 参照). ■

7.2.3 有限性次元

A の有限性次元 (*finitistic dimension*) $\text{fin.dim } A$ を次で定義する:

$$\text{fin.dim } A := \sup\{\text{proj.dim } M \mid M \in \text{mod } A, \text{proj.dim } M < \infty\}.$$

次の未解決問題を紹介する.

予想 7.24 (Finitistic Dimension Conjecture, FDC). $\text{fin.dim } A < \infty$

この予想は, 多元環の表現論における様々な未解決問題と密接に関連している. 特に, 他の予想よりも強いことを主張しており, この予想が解決すれば多くの予想もポジティブに解決することが知られている.

定理 7.25. 次の 2 つが成り立つ:

- (1) FDC は正しい \implies GSC は正しい (2) FDC は正しい \implies NC は正しい

証明. (1) $\text{inj.dim } {}_A A < \infty$ と仮定する. このとき, $\text{proj.dim } D A_A < \infty$ である. よって, 正則右加群 A_A の極小入射分解 $0 \rightarrow A \rightarrow I_0 \xrightarrow{f_0} I_1 \xrightarrow{f_1} \dots$ を見たとき, $A_i := \text{Ker } f_i$ はすべて有限射影次元を持つ (定理 5.15). $d := \text{fin.dim } A < \infty$ より, $\text{proj.dim } A_i \leq d$ である. このとき, 方法 5.36 (の双対版) を用いて,

$$\text{Ext}_A^1(A_{d+1}, A_d) \simeq \text{Ext}_A^2(A_{d+1}, A_{d-1}) \simeq \dots \simeq \text{Ext}_A^{d+1}(A_d, A) = 0,$$

つまり, 完全列 $0 \rightarrow A_d \rightarrow I_d \rightarrow A_{d+1} \rightarrow 0$ は分裂する. したがって, A_d は入射的になり, $\text{inj.dim } A_A \leq d < \infty$ を得る. □

練習問題 7.26. 上の定理の (2) を証明せよ.

前に表現次元について扱い, 多くの多元環の表現次元が 3 以下であることは述べた. これに関連して, 次のことが知られている.

定理 7.27. $\text{rep.dim } A \leq 3 \implies \text{fin.dim } A < \infty$: つまり, 表現次元 3 以下ならば FDC は正しい.

7.2.4 剛性次元

最近導入された剛性次元を紹介する [CFKKY].

A の剛性次元 (*rigidity dimension*) $\text{rig.dim } A$ を次で定義する:

$$\text{rig.dim } A := \sup\{\text{dom.dim } \text{End}_A(M)\};$$

ただし, M は $\text{gl.dim } \text{End}_A(M) < \infty$ となる生成-余生成加群を動く. (表現次元の有限性から, このような M は必ず存在する.)

定義より, 半単多元環の剛性次元は無限である. また, 任意の多元環の剛性次元は 2 以上であることがわかる (参考 30).

例 7.28. A を半単純でない局所自己入射的多元環とする. このとき, $\text{rad}^3 A = 0$ ならば, $\text{rig.dim } A = 2$ である.

証明. この状況において, 任意の射影的でない加群 X は非自明な自己拡大を持つ (つまり, 分裂しない完全列 $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow 0$ が存在する) ことを用いる [H, Theorem 3.4].

M を $\text{gl.dim } \text{End}_A(M) < \infty$ となる生成-余生成加群とする: $\text{dom.dim } \text{End}_A(M) = 2$ であることを示す. □

次の定理も知られている.

定理 7.29. [CFKKY, Theorem 3.1] A は自己入射的でないとする.

(1) $\text{rig.dim } A \leq \sup\{n \geq 0 \mid \text{Ext}_A^i(DA, A) = 0, 1 \leq i \leq n\} + 2$. また, $A \oplus DA$ の自己準同型多元環が有限大域次元を持つとき, この等号が成り立つ.

(2) $\text{rig.dim } A \leq \text{inj.dim } A_A + 1 \leq \text{gl.dim } A + 1$

証明. (1) $d := \sup\{n \geq 0 \mid \text{Ext}_A^i(DA, A) = 0, 1 \leq i \leq n\}$ とおく. □

しかし, いつでも $\text{rig.dim } A$ が有限になるかどうかはわかっていない.

問題 7.30. $\text{rig.dim } A < \infty$ か?

群環の場合はよく理解されている.

定理 7.31. [CFKKY, Theorem 3.7] 有限群 G と K の標数 p に対して, 次は同値である:

(1) $\text{rig.dim } KG < \infty$; (2) p は G の位数 $|G|$ の約数である.

特に, この場合, $\text{rig.dim } KG \leq |G|$ が成り立つ.

ここで, ([卒 16] でも学んだが) 上の定理の条件 (2) は, 「 KG は半単純でない」ことと必要十分であることを思い出しておく.

8 傾理論

傾理論は, 森田理論の一般化として導入された. 森田理論は二つの多元環の加群圏全体を観察するのに対して, 傾理論は加群圏の一部を比較することができる. これにより, 森田同値より広い“似ている”という概念を考えることができる. 実際, 傾理論は導来同値を誘導し, 加群圏より広い導来圏 (導来圏 \supseteq 加群圏) の圏構造を観察する理論である. つまり上で, 「加群圏の一部」と述べたが, 導来圏まで広げると全く構造が等しいものを観察していることになる. 導来圏はとても難しいものであるため, ここで言及することはしないが, 感覚は伝わるように書くつもり. なお, 傾理論は傾斜理論とも呼ばれる. (K 理論という別の理論もあるため, 区別することがある. この場合は英語で, ‘tilting theory’ というべきだろう.)

| 森田理論 | 傾理論 |
|--------|--------------------|
| 加群圏 | 加群圏の一部 導来圏 |
| 森田同値 | 導来同値 |
| 射影生成加群 | 傾加群 傾複体 準傾複体 |

8.1 傾加群

まずは, 傾理論において中心的な役割を果たす傾加群を定義しよう.

定義 8.1. A 加群 T が傾加群であるとは, 次の 3 条件を満たすときにいう:

- (i) 任意の正の整数 $i > 0$ に対して, $\text{Ext}_A^i(T, T) = 0$;
- (ii) T は有限射影次元を持つ;

(iii) 次のような完全列が存在する.

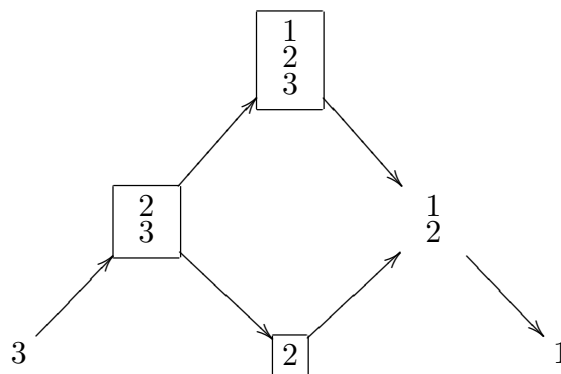
$$0 \rightarrow A \rightarrow T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow \cdots \rightarrow T_n \rightarrow 0 \quad (T_i \in \text{add } T)$$

特に, $\text{proj.dim } T \leq 1$ となるとき, T を古典的という.

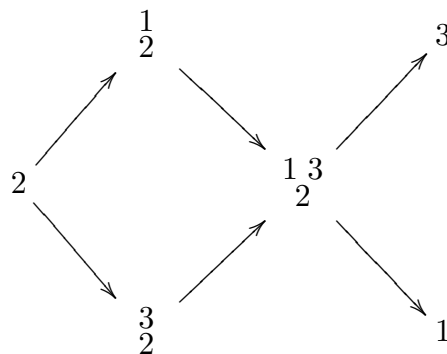
定義より, 射影生成加群は明らかに傾加群である.

簡単な例で実際に計算してみよう.

例 8.2. A を次のクイバーで与えられる道多元環とする: $1 \xrightarrow{x} 2 \xrightarrow{y} 3$. この多元環の AR クイバー^{*24}は次のようになる.



例えば, 上の四角で囲まれた 3 つの直既約加群の直和 T は, (古典的な) 傾加群である. また, T の自己準同型多元環 B は次で与えられる: $1 \rightarrow 2 \leftarrow 3$. さらに, B の AR クイバーは次である:



なんとなく, A と B の AR クイバーは似ているだろうか?

^{*24} AR (Auslander-Reiten) クイバーについてはここでは言及しない: [DK, Section 11.6] や [ARS] などを参照. クイバーが多元環の構造を視覚的に表しているのに対して, AR クイバーは加群圏の構造を視覚化している. なお, どちらもクイバーが付くため, 多元環のクイバーをガブリエル (Gabriel) クイバーと呼び, 区別することがある.

練習問題 8.3. 上の例で与えた T が実際に (古典的な) 傾加群であることを確かめよ.

参考 31. 上の例で与えた T は特に, APR (Auslander-Platzek-Reiten) 傾加群 [APR] と呼ばれる. (8.5 節参照)

練習問題 8.4. 例 8.2 における多元環 A の (基本的な) 傾加群をすべて求め, それぞれの自己準同型多元環 B のクイバーを計算せよ. また, それぞれの B の AR クイバーを書け.

参考 32. 一般に, クイバー $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n$ により与えられる多元環の傾加群は, ある容易な方法によってすべて分類することができる (正 $n+2$ 角形の三角形分割) [Ar].

傾加群は対称的な性質を持つ [Mi, Theorem 1.5].

定理 8.5. T_A を傾加群とし, $B := \text{End}_A(T)$ とおく. このとき, 次が成り立つ.

- (1) ${}_B T$ もまた, 傾加群である.
- (2) $A \rightarrow \text{End}_{B^{\text{op}}}(T)^{\text{op}}$ ($a \mapsto [t \mapsto ta]$) は環同型を引き起こす.
- (3) T_A の射影次元は, 定義 8.1 (iii) における最小の n と一致する.

証明. T の (極小) 射影分解を

$$0 \rightarrow P_\ell \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow T \rightarrow 0$$

とし ($\ell = \text{proj.dim } T_A$), 定義 8.1 (iii) の記号もそのまま用いる.

(1) T の射影分解に $\text{Hom}_A(-, T)$ を施して, $\text{Ext}_A^{>0}(T, T) = 0$ より, 左 B 加群の完全列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(T, T) \rightarrow \text{Hom}_A(P_0, T) \rightarrow \dots \rightarrow \text{Hom}_A(P_\ell, T) \rightarrow 0$$

を得る. ${}_B \text{Hom}_A(A, T) \simeq {}_B T$ であることに注意すれば, これは ${}_B B$ の $\text{add } {}_B T$ による分解を与えていることがわかる.

また, 定義 8.1 (iii) に $\text{Hom}_A(-, T)$ を施せば, 左 B 加群の完全列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(T_n, T) \rightarrow \dots \rightarrow \text{Hom}_A(T_0, T) \rightarrow \text{Hom}_A(A, T) \rightarrow 0 \quad (8.1)$$

が得られるが, これは ${}_B T$ が有限射影次元を持つことを示している.

最後に, $\text{Ext}_{B^{\text{op}}}^{>0}(T, T) = 0$ を示す. まず, $T_A \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{B^{\text{op}}}(\text{Hom}_A(T, T), T)_A$ ($t \mapsto [f \mapsto f(t)]$) であることに注意する. Ext の定義に従って確認するために, 完全列 (8.1) に $\text{Hom}_{B^{\text{op}}}(-, T)$ を施す. このとき, 複体の間の可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{B^{\text{op}}}(\text{Hom}_A(T_0, T), T) & \longrightarrow & \text{Hom}_{B^{\text{op}}}(\text{Hom}_A(T_1, T), T) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow \text{Hom}_{B^{\text{op}}}(\text{Hom}_A(T_n, T), T) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & T_0 & \longrightarrow & T_1 & \longrightarrow & \dots \longrightarrow T_n \longrightarrow 0 \end{array}$$

を得る. 先の注意から, $\text{Hom}_{B^{\text{op}}}(\text{Hom}_A(T_i, T), T) \simeq T_i$ である. よって,

$$\text{Ext}_{B^{\text{op}}}^i(T, T) = H^i(0 \rightarrow T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow \cdots \rightarrow T_n \rightarrow 0) \simeq 0 \quad (i \geq 1)$$

であることがわかる.

(2) 上の最後の議論から, $\text{Ext}_{B^{\text{op}}}^0(T, T) \simeq A$ を得る. 一方, $\text{Hom}_{B^{\text{op}}}(\text{Hom}_A(T_0, T), T) \rightarrow \text{Hom}_{B^{\text{op}}}(\text{Hom}_A(T_1, T), T)$ の核は, $\text{Hom}_{B^{\text{op}}}(\text{Hom}_A(A, T), T)$ より, 右 A 加群としての同型 $\Phi: A \xrightarrow{\simeq} \text{Hom}_{B^{\text{op}}}(T, T)$ ($a \mapsto [t \mapsto ta]$) が得られる (${}_B T \simeq {}_B \text{Hom}_A(A, T)$ に注意).

そこで, $\Phi: A \rightarrow \text{End}_{B^{\text{op}}}(T)^{\text{op}}$ が環準同型であることを示せばよい. $a \in A$ に対して, 左 B 準同型 $[t \mapsto ta]$ を f_a で表す. $a, b \in A, t \in T$ とする.

$$\Phi(ab)(t) = f_{ab}(t) = tab = f_b f_a(t) = (f_a \diamond f_b)(t) = (\Phi(a) \diamond \Phi(b))(t)$$

を得る. ここで, \diamond は $\text{End}_{B^{\text{op}}}(T)$ での積を表す. よって, $\Phi(ab) = \Phi(a) \diamond \Phi(b)$ であるから, Φ が環同型であることがわかる.

(3) 定義 8.1 (iii) の各射の像を A_i とおく ($A_0 := A$). その完全列から,

$$\text{Ext}_A^1(T_n, A_{n-1}) \simeq \text{Ext}_A^2(T_n, A_{n-2}) \simeq \cdots \simeq \text{Ext}_A^n(T_n, A)$$

を得る. もし, $\ell < n$ ならば, 定義 8.1 (iii) より短い完全列を得られるから, $\ell \geq n$ としてよい.

一方, (1) から, ${}_B T$ は傾加群であり, ${}_B T$ の射影分解, および, ${}_B B$ の $\text{add } T$ による分解

$$0 \rightarrow Q_n \rightarrow \cdots \rightarrow Q_0 \rightarrow T \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow B \rightarrow T'_0 \rightarrow \cdots \rightarrow T'_\ell \rightarrow 0$$

を得ている. このとき, 初めに最小の n を取っておけば, 前者の完全列は ${}_B T$ の極小射影分解を与える: $\text{Hom}_{B^{\text{op}}}(-, T)$ を施すと定義 8.1 (iii) に戻る. 同様に, 後者の完全列もこれ以上短くならない. したがって, 先の議論より, $\ell = n$ を得る. \square

加群 M に対して, M の直既約分解における非同型な直既約因子の個数を $|M|$ と書く. 傾加群の基本的かつ重要な性質を述べておく [Mi, Theorem 1.19, Corollary 1].

定理 8.6. 傾加群 T は, $|T| = |A|$ を満たす.

これを理解するために, グロタンディーク (Grothendieck) 群を導入する.

8.1.1 グロタンディーク群

\mathcal{C} をクルル-シュミット^{*25}完全圏^{*26}(三角圏) とする. \mathcal{C} のグロタンディーク群 $K_0(\mathcal{C})$ とは, 対象 (の同型類) を生成元とする, 関係式 $[L] - [M] + [N] = 0$ をもった加法的アーベル群, 特に \mathbb{Z} 加群である. ここで, $[M]$ は対象 M を含む同型類を表し, $[L] - [M] + [N] = 0$ は完全列 (三角) $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ ($L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow M[1]$) をもつことを意味する.

例 8.7. (1) $\mathcal{C} = \text{mod } A$ とする. 任意の加群はその組成因子で表せるので, $K_0(\text{mod } A)$ の生成系として例えば, (非同型) 単純加群全体の集合 $\{S_i\}$ を取ることができる. さらに, 写像 $\gamma : \text{mod } A \rightarrow \mathbb{Z}^{|A|}$ ($S_i \mapsto e_i$: 標準基底) を考えると, 完全列は組成列を積み上げるので, 完全列 $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ に対して, $\gamma(L) - \gamma(M) + \gamma(N) = 0$ が成り立つ. よって, γ は群準同型 $K_0(\text{mod } A) \rightarrow \mathbb{Z}^{|A|}$ を誘導する. したがって, $\{S_i\}$ は一次独立であり, $K_0(\text{mod } A)$ の基底であることがわかる. 結果的に, $K_0(\text{mod } A)$ は階数 $|A|$ の自由加群であり, $K_0(\text{mod } A) \simeq \mathbb{Z}^{|A|}$ である.

(2) $\mathcal{C} = \text{proj } A$ とする (ここでの完全列はすべて分裂する). 上と同様に, 直既約射影加群全体の集合 $\{P_i\}$ は $K_0(\text{proj } A)$ の基底となる. ゆえに, $K_0(\text{proj } A) \simeq \mathbb{Z}^{|A|}$ である.

(3) 自然な関手 $\text{proj } A \rightarrow \text{mod } A$ は, それぞれのグロタンディーク群の間の準同型 $\Phi : K_0(\text{proj } A) \rightarrow K_0(\text{mod } A)$ を誘導する. (1) および (2) から (この基底の取り方で), Φ は \mathbb{Z} 上の $|A|$ 次正方形行列 C_A で表せる. これを A のカルタン (Cartan) 行列とよぶ. 特に, C_A の (i, j) 成分は $\text{Hom}_A(P_i, P_j)$ の次元と一致する.

(4) A が自己入射的のとき, $\text{mod } A$ は三角圏構造をもつ. このとき, $K_0(\text{mod } A)$ は Φ の余核に同型である [TW].

例 8.8. A を次のクイバーと関係式で表される多元環とする:

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{x} \\ \xleftarrow{x} \end{array} 2 \quad x^3 = 0$$

このとき, A は対称 (特に自己入射的) 多元環であり, $K_0(\text{mod } A) \simeq \mathbb{Z}^2 \simeq K_0(\text{proj } A)$ である. A のカルタン行列 C_A は, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ となる. 単因子論を用いて, C_A は同型を通して

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ と書き換えられるため, $K_0(\text{mod } A) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ を得る. 実際には, 頂点 i に対応する

^{*25} 10.1 節参照

^{*26} “完全列” をもつ加法圏

単純加群および直既約射影加群をそれぞれ, S_i および P_i とすると, 射影被覆を数回取ることで,

$$[S_1] = -[\Omega S_1] = [S_2],$$

一方, P_1 の組成因子を見ると,

$$2[S_1] + [S_2] = 0$$

を得るから, $3[S_1] = 0$ となっていることがわかる.

例 8.9. A を次のクイバーと関係式で表される多元環とする:

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{x} \\ \xleftarrow{x} \end{array} 2 \quad x^2 = 0$$

このとき, A は自己入射的多元環であり, $K_0(\text{mod } A) \simeq \mathbb{Z}^2 \simeq K_0(\text{proj } A)$ である. また, $C_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ となるため, $K_0(\underline{\text{mod}} A) \simeq \mathbb{Z}$ となる.

例 8.10. A を $(C_3 \times C_3) \times C_2$ の群環 ($p=3$) とする. A は対称多元環であり, クイバー

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} 2$$

で与えられる. さらに, $C_A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ となり, $K_0(\underline{\text{mod}} A) \simeq \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ を得る.

例 8.11. A を例 8.9 の自明拡大 (またはクロネッカー多元環の自明拡大) とする; よって対称多元環. これは例 8.10 と同一のクイバーをもつが, それとは関係式が異なり, $C_A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ となる. よって, $K_0(\underline{\text{mod}} A) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ となる.

参考 33. 数年前に当時の共著者であるアーロン・チャン氏から, 次の疑問を投げかけられた.

疑問 8.12. A が自己入射的多元環のとき, $K^b(\text{proj } A)$ が (準) 傾離散 $[A]$ であること (♠) と $K_0(\underline{\text{mod}} A)$ が有限群であること (♣) はどのくらい関係があるか?

(この問題は, $K^b(\text{proj } A)$ における傾理論と $K_0(\underline{\text{mod}} A)$ の “K 理論” を繋ぐものであり, 非常に興味深い.) 結論を言うと, 上の 3 例より, これらの間には今のところ関係性は見られない.

| | (♠) | (♣) |
|--------|-----|-----|
| 例 8.8 | ○ | ○ |
| 例 8.9 | ○ | × |
| 例 8.10 | × | ○ |
| 例 8.11 | × | × |

しかし,

- 対称多元環に絞ると, $K^b(\text{proj } A)$ が準傾離散ならば $K_0(\text{mod } A)$ は有限が成り立つことを期待できる.
- ブラウアーグラフ多元環のときは, 準傾離散であることと $K_0(\text{mod } A)$ が有限であることは同値である.

(著者の興味により) 少し横道にずれたが, 本題に戻ろう.

定理 8.6 の証明は, 導来同値を用いているものを多く見る; つまり, A 上の傾加群 T に対して, $K_0(\text{mod } A)$ と $K_0(\text{mod } \text{End}_A(T))$ の同型を示すものである. ここではよりシンプルに, 傾加群 (より一般に準傾対象) が, あるグロタンディーク群の基底を与えることを示す*27.

$\mathcal{T} = K^b(\text{proj } A)$ (より一般に, クルル-シュミット三角圏) とする. 準傾対象の定義については, 8.4 節を参照*28. “傾対象” たちの強さのみ復習しておく:

正則加群 (環自身) \Rightarrow 射影生成加群 \Rightarrow 古典的傾加群 \Rightarrow 傾加群 \Rightarrow 傾複体 \Rightarrow 準傾複体

したがって, 次を示せばよい.

定理 8.13. T を \mathcal{T} の (基本的な) 準傾対象とし, 直既約分解 $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$ を与える. このとき, $\{[T_i]\}$ は $K_0(\mathcal{T})$ の基底をなす. 特に, $|T| = |A|$ を得る.

次の補題を用意する. (証明は与えない.)

補題 8.14. T を \mathcal{T} の準傾対象とする.

(1) 任意の対象 M は, 十分大きな ℓ で, $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, M[> \ell]) = 0$ を満たす.

*27 2018 年 6 月頃のゼミから, ホモトピー圏や導来圏などの三角圏を扱うようになったため, このような方針で示すことにした.

*28 このノートは前から順番に作成しているわけではないので, 内容に前後することがあることに注意.

(2) $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, M[> 0]) = 0$ を満たす対象 M に対して, 次の三角たちが存在する:

$$\begin{array}{ccccccc} M_1 & \longrightarrow & U_0 & \xrightarrow{f_0} & M & \longrightarrow & M_1[1] \\ M_2 & \longrightarrow & U_1 & \xrightarrow{f_1} & M_1 & \longrightarrow & M_2[1] \\ \dots & & & & & & \\ M_\ell & \longrightarrow & U_{\ell-1} & \xrightarrow{f_{\ell-1}} & M_{\ell-1} & \longrightarrow & M_\ell[1] \\ 0 & \longrightarrow & U_\ell & \xrightarrow{f_\ell} & M_\ell & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$U_i \in \text{add } T$ かつ f_i は極小右 $\text{add } T$ 近似.

定理 8.13 の証明. 補題 8.14 より, $\{[T_i]\}$ が $K_0(\mathcal{T})$ の生成元となることがわかる. そこで, 一次独立であることを示す. 次の写像を考える (ここでの \mathcal{T} は対象の類を表す):

$$\gamma: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{Z}^n$$

- ① T_i は標準基底 e_i へ移す;
- ② $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, M[> 0]) = 0$ を満たす M に対して, 補題 8.14 の三角たちを取り,

$$\gamma(M) := \sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i \gamma(U_i);$$

- ③ 任意の M に対して, 補題 8.14 より十分大きな ℓ ($\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, M[> \ell]) = 0$) を取り,

$$\gamma(M) := (-1)^\ell \gamma(M[\ell]).$$

これがアーベル群の間の準同型 $K_0(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{Z}^n$ を誘導することを示せばよい: $[T_i]$ は標準基底に飛ぶから, $\{[T_i]\}$ が基底であることを導く. したがって, 三角 $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ に対して,

$$\gamma(X) - \gamma(Y) + \gamma(Z) = 0 \tag{8.2}$$

となることを証明すればよい.

補題 8.14(2) のような状況のとき, $M \in [0, \ell]$ とかくことにする.

適当にずらして, X, Y, Z は $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, -[> 0]) = 0$ を満たすと仮定してよい. このとき, 次が帰納的に成り立つことを示す.

- (i) $_{\ell}$ $X, Y, Z \in [0, \ell]$ に対して, (8.2) は正しい.
- (ii) $_{\ell}$ $X, Y \in [0, \ell]$ と $Z \in [0, \ell + 1]$ に対して, (8.2) は正しい.

(iii)_ℓ $X \in [0, \ell]$ と $Y, Z \in [0, \ell + 1]$ に対して, (8.2)は正しい.

(i)₀: 条件より, 三角 $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ は分裂し, $Y \simeq X \oplus Z$ を得る.

(i)_ℓ \Rightarrow (ii)_ℓ: 補題 8.14 を $M = Z$ で適用すると, $Z_1 \rightarrow U_0 \rightarrow Z \rightarrow Z_1[1]$ ($U_0 \in \text{add } T$) で $Z_1 \in [0, \ell - 1]$. (i)_ℓ より, $\gamma(Z) - \gamma(U_0) + \gamma(Z_1) = 0$. さらに, 8 面体公理を使って

$$\begin{array}{ccccccc}
 U_0 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Z_1[1] & \longrightarrow & U_0[1] \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 U_0 & \xrightarrow{\varphi} & X[1] & \longrightarrow & W[1] & \longrightarrow & U_0[1] \\
 \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 Z & \longrightarrow & X[1] & \longrightarrow & Y[1] & \longrightarrow & Z[1] \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\
 Z_1[1] & \longrightarrow & W[1] & \longrightarrow & Y[1] & \longrightarrow & Z_1[2]
 \end{array}$$

を得るが, $\varphi = 0$ より, 2 行目は分裂する; $\gamma(W) = \gamma(X) + \gamma(U_0)$. 4 行目の 3 つの項 Z_1, W, Y は $[0, \ell]$ に属すから, (i)_ℓ より $\gamma(Z_1) - \gamma(W) + \gamma(Y) = 0$ を満たす. よって, $\gamma(X) - \gamma(Y) + \gamma(Z) = 0$ を得る.

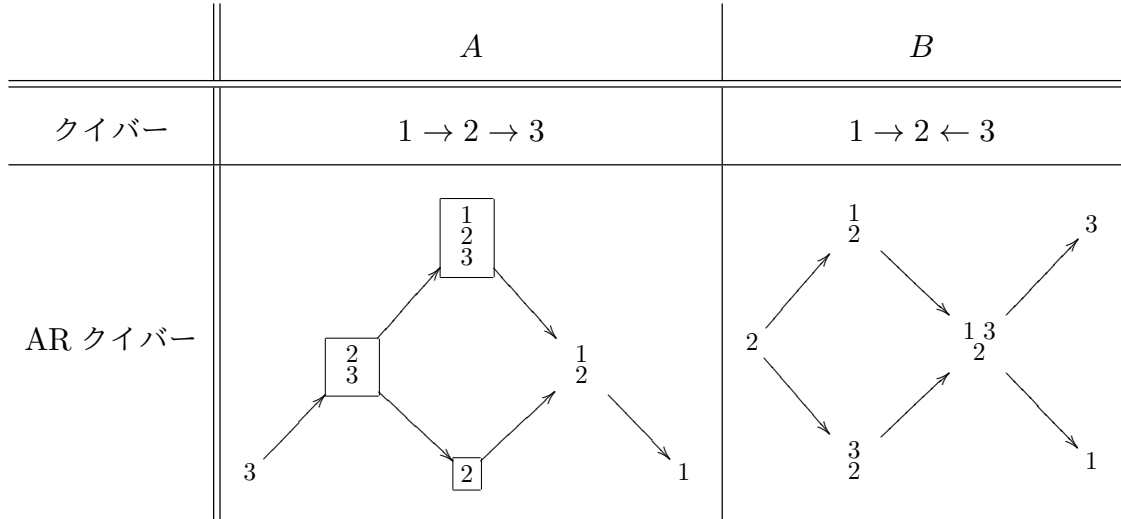
結果的に, $\{[T_i]\}$ は $K_0(\mathcal{T})$ の基底をなすことがわかり, $K_0(\mathcal{T}) \simeq \mathbb{Z}^n$ を得る. このように, 準傾対象の (非同型) 直既約因子の個数は準傾対象の取り方に依らないことがわかり, 特に $(\mathcal{T} = \mathbf{K}^b(\text{proj } A)$ のとき) $|A|$ と一致する. \square

8.2 ブレナー-バトラーの定理

ここでは, 古典的な傾加群による, 加群圏の中のある対応を観察する (詳細は [ASS]). この節の冒頭で述べたように, 傾加群によって加群圏の一部に同様の構造が現れる.

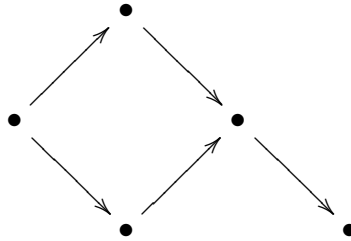
例えば, 例 8.2 を見てみよう.

例 8.15. $A, T_A, B := \text{End}_A(T)$, および, A と B の AR クイバーは次である:



ここで, A の AR クイバー内の四角で囲まれた 3 つの直既約加群の直和が T である.

上の AR クイバーを眺めたとき観察できるのが, 2 つの AR クイバーに共通の形が現れていることである. 実際に, 次の形が両方の AR クイバーに現れている:



このような現象をきちんと記述しているのが, ブレナー-バトラー (Brenner-Butler) の定理である.

加群 X と $i \geq 0$ に対して, 次のように $\text{mod } A$ の充満部分圏を定義する:

$${}^{\perp i} X := \{M \in \text{mod } A \mid \text{Ext}_A^i(M, X) = 0\};$$

$$X^{\perp i} := \{M \in \text{mod } A \mid \text{Ext}_A^i(X, M) = 0\}$$

ブレナー-バトラーの定理で述べられている主張の一つは次である.

定理 8.16 (ブレナー-バトラー). T_A を古典的な傾加群とし, $B := \text{End}_A(T)$ とおく. このとき, Hom 関手 $\text{Hom}_A(T, -)$ は次のような圏同値を誘導する:

$$T^{\perp 1} \xrightarrow{\text{Hom}_A(T, -)} \{U \in \text{mod } B \mid \text{Tor}_1^B(U, T) = 0\}.$$

T が射影生成加群のとき, T^\perp および右辺はそれぞれ加群圏全体 $\text{mod } A$ および $\text{mod } B$ となるので, この場合は森田の定理に他ならない.

定理 8.16 の証明. $F := \text{Hom}_A(T, -)$, $\mathcal{Y} := \{U_B \mid \text{Tor}_1^B(U, T) = 0\}$ とおく. また, $M \in T^\perp$ とする.

(i) 全射な右 $\text{add } T$ 近似 $T' \rightarrow M$ の存在: $f : T' \rightarrow M$ を右 $\text{add } T$ 近似とする. このとき, 次のように核と余核に分解する:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & T' & \xrightarrow{f} & M \\
 & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\
 N & & & M' & & M''
 \end{array}$$

($N := \text{Ker } f$, $M' := \text{Im } f$, $M'' := \text{Coker } f$) この列に F を適用すると,

$$\begin{array}{ccccc}
 & & FT' & \xrightarrow{Ff} & FM \\
 & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\
 FN & & & FM' & & FM'' \\
 & & & \searrow & & \searrow \\
 & & & \text{Ext}_A^1(T, N) & & \text{Ext}_A^1(T, M')
 \end{array}$$

および

① $\text{Ext}_A^1(T, M') \simeq \text{Ext}_A^2(T, N) = 0$; ② $\text{Ext}_A^1(T, M'') \simeq \text{Ext}_A^2(T, M') = 0$
 を得る. よって, すべての $i \geq 0$ において $\text{Ext}_A^i(T, M'') = 0$ となる. ここで, T が古典的な傾加群であることから, 完全列 $0 \rightarrow A \rightarrow T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow 0$ が存在するが, これに $\text{Hom}_A(-, M'')$ を適用すれば, $M'' = 0$ を得る. 結果的に, f は全射であることがわかる.

(ii) $\text{Hom}_A(T, M) \otimes_B T \simeq M$: 次のような対応を考える.

$$\begin{array}{ccc}
 \Phi_M : & \text{Hom}_A(T, M) \otimes_B T & \longrightarrow M \\
 & f \otimes t & \longmapsto f(t)
 \end{array}$$

Φ が well-defined であること, および, A 準同型であることは簡単に確認できる.

Φ が全単射であることを見るために, (i) で得られる完全列を取る:

$$0 \rightarrow N \rightarrow T' \rightarrow M \rightarrow 0.$$

ここで, $N \in T^{\perp 1}$ であることに注意する. この完全列に, GF ($G := - \otimes_B T$) を適用して, 次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^A(\mathrm{Hom}_A(T, M), T) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(T, N) \otimes_B T & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(T, T') \otimes_B T \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T, M) \otimes_B T \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow \Phi_N & & \downarrow \Phi_{T'} \simeq & & \downarrow \Phi_M \\
 0 & \longrightarrow & & \longrightarrow & N & \longrightarrow & T' & \longrightarrow & M \longrightarrow 0
 \end{array}$$

($\Phi_{T'}$ が実際に同型であることを確認せよ.) このとき, 蛇の補題より, Φ_M は全射である. これは任意の $M \in T^{\perp 1}$ で成り立つから, Φ_N も全射である. もう一度, 蛇の補題を使えば, Φ_M が単射であることがわかる.

(iii) $FM \in \mathcal{Y}$: (ii) において, Φ_N も単射であることからわかる.

(iv) F は充満かつ忠実: $N \in T^{\perp 1}$ とする. Hom とテンサーの随伴性を利用して, 次を得ることができる:

$$\begin{aligned}
 \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T, M), \mathrm{Hom}_A(T, N)) &\simeq \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(T, M) \otimes_B T, N) \\
 &\stackrel{(ii)}{\simeq} \mathrm{Hom}_A(M, N).
 \end{aligned}$$

(v) F は稠密: $U \in \mathcal{Y}$ とし, M として, $U \otimes_B T$ を取る. このとき, 示すことは次の 2 点である:

$$\textcircled{1} M = U \otimes_B T \in T^{\perp 1}; \quad \textcircled{2} U \simeq FM = \mathrm{Hom}_A(T, M).$$

練習問題として残す.

以上により, F が圏同値 (準逆関手は $- \otimes_B T$) であることがわかる. □

練習問題 8.17. 上の証明において,

- (1) (iv) で与えた同型が, 実際に F で与えられていることを確認せよ.
- (2) (v) の証明を完成させよ.

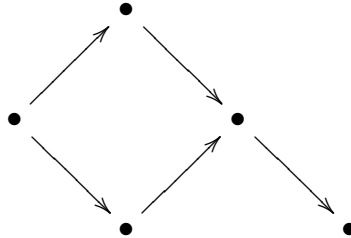
ブレナー-バトラーの定理は, 次の圏同値についても言及している.

定理 8.18 (ブレナー-バトラー). 定理 8.16 と同様の設定で, 次の圏同値を得る.

$$T^{\perp 0} \xrightarrow{\mathrm{Ext}_A^1(T, -)} \{U \in \mathrm{mod} B \mid U \otimes_B T = 0\}$$

例 8.19. 例 8.15 を見てみよう. そこで観察したように, 2 つの AR クイバーは部分的に

共通の形を持っている:



これを, A の側で見たときが $T^{\perp 1}$ であり, B の側で見たときが $\{U_B \mid \text{Tor}_1^A(U, T) = 0\}$ である. さらに, 残りの部分 (A の AR クイバーにおける “3” および B のクイバーにおける “3”) も対応しており, A の側が $T^{\perp 0}$, B の側が $\{U_B \mid U \otimes_B T = 0\}$ となっている.

ブレナー-バトラーの定理を絵で描くと, とても簡単に理解できる.

登場する圏をそれぞれ,

$$\mathcal{X} := T^{\perp 1} \simeq \{U_B \mid \text{Tor}_1^A(U, T)\} =: \mathcal{Y}$$

および

$$\mathcal{C} := T^{\perp 0} \simeq \{U_B \mid U \otimes_B T = 0\} =: \mathcal{D}$$

とおく.

このとき, 加群圏 $\text{mod } A$ はペア $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ で構成でき, 同様に $\text{mod } B$ はペア $(\mathcal{D}, \mathcal{Y})$ で作られている. 実際に, すべての A 加群 M は完全列

$$0 \rightarrow C \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow 0 \quad (X \in \mathcal{X}, C \in \mathcal{C})$$

を持つ. このような事実を AR クイバーに乗せてみると, $\text{mod } A$ は

$$\text{mod } A = \textcircled{\mathcal{C}} \boxed{\mathcal{X}}$$

と描けることを意味している. 一方, B においてはペアがひっくり返っているので,

$$\text{mod } B = \boxed{\mathcal{Y}} \textcircled{\mathcal{D}}$$

となっている. 結果的に, 左にある $\textcircled{}$ を, $\boxed{}$ を飛び越えて右に持っていく操作を行うと, A の加群圏から B の加群圏を観察することができる.

参考 34. 上で述べたペア $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ や $(\mathcal{D}, \mathcal{Y})$ はねじれ対 (*torsion pair*) と呼ばれ, 加群圏を観察する上でとても重要なものである. (導来圏においても対応する概念として, t 構造というものがある.)

参考 35. ここまでで登場したそれぞれに, 双対的な概念がある: 余傾加群, 余ねじれ対 (余 t 構造).

8.3 ボンガルツの補題

ここでは、傾加群の定義のうちの最初の2条件(定義 8.1(i)(ii))を満たしている加群を考える。最も嬉しいことは、そのような加群はいつも、ある傾加群の直和因子になっていることである: しかし、一般にそうなるとは限らない。そこで、上が成り立つ場合(定理 8.21, 8.25)と成り立たない場合(注 37)を観察しよう。

M, X を加群とする。次の2つの性質を満たす準同型 $f: M \rightarrow X'$ を M の左 $\text{add } X$ 近似という:

- (i) $X' \in \text{add } X$;
- (ii) 任意の準同型 $g: M \rightarrow X$ は f を通過する, つまり, 次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & X' \\ & \searrow g & \swarrow \exists \\ & & X \end{array}$$

別の言い方をすると, $\text{Hom}_A(f, X): \text{Hom}_A(X', X) \xrightarrow{- \circ f} \text{Hom}_A(M, X)$ はいつも全射である。

双対的に, M の右 $\text{add } X$ 近似を定義する。
有限次元多元環上では, いつでも近似を取ることができる。

補題 8.20. 任意の加群に対して, いつでも左右 $\text{add } X$ 近似を取ることができる。

証明. 加群 M の左 $\text{add } X$ 近似が取れることを示す。ベクトル空間 $\text{Hom}_A(M, X)$ は有限次元だから, その基底を $\{f_1, \dots, f_r\}$ とおく。また, $f: M \rightarrow X'$ を次のように定義する:
 $X' = rX$,

$$f := \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{bmatrix} : M \rightarrow X'.$$

このとき, f が M の左 $\text{add } X$ 近似になる。実際, 任意の $g: M \rightarrow X$ に対して, g は $\{f_1, \dots, f_r\}$ の一次結合で書ける: $g = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_r f_r$ ($\alpha_i \in K$) から, $h = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_r \end{bmatrix}$ とおけば, $g = hf$ が得られる。□

次の定理は, ボンガルツ (Bongartz) の補題と呼ばれる。

用いて) $\begin{array}{c} M \\ \downarrow g \\ N \longrightarrow rM \end{array}$ の引き戻しによって与えられるから, δ を与えるような g を探してくればよい. 次の図式を考える:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & rP_1 & \longrightarrow & rP_0 \longrightarrow rM \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \swarrow f & & \swarrow \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & N & \longrightarrow & rM \longrightarrow 0
 \end{array}$$

ここで, 上段の図式は P_0 の射影性から来ており, $\begin{array}{ccc} P_1 & \longrightarrow & P_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & L \end{array}$ は押し出しになっていることに注意する. また, 背面 (点線) の図式は, f が右 $\text{add } P_1$ 近似である (特に実際に写像を与えている) ことから誘導される. このとき, 押し出し $\begin{array}{ccc} P_1 & \longrightarrow & P_0 \\ \downarrow & \text{PO} & \downarrow \\ A & \longrightarrow & L \end{array}$ の性質から, 次のすべての面を可換にする準同型 $h: L \rightarrow N$ を得ることができる:

$$\begin{array}{ccccc}
 & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \\
 & \swarrow & & \swarrow & \\
 A & \longrightarrow & L & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & rP_1 & \longrightarrow & rP_0 \\
 & \swarrow f & & \swarrow & \\
 A & \longrightarrow & N & & \\
 & & \downarrow h & & \\
 & & & &
 \end{array}$$

結果的に, 可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow h & & \downarrow g \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & N & \longrightarrow & rM \longrightarrow 0
 \end{array}$$

を得て、右の四角形が引き戻しであることがわかる： つまり、連結準同型 $\text{Hom}_A(M, rM) \rightarrow \text{Ext}_A^1(M, A)$ は全射であることがわかった ($\delta \in \text{Ext}_A^1(M, A)$ に対して、 $g \in \text{Hom}_A(M, rM)$ が取れた). ゆえに、 $\text{Ext}_A^1(M, N) = 0$ を得る. \square

練習問題 8.22. 上の証明における (\clubsuit) をきちんとフォローせよ.

定理 8.21 の証明において得た加群 N は次の意味で一意的である.

定義-定理 8.23. M を古典的な前傾加群とする. 加群 X が次の条件を満たすとき、それを M のボンガルツ補因子とよぶ:

- ① 完全列 $0 \rightarrow A \rightarrow Y \rightarrow M' \rightarrow 0$ が取れる. ただし,
 - (a) $Y \in \text{add}(M \oplus X)$, (b) $M' \in \text{add } M$, (c) $\text{add } X \subseteq \text{add } Y$.
- ② ① の完全列に $\text{Hom}_A(M, -)$ を施すと、 $\text{Hom}_A(M, M') \rightarrow \text{Ext}_A^1(M, A)$ は全射である.
- ③ $\text{add } X \cap \text{add } M = 0$.

このとき、 X がボンガルツ補因子ならば、

- (1) $M \oplus X$ は古典的な傾加群である;
- (2) X' がもう一つの M のボンガルツ補因子ならば、 $\text{add } X = \text{add } X'$ が成り立つ.

定理 8.21 の証明で見たように、そこで得られた N はボンガルツ補因子を含む.

証明. (1) $M \oplus Y$ が傾加群であることを示せばよい.

(2) X および X' に対する ① の完全列によって、

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\
 0 & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & M'' & = & M'' & & & &
 \end{array}$$

が得られるが、 Z の周辺における完全列は分裂するから、 $Y \oplus M'' \simeq Y' \oplus M'$ が成り立つ.

③ より、これは主張を導く. \square

練習問題 8.24. 上の (1) の証明を完成させよ.

参考 36. (古典的とは限らない) 傾加群 (の同型類) 全体の集合はある関係で半順序集合に

なる: T, U を傾加群としたとき,

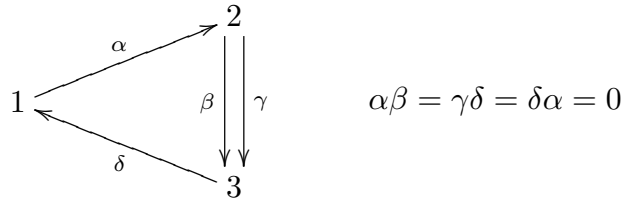
$$T \geq U \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{Fac} T \supseteq \text{Fac} U$$

で定義する. ここで, $\text{Fac} T := \{X \in \text{mod } A \mid \exists T' \twoheadrightarrow X (T' \in \text{add } T)\}$.

前傾加群 M のボンガルツ補因子を取ったとき, そこから得られる傾加群は M を直和因子に持つ傾加群のうち, 最大の傾加群になる.

注意 37. (古典的ではない) 一般の傾加群では, ボンガルツの補題は成り立つとは限らない. 例えば, 次の例が知られている [Ris].

A を次のクイバーと関係式で与えられる多元環とする:



A の基底として,

$$\begin{array}{|c|} \hline e_1 \\ \hline \alpha \\ \hline \alpha\gamma \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline e_2 \\ \hline \beta \quad \gamma \\ \hline \beta\delta \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline e_3 \\ \hline \delta \\ \hline \end{array}$$

を取ることができる. また, A の右正則加群のルビー列は,

$$A_A = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \quad 3 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

となる. さらに, DA_A の構造は,

$$DA_A = \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \quad 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

であることがわかる.

各頂点 i に対応する単純加群および直既約射影加群をそれぞれ, S_i および P_i とおく. A

の大域次元は 4 であることが, 単純加群の射影分解からわかる:

$$0 \longrightarrow P_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow P_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_3 \oplus P_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow S_2 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow P_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_3 \longrightarrow S_3 \longrightarrow 0$$

さて, これから頂点 1 に対応する単純加群 $S := S_1$ に注目する. これは射影次元 2 を持ち, $\text{Ext}_A^i(S, S) = 0$ を満たしている. つまり, ボンガルツの補題の仮定を満足している. しかし, S は傾加群の直和因子になることはない.

まず, 次を示す.

主張. 右 A 加群 X がすべての $i > 0$ に対して, $\text{Ext}_A^i(S, X) = 0 = \text{Ext}_A^i(X, S)$ を満たすならば, $X = mS \oplus Y$ と直和分解でき, Y は次を満たす:

$$(1) \text{Hom}_A(P_1, Y) = 0; \quad (2) \dim \text{Hom}_A(P_2, Y) = \dim \text{Hom}_A(P_3, Y).$$

ここで一般に, 単純加群 S に対応する直既約射影加群 P に対して, $\dim \text{Hom}_A(P, X)$ は X の組成因子に現れる S の個数と一致することに注意する.

証明. $M := \Omega S = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ とおく. S の射影分解に $\text{Hom}_A(-, X)$ を適用すれば, 次の同型と完全列を得る:

$$\textcircled{1} \text{Ext}_A^2(S, X) \simeq \text{Ext}_A^1(M, X);$$

$$\textcircled{2} 0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, X) \rightarrow \text{Hom}_A(P_2, X) \rightarrow \text{Hom}_A(P_3, X) \rightarrow \text{Ext}_A^1(M, X) \rightarrow 0.$$

また, S の移入分解 $0 \rightarrow S \rightarrow I_1 \rightarrow I_3 \rightarrow I_2 \rightarrow 0$ (ただし, I_i は頂点 i に対応する直既約移入加群) に対して, $\text{Hom}_A(X, -)$ を適用して, 次の同型と完全列を得る:

$$\textcircled{3} \text{Ext}_A^2(X, S) \simeq \text{Ext}_A^1(X, M);$$

$$\textcircled{4} 0 \rightarrow \text{Hom}_A(X, M) \rightarrow \text{Hom}_A(X, I_3) \rightarrow \text{Hom}_A(X, I_2) \rightarrow \text{Ext}_A^1(X, M) \rightarrow 0.$$

$\textcircled{1}$ と仮定を考慮に入れて $\textcircled{2}$ を見れば,

$$\dim \text{Hom}_A(P_3, X) \leq \dim \text{Hom}_A(P_2, X)$$

を得る: つまり, X の組成因子に現れる “3” の個数は “2” の個数以下. 同様に, $\textcircled{3}$ および $\textcircled{4}$ より,

$$\dim \text{Hom}_A(X, I_2) \leq \dim \text{Hom}_A(X, I_3)$$

を得る: つまり, X の組成因子に現れる “3” の個数は “2” の個数以下 (双対的な議論を用いていることに注意). したがって,

$$\dim \operatorname{Hom}_A(P_3, X) = \dim \operatorname{Hom}_A(P_2, X) = \dim \operatorname{Hom}_A(X, I_2) = \dim \operatorname{Hom}_A(X, I_3).$$

以上と, ② および ④ より,

$$\operatorname{Hom}_A(M, X) = 0 = \operatorname{Hom}_A(X, M)$$

を得る. これは (S の射影被覆および移入包絡を考えれば) 次の同型を導く:

$$\operatorname{Hom}_A(S, X) \simeq \operatorname{Hom}_A(P_1, X) \text{ および } \operatorname{Hom}_A(X, S) \simeq \operatorname{Hom}_A(X, I_1). \quad (8.4)$$

もし零でない準同型 $f: P_1 \rightarrow X$ があれば, 前者の同型より可換図式

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow \pi & \uparrow g \\ & & S \end{array}$$

が得られる (ただし, π は S の射影被覆). S は単純加群より, f は単射である. ゆえに, I_1 の入射性から, 次の可換図式を得る (ただし, ι は S の入射包絡):

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ g \uparrow & \searrow \rho & \\ S & \xrightarrow{\iota} & I_1 \end{array}$$

このとき, (8.4)の後者の同型より, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \vdots h & \searrow \rho & \\ S & \xrightarrow{\iota} & I_1 \end{array}$$

が得られる. 上の3つの可換図式を組み合わせると, ι の単射性より, $1 = hg$, つまり g は分裂単射であることがわかる.

結果的に, $\operatorname{Hom}_A(P_1, X) \neq 0$ ならば分裂単射 $S \rightarrow X$ が取れたので, (S を取れるだけ取れば) 直和分解 $X = mS \oplus Y$ (ただし, $\operatorname{Hom}_A(P_1, Y) = 0$) が得られる. 主張の (2) もすでに示した. ■

この主張より, $S \oplus X$ を傾加群にしたい場合, X は次を満たしていなければならない:

$$\textcircled{1} \operatorname{Hom}_A(P_1, X) = 0; \quad \textcircled{2} \dim \operatorname{Hom}_A(P_2, X) = \dim \operatorname{Hom}_A(P_3, X).$$

しかし, このような X は $\operatorname{Ext}_A^1(X, X) = 0$ を満たさない.

$\textcircled{1}$ より, X は A/Ae_1A 上の加群と見ることができる (ただし, e_1 は頂点 1 に対応する原始ベキ等元). また, A/Ae_1A はクロネッカー多元環 $\bullet \rightrightarrows \bullet$ と同型であるため, クロネッカー多元環の一般論を用いることができる.

次のことが知られている.

定理. [ARS, VIII. 7] クロネッカー多元環 $\Lambda : 1 \rightrightarrows 2$ 上の直既約加群 X に対して, 次は同値である:

$$(i) \operatorname{Ext}_\Lambda^1(X, X) \neq 0; \quad (ii) \dim \operatorname{Hom}_\Lambda(P_1, X) = \dim \operatorname{Hom}_\Lambda(P_2, X).$$

上は [RiS] からの引用だが, その論文の主定理についても紹介しておく. (証明は圏論を用いるため少し高度である.)

定理 8.25. 多元環 A が有限表現型ならば, ボンガルツの補題が成り立つ: つまり, 加群 M が 2 条件

$$(i) \operatorname{Ext}_A^i(M, M) = 0 \ (\forall i > 0); \quad (ii) \operatorname{proj. dim} M < \infty$$

を満たすならば, M はある傾加群の直和因子である.

このような M も前傾加群という.

この定理を証明するために必要な補題を準備する.

補題 8.26. [AS, Proposition 2.2]

- (1) M, N を A 加群とし, N は直既約とする. また, 準同型 $f_0 : M \rightarrow N$ および $f_i : N \rightarrow N$ ($1 \leq i \leq r$) を取り, $f = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_r \end{bmatrix} : M \oplus rN \rightarrow N$ は分裂しない全射であると仮定する. このとき, 全射 $mM \rightarrow N$ が存在する.
- (2) Y, W を A 加群とし, Y は直既約とする. また, 準同型 $f_i : Y \rightarrow Y$ ($1 \leq i \leq n$) および $Y \rightarrow W$ を, それらから誘導される準同型 $Y \rightarrow nY \oplus W$ が分裂しない単射となるように取れたと仮定する. このとき, 単射 $Y \rightarrow mW$ が存在する.

証明. (1) のみ示す; (2) はその双対. $L := \sum_g \operatorname{Im} g$ (g は $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ を走る) とおく. $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ の基底 $\{g_1, \dots, g_m\}$ を取れば, 任意の $g : M \rightarrow N$ に対して, $\operatorname{Im} g$ は $\sum_{i=1}^m \operatorname{Im} g_i$ に含まれる. ゆえに, $L = \sum \operatorname{Im} g_i$ であり, N の右 A 部分加群である.

今, f は分裂しないから, f_i は非同型である. また, $E := \operatorname{End}_A(N)$ は局所多元環より,

f_i は $\text{rad } E$ に属す. よって, f の全射性より,

$$N = \text{Im } f = \sum_{i=0}^r \text{Im } f_i \subseteq \underset{(i=0)}{L} + \underset{(i=1 \sim r)}{\text{rad } E \cdot N} \subseteq N$$

を得る. したがって, $N = L + \text{rad}(E)N$. これを左 E 加群としての等式と見れば (L は N の左 E 部分加群でもあることに注意), 中山の補題より, $N = L$ が成り立つ. ゆえに, $\begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_m \end{bmatrix} : mM \rightarrow N$ は全射である. \square

定理 8.25 の証明. 加群圏 $\text{mod } A$ の充満部分圏 \mathcal{C} を次で定義する:

$$\mathcal{C} := \{X \in \text{mod } A \mid \text{Ext}_A^i(X, M) = 0 \ (\forall i > 0)\} \cap \mathcal{P}^{<\infty}.$$

ここで, $\mathcal{P}^{<\infty}$ は有限射影次元を持つ加群からなる $\text{mod } A$ の充満部分圏である. このとき, \mathcal{C} は拡大および直和因子, シジジーを取る操作で閉じていて, 射影加群および M を含む.

(1) \mathcal{C} は, 任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して単射 $X \rightarrow I'$ ($I' \in \text{add } I$) を取れるような入射対象 I' を持つ (入射的に抱負である) ことを示す. A は有限表現型だから, \mathcal{C} は有限個の直既約加群を持つ. よって, \mathcal{C} の任意の対象 X に対して, 単射 $X \rightarrow I'$ ($I' \in \text{add } I$) が取れるように最小の (直和因子に過不足なく) $I' \in \mathcal{C}$ を選ぶことができる.

I の直既約直和因子 Y を取り, 完全列 $0 \rightarrow Y \xrightarrow{f} Z \rightarrow X \rightarrow 0$ を考える. このとき, $X, Y \in \mathcal{C}$ より, Z も \mathcal{C} に属す. よって, 単射 $g: Z \rightarrow I'$ ($I' \in \text{add } I$) が取れ, さらに単射 $gf: Y \rightarrow I'$ を得る. ここで, $I' = nY \oplus W$ (ただし, W は直和因子として Y を持たない) と分解しておく.

この gf が分裂しないと仮定する. 命題 8.26 より, 単射 $Y \rightarrow mW$ を得ることができない. 任意の $V \in \mathcal{C}$ は単射 $V \rightarrow I''$ ($I'' = \ell Y \oplus Y'$, ただし, Y' は直和因子に Y を持たない) を持つが, 一方, 単射 $Y \rightarrow mW$ があるため, 単射 $V \rightarrow I'' \rightarrow \ell mW \oplus Y'$ を取ることができない. $\ell mW \oplus Y'$ は $\text{add}(I/Y)$ に属すため, 結果的に, 任意の \mathcal{C} の対象に対して I より小さい I/Y を用いて単射が取れることになる. これは, I の最小性に反す. したがって, gf は分裂する.

ゆえに, f も分裂し, $\text{Ext}_A^1(X, Y) = 0$ であることがわかる: これは I が \mathcal{C} の入射対象であることを意味する.

(2) $T := M \oplus I$ とおく. \mathcal{C} の定義より, T は有限射影次元を持ち, $\text{Ext}_A^i(I, M) = 0$ を満たす. さらに, I は \mathcal{C} の入射対象であり, 方法 5.36 を用いれば, $\text{Ext}_A^i(M, I) = 0 = \text{Ext}_A^i(I, I)$ も導かれる: \mathcal{C} がシジジーを取る操作で閉じていることも用いる. よって, $\text{Ext}_A^i(T, T) = 0$ を得る.

(3) 最後に, 定義 8.1 における条件 (iii) を満たすことを確認する. 少し一般に, 次を示す: \mathcal{C} の任意の対象 X に対して, 完全列

$$0 \rightarrow X \rightarrow T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow \cdots \rightarrow T_n \rightarrow 0 \quad (T_i \in \text{add } T)$$

が存在する.

① X の左 $\text{add } T$ 近似 $f: X \rightarrow T_0$ ($T_0 \in \text{add } T$) を取る. (1) より, 単射 $X \rightarrow I'$ ($I' \in \text{add } I$) が存在するが, これは ($\text{add } I \subseteq \text{add } T$ より) f を通過する. したがって, f が単射であることがわかる. そこで, 誘導される完全列を $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} T_0 \rightarrow Y \rightarrow 0$ とする.

② T_0 および X は射影次元有限だから, Y も有限射影次元を持つ. さらに, 上の完全列に $\text{Hom}_A(-, M)$ を適用して

- $\text{Ext}_A^{i+1}(Y, M) \simeq \text{Ext}_A^i(X, M) = 0$
- $0 \rightarrow \text{Hom}_A(Y, M) \rightarrow \text{Hom}_A(T_0, M) \rightarrow \text{Hom}_A(X, M) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_A^1(Y, M) \rightarrow 0$

を得る. f は左 $\text{add } T$ 近似だから, ($\text{add } M \subseteq \text{add } T$ より) $\delta = 0$, よって, $\text{Ext}_A^1(Y, M) = 0$ である. 結果的に, Y は \mathcal{C} に属す.

③ 以上を繰り返せば, 完全列 $0 \rightarrow X \xrightarrow{f_0} T_0 \xrightarrow{f_1} T_1 \rightarrow \cdots$ ($T_i \in \text{add } T$) を得ることができる. 最後に, この列がどこかで止まることを示そう. \mathcal{C} は有限個の直既約加群を持ち, それぞれの射影次元は有限だから, $\text{Ext}_A^i(-, X)$ は十分大きい i において \mathcal{C} 上で消滅する. したがって, ある n で完全列 $0 \rightarrow \text{Im } f_n \rightarrow T_n \xrightarrow{f_{n+1}} \text{Im } f_{n+1} \rightarrow 0$ は分裂し, $\text{Im } f_n$ は $\text{add } T$ に属す. 結果的に, ($\text{Im } f_n$ を改めて T_n とおいて) 完全列 $0 \rightarrow X \rightarrow T_0 \rightarrow \cdots \rightarrow T_n \rightarrow 0$ を得る. □

注意 38. 上の証明において重要な点は,

- (1) が成り立つ; • 任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して, $\text{Ext}_A^{\gg 0}(\mathcal{C}, X) = 0$

の 2 点である (この 2 つを満たせば傾加群 T が取れる). どちらも A が有限表現型であることを用いたが, 後者は予想 FDC が正しければ一般に成り立つ. 一方, 前者は必ずしも成り立つとは限らない (注 37).

8.4 ボンガルツの補題の一般化

(この節では, 導来圏におけるボンガルツの補題について言及する.)

前節で見たように, 傾加群に対するボンガルツの補題は必ずしも成り立つとは限らない. それでもなお, 傾加群のように加群圏や導来圏の構造を観察することができる対象を, で

できるだけ多く手に入れたい: ボンガルツの補題は, 任意の “不完全な” 傾加群は “完全な” 傾加群へ “完備化” できることを示している.

そこで, 導来圏の構造を観察でき, かつ, ボンガルツの補題が成り立つような対象を見つけるためには, 傾加群のクラスより大きなクラスを考える必要が出てくる.

最初のステップは, 傾複体の概念を導入することである.

定義 8.27. 完全導来圏 $K^b(\text{proj } A)$ の対象 T が傾 (*tilting*) 複体であるとは,

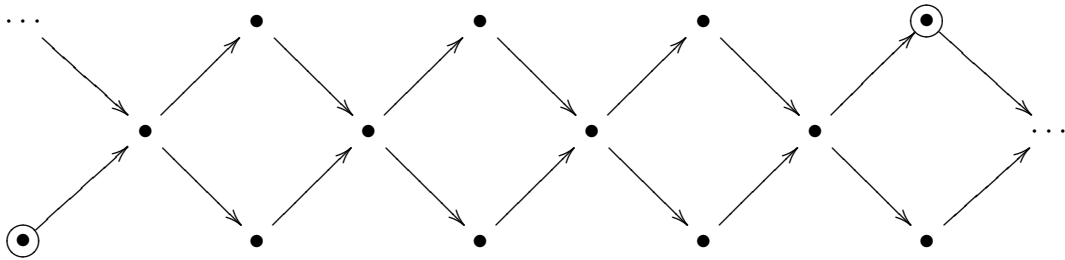
- (i) $\text{Hom}_{K^b(\text{proj } A)}(T, T[i]) = 0$ ($\forall i \neq 0$): このとき, T を前傾 (*pretilting*) 複体という.
- (ii) T は $K^b(\text{proj } A)$ を生成する: $K^b(\text{proj } A) = \text{thick } T$.

を満たすときにいう. ここで, $\text{thick } T$ は, T を含み直和因子を取るにより閉じている $K^b(\text{proj } A)$ の最小の充満三角部分圏を表す.

リッカード (*Rickard*) の定理により, 傾複体は自己準同型多元環を取る操作で (完全) 導来圏の構造を変えず, 加群圏の場合と同じように傾理論を展開できる.

しかし残念ながら, 傾複体に対するボンガルツの補題も一般には成り立たない.

例 8.28 (リッカード). A をクイバー $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ で与えられる道多元環とする. このとき, A の完全導来圏 $K^b(\text{proj } A)$ も AR クイバーを持ち, 次のように書ける:



2つの丸で囲まれた点 (対象) を直和すると前傾複体を得られる. しかし, これは傾複体の直和因子になることはない.

そこで, さらに大きなクラスを考えよう.

定義 8.29. 完全導来圏 $K^b(\text{proj } A)$ の対象 T が準傾 (*silting*) 複体であるとは,

- (i) $\text{Hom}_{K^b(\text{proj } A)}(T, T[i]) = 0$ ($\forall i > 0$): このとき, T を前準傾 (*presilting*) 複体という.
- (ii) T は $K^b(\text{proj } A)$ を生成する: $K^b(\text{proj } A) = \text{thick } T$.

を満たすときにいう.

(基本的な) 準傾複体 (の同型類) 全体の集合を $\text{silt } A$ と書くことにすると, これは半順序構造 $(\text{silt } A, \geq)$ を持つ [AI].

次のことが知られている.

定理 8.30 (相原, 相原-水野). (1) T を, $A \geq T \geq A[1]$ を満たす前準傾複体とすると, T はある準傾複体の直和因子になる.

(2) $K^b(\text{proj } A)$ が準傾離散 [A] ならば, ボンガルツの補題が成り立つ: つまり, 任意の前準傾複体は, ある準傾複体の直和因子である.

この定理の (1) はボンガルツの補題の素朴な一般化であり, (2) はリッカード-スコフィールド (定理 8.25) のある種の一般化である.

準傾複体に対するボンガルツの補題が一般に成り立つかどうかはわかっていない. (反例もない.)

次が予想される.

予想 8.31. 準傾複体に対するボンガルツの補題はいつも成り立つ: つまり, 任意の前準傾複体は, ある準傾複体の直和因子になる.

例えば, 例 8.28 で挙げた前傾複体も, ある準傾複体の直和因子になっている. (どの複体を足せば準傾複体になるかの完全なリストも知られている [A].)

注意 39. ここで紹介した話は, 完全導来圏に限る必要はない. つまり, 一般の三角圏で同様の理論を展開することができる.

8.5 傾変異理論

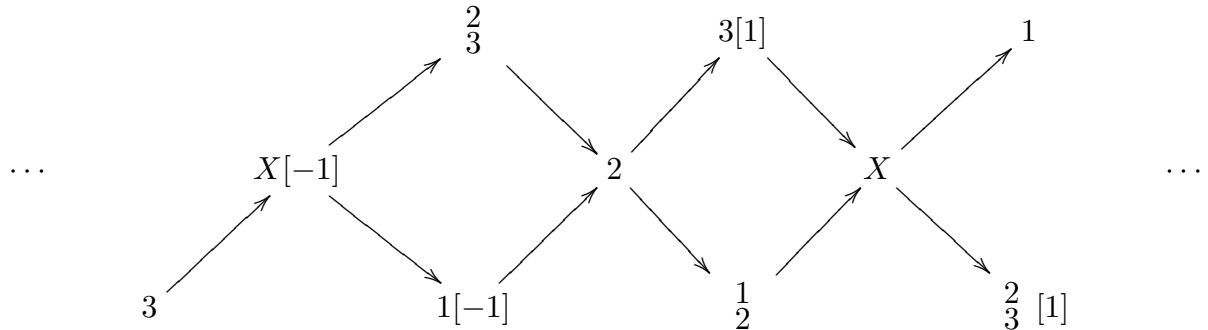
与えられた傾加群 (傾複体, 準傾複体) からまた, 傾加群 (傾複体, 準傾複体) を構成する方法を (準) 傾変異といい, 近年盛んに研究が行われている [AIR, AI, HU, IY]. ここでは, 傾加群の傾変異について紹介する.

定義-定理 8.32. S を入射的でない単純加群, それに対応する直既約射影加群を P とする. また, 次の 2 条件を満たすと仮定する:

$$(i) \text{Ext}_A^1(S, S) = 0; \quad (ii) \text{proj.dim}(\tau^{-1}S) \leq 1.$$

ここで, τ は AR (Auslander-Reiten) 移動である: AR クイバーでいうと, まっすぐ左側にあるものを指す (τ^{-1} はまっすぐ右側). このとき, $T := \tau^{-1}S \oplus A/P$ は (古典的な) 傾

ちなみに, A 上の有界導来圏の AR クイバーは次である: (X はある 2 項複体)



射の極小性と圏の根基

これまでに (特に定理 8.33 の (イ) において), 射の極小性を何度も用いているため, ここで述べることにする.

$f: M \rightarrow N$ を $\text{mod } A$ の射 (つまり準同型) とする. f が左極小であるとは, $gf = f$ を満たす $g: N \rightarrow N$ が同型射しかないときにいう. 双対的に, 右極小を定義する. さらに, f が $\text{mod } A$ の根基に属す ($f \in \text{rad}(M, N)$) とは, (Krull-Schmidt 性によって) f を行列表示したとき, 成分に同型射が現れないときにいう. このとき, 次が成り立つ.

命題 8.35. $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ を非分裂完全列とする. このとき, 次は同値である.

- (1) f (g) は左 (右) 極小である. (2) g (f) は $\text{mod } A$ の根基に属す.

さらにこの状況において, L (N) が直既約で $\text{Ext}_A^1(M, L) = 0$ ($\text{Ext}_A^1(N, M) = 0$) ならば, N (L) も直既約である.

証明. まずはじめに, 次の事実を示す.

主張. 任意の射 $f: L \rightarrow M$ はある直和分解によって, $\begin{bmatrix} f' \\ 0 \end{bmatrix}$ (f' は左極小) とできる.

証明. f と互いに通過し合う射 $\varphi: L \rightarrow X$ をもつ加群 X を考える. (つまり, f は φ を通過し, φ も f を通過する.) このとき, M は有限次元より, 条件を満たす加群 X のうちで次元が最小なものを取ることができる (ツォルンの補題は使わない*29).

φ が左極小であることを示すために, $\varphi = \alpha\varphi$ となる $\alpha: X \rightarrow X$ を取る. $L \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{\alpha} \text{Im } \alpha$ は上の性質を満たすから, 次元の最小性より $X = \text{Im } \alpha$, よって α が全射であることを得る. ゆえに, α は同型射である.

*29 整列集合 \mathbb{N}_0 への写像を考えると, その像は最小元をもつ.

今, 可換図式

$$\begin{array}{ccc}
 & & X \\
 & \nearrow \varphi & \downarrow s \\
 L & \xrightarrow{f} & M \\
 & \searrow \varphi & \downarrow t \\
 & & X
 \end{array}$$

をもつが, φ の極小性より ts は同型である. よって, $M = \text{Im } s \oplus \text{Ker } t$ (本当の “=”) を得て, $f = \begin{bmatrix} s\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$ がわかる. ■

(2) \Rightarrow (1) を示す. 主張より, $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (f_1 は左極小) となる M の直和分解 $M = M_1 \oplus M_2$ が存在する. このとき, 与えられた完全列は, $0 \rightarrow L \xrightarrow{f_1} M_1 \rightarrow N_1 \rightarrow 0$ と $0 \rightarrow 0 \rightarrow M_2 \rightarrow N_2 \rightarrow 0$ の直和になる. 後者は $M_2 \simeq N_2$ を表すが, g は $\text{mod } A$ の根基に属するので, $M_2 = 0$ とならなければいけない. ゆえに, $f = f_1$ となり, f の左極小性がいえる.

(1) \Rightarrow (2) を示す. g が成分に同型射 g_{11} をもつと仮定し, 次の直和分解を与える.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}} & \begin{matrix} M_1 \\ \oplus \\ M_2 \end{matrix} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}} & \begin{matrix} N_1 \\ \oplus \\ N_2 \end{matrix} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

$gf = 0$ より, $g_{11}f_1 + g_{12}f_2 = 0$, よって, $f_1 = g_{11}^{-1}g_{12}f_2$ を得る. このとき,

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}^{-1}g_{12}f_2 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g_{11}^{-1}g_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

となるが, $\begin{bmatrix} 0 & g_{11}^{-1}g_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ は明らかに同型でない. これは f が左極小であることに反する. よって, g は $\text{mod } A$ の根基に属す.

最後の主張を示す. L が直既約より, g は右極小であることに注意する. N の直既約因子 N' に対して, 極小右 $\text{add } M$ 近似 $g' : M' \rightarrow N'$ を取る. (上の主張を用いる. また, こ

これは全射になることに気をつける.) さらに, $\text{Ext}_A^1(M, L) = 0$ より, 次の可換図式を持つ.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow u & & \downarrow s & & \downarrow \iota & & \\
 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow v & & \downarrow t & & \downarrow \pi & & \\
 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

ここで, ι および π はそれぞれ, 自然な単射および全射である. よって, $g' = g'ts$ をもつが, g' が右極小より ts は同型である (s は分裂単射). ゆえに, vu は単射, したがって同型であることが従う (u は分裂単射). このとき, g が $\text{mod } A$ の根基に属することを考慮し, L が直既約であるから, u が同型であることがわかる. よって, $\text{Coker } s \simeq \text{Coker } \iota$ となるが, 同様に $\text{Coker } \iota = 0$, ゆえに ι が同型となる. これは N が直既約であることを意味する. \square

注意 42. 上の命題における後半の主張は, L が直既約で f が極小左近似のとき, N も直既約になることを述べている.

加群 M, N および $\ell > 0$ に対して,

$$\text{rad}^\ell(M, N) = \left\{ M =: M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_\ell} M_{\ell+1} := N \mid f_i \in \text{rad}(M_i, M_{i+1}) \right\}$$

とおく.

一般に, (環の根基とは異なり) $\text{mod } A$ の根基に属す射を複数個合成しても零になるとは限らない (例えば, クロネッカー多元環を観察するとよい). しかし, 次のことがわかる.

命題 8.36. $f : M =: M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{\ell-1}} M_\ell := N$ を加群と射の列とし, $f_i \in \text{rad}(M_i, M_{i+1})$ とする. このとき, N のすべての単純部分加群 S に対して, $\theta_S : P_S \twoheadrightarrow S \hookrightarrow I_S$ が根基に属す $\ell - 1$ 個より少ない射の合成でかけるならば, $f = 0$ となる. ここで, P_S および I_S はそれぞれ, S の射影被覆および入射包絡である.

証明. 背理法で示す. $f \neq 0$ と仮定する. このとき, θ_S は合成 $P_S \rightarrow M \xrightarrow{f} N \rightarrow I_S$ により表すことができる (\clubsuit). よって, f は $\text{rad}^{\ell-1}(M, N)$ に属すから, θ_S は根基に属す $\ell - 1$ 個以上の射の合成でかける. これは仮定に矛盾する. ゆえに, $f = 0$ を得る. \square

練習問題 8.37. 上の証明において, (\clubsuit) をきちんと確認せよ.

一方, 根基に属す射影加群の間の射はいくつかの合成により零になる.

命題 8.38. $P_1 \xrightarrow{f_1} P_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_\ell} P_{\ell+1}$ を射影加群とその間の射の列とし, f_i は $\text{mod } A$ の根基に属すとする. このとき, ℓ が A のルビー列の長さ r より大きいならば, $f_\ell \cdots f_1 = 0$ である.

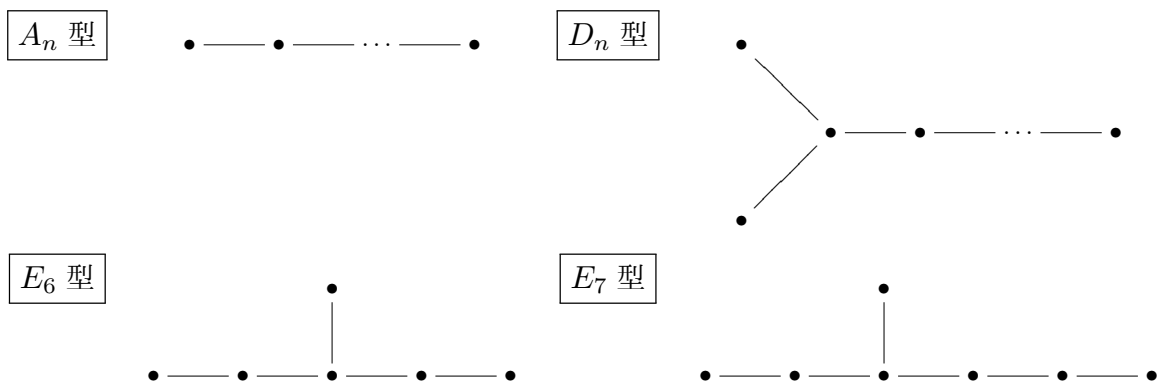
証明. $f_1 \in \text{rad}(P_1, P_2)$ ならば, $\text{Im } f_1$ は $\text{rad } P_2$ に含まれる. なぜなら, もし $\text{Im } f_1 \not\subseteq \text{rad } P_2$ ならば, 誘導される $P_1/\text{rad } P_1 \rightarrow P_2/\text{rad } P_2$ は零射でない. そこで, P_2 の直既約因子 P で, 自然な全射から誘導される $P_1/\text{rad } P_1 \rightarrow P/\text{rad } P$ が零にならないようなものを取りることができる. このとき, $P/\text{rad } P$ は単純加群だから $P_1/\text{rad } P_1 \rightarrow P/\text{rad } P$ は全射となり, ゆえに $P_1 \rightarrow P$ は全射である. よって, f_1 は分裂全射を成分にもつことになるが, これは f_1 が根基に属すことに反す. この議論を繰り返さば, $\text{Im } f_\ell \cdots f_1 \subseteq \text{rad}^\ell P_{\ell+1}$ が成り立つ. 射影加群のルビー列の長さは高々 r より, $r < \ell$ ならば $\text{rad}^\ell P_{\ell+1} = 0$ である. したがって, 主張が成り立つ. \square

9 多元環の構成方法

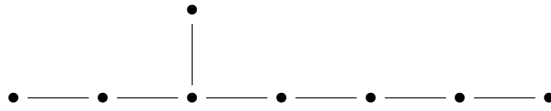
幾何的な対象から, しばしば多元環を構成することがある. このようなときは, 表現論的な情報を最初に与えられた幾何的な対象から観察できることがあり, 非常に理解がしやすくなる. この節でいくつか紹介する.

9.1 ディンキン図形 ADE

次のグラフを考える: ADE 型のディンキン (*Dynkin*) 図形と呼ばれる (n は点の個数).



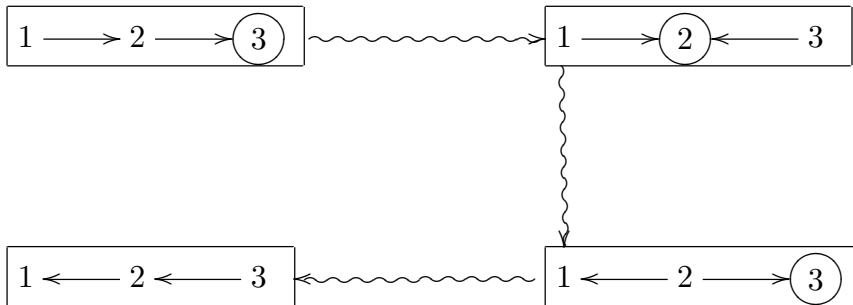
E_8 型



上記のグラフの各辺を, (適当に) 矢印に変えたクイバーの道多元環を考える: それぞれに合わせて, \bigcirc 型の道多元環という. 関係式を入れておらず, サイクルもないので, これらは特に遺伝的である.

矢印の方向を変えることで, 同じタイプの非同型な道多元環が作れるが, それらはすべて, 古典的な傾加群の自己準同型多元環を取る操作を繰り返すことで繋がる. (特に, APR 傾加群を取ることで繋がる.)

例 9.1. A_3 型から 4 つの非同型な道多元環を構成できる: 辺が 2 本で, 矢印 2 種類 (左右の向き). それらは次のように繋がる. (丸で囲まれた単純加群で APR 傾加群とその自己準同型多元環を取る.)



単純加群は, 対応するクイバーの点から出ていく矢がないとき, 射影的になる. そのような点 s で APR 傾加群を取り, その自己準同型多元環を計算すると, 点 s に入る矢印をすべてひっくり返すことによって, クイバーが与えられていることが観察できる. 例えば, 右下のクイバーにおいて, 1 の点で APR 傾加群を取ってみると, その自己準同型多元環は左上のクイバーで与えられる.

ADE 型の道多元環はすべて, 遺伝的な有限表現型である. さらに逆も成り立つ [ARS, Theorem VIII. 5.5].

定理 9.2. A を基本的かつ遺伝的とする. また, Q を A のクイバーとする. このとき, A が有限表現型であることと Q が ADE 型であることは同値である.

9.2 ブラウアーツリー

ディンキン図形の道多元環とは別の方法で、グラフから多元環を構成することができる。ここでは、グラフがツリー (サイクルがない) の場合のみ紹介する。

工事中

10 関手圏

[AR] を読むために関手圏の知識が必要なため、ここで簡単に説明する。この節を通して、 \mathcal{X} を加法圏とし、 \mathcal{A} をアーベル群の圏とする。

次のように、関手の圏 (関手圏, *functor category*, $\text{Mod } \mathcal{X}$) を構成する。

- 対象は、 \mathcal{X} から \mathcal{A} への (加法的) 反変関手
- 反変関手 F, G に対して、その間の射 $\varphi: F \rightarrow G$ とは、
 - 各 $X \in \mathcal{X}$ に対して、 \mathcal{A} での射 $\varphi_X: FX \rightarrow GX$ が取れる。
 - 各 $f: X \rightarrow Y \in \mathcal{X}$ に対して、 \mathcal{A} での可換図式

$$\begin{array}{ccc} FY & \xrightarrow{\varphi_Y} & GY \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ FX & \xrightarrow{\varphi_X} & GX \end{array}$$

が得られる。

一般に、 $\text{Mod } \mathcal{X}$ はアーベル圏である。また、 $\text{Mod } \mathcal{X}$ における完全列 $F \rightarrow G \rightarrow H$ とは、任意の対象 $X \in \mathcal{X}$ に対して、 $FX \rightarrow GX \rightarrow HX$ が \mathcal{A} における完全列になるときにいう。

反変関手 F が有限生成 (有限表示) であるとは、完全列

$$\left(\text{Hom}_{\mathcal{X}}(-, Y) \xrightarrow{\pi} \right) \text{Hom}_{\mathcal{X}}(-, X) \rightarrow F \rightarrow 0 \quad (X, Y \in \mathcal{X})$$

が存在するときをいう。ここで、 π はある Y から X の射 f によって与えられることに注意する: $\pi = \text{Hom}_{\mathcal{X}}(-, f)$ 。これは米田の補題と呼ばれ、非常に重要なので次に記す。以下、有限表示な反変関手からなる $\text{Mod } \mathcal{X}$ の充満忠実部分圏を $\text{mod } \mathcal{X}$ とかく。

補題 10.1 (米田の補題). 関手 $\mathcal{X} \rightarrow \text{mod } \mathcal{X}$ ($X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{X}}(-, X)$) は充満忠実な埋め込

み^{*30}である.

関手圏 $\text{mod } \mathcal{X}$ の射影対象は次のように与えられる.

命題 10.2. 関手圏 $\text{mod } \mathcal{X}$ において, $\text{Hom}_{\mathcal{X}}(-, X)$ ($X \in \mathcal{X}$) は射影対象であり, $\text{mod } \mathcal{X}$ の射影対象はそれらの直和の直和因子で与えられる.

一般に, $\text{mod } \mathcal{X}$ はアーベル圏ではないが, 次が知られている.

命題 10.3 (アウスランダー). 関手圏 $\text{mod } \mathcal{X}$ がアーベル圏であることと, \mathcal{X} の任意の射が擬核^{*31}をもつことが同値である.

例 10.4. \mathcal{X} が $\text{mod } A$ の反変有限充満部分圏ならば, \mathcal{X} の任意の射は擬核をもつ. したがって, $\text{mod } \mathcal{X}$ はアーベル圏である.

また, $\text{mod } \mathcal{X}$ は射影的に豊富であるが, 射影 “被覆” が極小で取れるかはわからない. 次が成り立つ.

定理 10.5. \mathcal{X} がクルル-シュミット圏ならば, $\text{mod } \mathcal{X}$ もそうである. 特に, $\text{mod } \mathcal{X}$ の対象 F は射影被覆をもつ; ある $X \in \mathcal{X}$ と右極小な全射 $\text{Hom}_{\mathcal{X}}(-, X) \rightarrow F$ が存在する.

この定理を理解するために, 次の部分節を与える.

10.1 クルル-シュミット圏

以下, \mathcal{C} を加法圏とする.

一般に, 対象 X の自己準同型環が局所環となることと X が直既約であることは同値でない. まずはこのことについて言及する.

e を $\text{End}_{\mathcal{C}}(X)$ のベキ等元とする. このとき, e は分裂するとは, ある対象と射の列 $Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ が存在し, $fg = 1_Y, gf = e$ を満たすときにいう.

練習問題 10.6. $X \in \mathcal{C}$ とする.

(1) \mathcal{C} がアーベル圏ならば, 任意のベキ等元 $e \in \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$ は分裂する.

^{*30} 埋め込みとは, 対象の対応が単射であるときにいう.

^{*31} $g : Z \rightarrow X$ が $f : X \rightarrow Y$ の擬核 (psuedo kernel) もしくは弱核 (weak kernel) であるとは, $\text{Hom}_{\mathcal{X}}(-, Z) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{X}}(-, g)} \text{Hom}_{\mathcal{X}}(-, X) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{X}}(-, f)} \text{Hom}_{\mathcal{X}}(-, Y)$ が完全列になるときにいう. 注意すべきは, Z を \mathcal{X} から取っていることである.

(2) X の直和分解は, $\text{End}_C(X)$ の分裂ベキ等元を与える.

上の (2) より, 次の事実を得る.

事実 10.7. $\text{End}_C(X)$ が局所環ならば, X は直既約である.

証明. $\Lambda = \text{End}_C(X)$ とおく. X の直和分解は, ある分裂ベキ等元 $e \in \Lambda$ を与える. このとき, ベキ等元であることから $\Lambda = e\Lambda + (1 - e)\Lambda$ (さらに直和) を得る. もし $e\Lambda$ が Λ のただ一つの極大イデアルに含まれれば, 中山の補題^⑩より, $\Lambda = (1 - e)\Lambda$, ゆえに $e = 0$ となる. 一方そうでなければ, $\Lambda = e\Lambda$, よって $e = 1$ を得る. このように, X を零でない真の部分加群によって直和分解することはできず, X が直既約であることがわかる. \square

練習問題 10.8. 教科書 [DK] で有限次元多元環における中山の補題は勉強したが, 一般の環でそれは成り立つか?

先に述べたように, 事実 10.7 の逆は成り立たない.

例 10.9. $C = \text{mod } \mathbb{Z}$ とする. このとき, \mathbb{Z} は (有限生成) 直既約な \mathbb{Z} 加群である. 一方, $\text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ は局所環でない; \mathbb{Z} は無限個の極大 (右) イデアル $p\mathbb{Z}$ (p は素数) をもつ.

加法圏 C がクルル-シュミット圏であるとは, 任意の対象が (有限個の) 直和 $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ に分解でき, $\text{End}_C(X_i)$ が局所環^{*32}となる時にいう. よってこのとき, 事実 10.7 の逆が成り立つ.

例 10.10. \mathcal{X} を直和因子で閉じる $\text{mod } A$ の充満部分圏とする. このとき, \mathcal{X} はクルル-シュミット圏である.

環 Λ が半完全であるとは, $\Lambda/\text{rad } \Lambda$ が半単純であり, $\text{rad } \Lambda$ を法としたベキ等元が Λ のベキ等元に持ち上がる時にいう. これは, 任意の有限生成 Λ 加群が射影被覆をもつことと同値である.

まず, 上記の圏論的特徴と環論的特徴をリンクさせよう.

定理 10.11. (1) Λ が半完全であることと $\text{proj } \Lambda$ がクルル-シュミット圏であることは同値である.

(2) 次は同値である.

(i) C はクルル-シュミット圏である.

*32 環 Λ が局所環であるとは, Λ の極大右イデアルがただ一つ

(ii) 任意の対象 X の自己準同型環は半完全であり, ベキ等元はすべて分裂する.

証明. **工事中**

□

ここで, 定理 10.5 の前半の主張を証明しよう.

定理 10.5 の証明. $F \in \text{mod } \mathcal{X}$ とする. 定理 10.11 より, 次の 2 点を示せばよい.

① $\Lambda := \text{End}_{\text{mod } \mathcal{X}}(F)$ は半完全である: ② Λ のベキ等元はすべて分裂する.

② について: ベキ等元 $e: F \rightarrow F$ は, アーベル圏 $\text{Mod } \mathcal{X}$ においてもベキ等元であるから, $\text{Mod } \mathcal{X}$ において分裂する. $\text{mod } \mathcal{X}$ は直和因子を取ることで閉じるから (♣), e は $\text{mod } \mathcal{X}$ においても分裂する.

① について: 定理 10.11 より, $\text{proj } \Lambda$ がクルル-シュミットであればよい. 米田の補題から, $\text{proj } \Lambda$ はクルル-シュミット圏 \mathcal{X} (仮定) と圏同値であるから, 主張が従う. □

練習問題 10.12. 上の証明における (♣) を示せ.

定理 10.5 の後半の主張を示すために, 準備をする.

補題 10.13. \mathcal{C} をクルル-シュミット圏とし, $\varphi: P_1 \rightarrow P_0$ を射影加群の間の射とする. このとき, $\text{Coker } \varphi$ を変えないように, \mathcal{C} の根基 $\text{rad}(P_1, P_0)$ から取り直せる.

証明. $\varphi = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}: M_1 \oplus N_1 \rightarrow M_0 \oplus N_0$ とし, δ が同型であるとする. 次の完全列の間の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{\text{nat.}} & M_1 \oplus N_1 & \xrightarrow{\text{nat.}} & M_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \delta \downarrow & & \downarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} & & \downarrow \alpha - \beta\delta^{-1}\gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & N_0 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} \beta\delta^{-1} \\ 1 \end{bmatrix}} & M_0 \oplus N_0 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & -\beta\delta^{-1} \end{bmatrix}} & M_0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

このとき, $\alpha - \beta\delta^{-1}\gamma$ の余核は X と同型であり, これも X の射影表示を与える. そこで改めて, $\varphi = \alpha - \beta\delta^{-1}\gamma$ とおく. この議論を繰り返せば, φ を根基から取れる. □

定理 10.5 の後半の主張は次の事実から従う.

定理 10.14. \mathcal{C} を射影的に抱負なクルル-シュミット圏とする. また, \mathcal{C} の対象はすべて射影表示可能であると仮定する. このとき, \mathcal{C} の任意の対象は射影被覆をもつ.

証明. $X \in \mathcal{C}$ の射影表示を $P_1 \xrightarrow{\varphi} P_0 \xrightarrow{\pi} X \rightarrow 0$ とする. また, $P = P_0 \oplus P_1$ とし, $\Lambda = \text{End}_{\mathcal{C}}(P)$ とおく. $F = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, -) : \text{add } P \rightarrow \text{proj } \Lambda$ は充満充実であるから, $FP_1 \xrightarrow{F\varphi} FP_0 \xrightarrow{F\pi} FX \rightarrow 0$ は Λ 加群 FX の射影表示を与える. $F\pi$ が右極小ならば, π も右極小であるから, $\mathcal{C} = \text{mod } \Lambda$ としてよい.

補題 10.13 より, $\varphi \in \text{rad}(P_1, P_0)$ とする. 定理 10.11 より, Λ は半完全だから, X の射影被覆 $\pi' : P \rightarrow X$ を取ることができる. このとき, $\pi = \begin{bmatrix} \pi' \\ 0 \end{bmatrix}$ とかけるが, $\varphi \in \text{rad}(P_1, P_0)$ より $\pi = \pi'$ とならなければいけない. \square

ゼミの軌跡

2017 年 11 月頃まで教科書 [DK] を読み, 12 月頃から修士論文のネタ探しとそのための勉強を始めた.

- (A) パーシステントホモロジー理論 [GH] に現れる可換梯子型多元環に興味を持ち, その多元環上の傾理論について学ぶ.
- 傾理論 [RiS, Ho, CHU]
 - 三角圏, ホモトピー圏, 導来圏 [Ho]
 - 可換梯子型多元環とその周辺 [LD, L1, L2]
- (B) アウスランダー多元環 (7 節) や Auslander–Reiten クイバー [DK, 11.6] を勉強し, 加群圏の構造に興味を持つ.
- 加群圏とその部分圏 [AR]

参考文献について

大変失礼なことに, このノートに載っているすべての結果について, その参考文献を挙げることはできなかった. ただ, できるだけ読者が自分で調べられる (参考文献を得られる) ように, その痕跡を残すように心がけた. 特に, 修士論文を書くにあたり, 参考になりそうな論文などは載せるようにした.

参考文献

[AIR] T. ADACHI, O. IYAMA AND I. REITEN, τ -tilting theory. *Compos. Math.* **150**

- (2014), no. 3, 415–452.
- [A] T. AIHARA, Tilting-connected symmetric algebras. *Algebr. Represent. Theory* **16** (2013), no. 3, 873–894.
- [AI] T. AIHARA AND O. IYAMA, Silting mutation in triangulated categories. *J. Lond. Math. Soc. (2)* **85** (2012), no. 3, 633–668.
- [Ar] T. ARAYA, Exceptional sequences over path algebras of type A_n and non-crossing spanning trees. *Algebr. Represent. Theory* **16** (2013), no. 1, 239–250.
- [ASS] I. ASSEM, D. SIMSON AND A. SKOWRONSKI, Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1. Techniques of representation theory. London Mathematical Society Student Texts, **65**. *Cambridge University Press, Cambridge*, 2006.
- [APR] M. AUSLANDER, M. I. PLATZECK AND I. REITEN, Coxeter functors without diagrams. *Trans. Amer. Math. Soc.* **250** (1979), 1–46.
- [AR] M. AUSLANDER AND I. REITEN, Applications of contravariantly finite subcategories. *Adv. Math.* **86** (1991), no. 1, 111–152.
- [ARS] M. AUSLANDER, I. REITEN AND S. O. SMALO, Representation theory of Artin algebras. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **36**. *Cambridge university Press, Cambridge*, 1995.
- [AS] M. AUSLANDER AND S. O. SMALO, Preprojective modules over Artin algebras. *J. Algebra* **66** (1980), no. 1, 61–122.
- [CFKKY] H. CHEN, M. FANG, O. KERNER, S. KOENIG AND K. YAMAGATA, Rigidity dimension - a homological dimension measuring resolutions of algebras by algebras of finite global dimension. preprint, arXiv: 1706.08301.
- [CHU] F. COELHO, D. HAPPEL AND L. UNGER, Complements to partial tilting modules. *J. Algebra* **170** (1994), no. 1, 184–205.
- [DK] Y.A. DROZD AND V.V. KIRICHENKO, Finite-dimensional algebras. *Springer-Verlag, Berlin*, 1994.
- [HU] D. HAPPEL AND L. UNGER, On a partial order of tilting modules. *Algebr. Represent. Theory* **8** (2005), no. 2, 147–156.
- [HU2] D. HAPPEL AND L. UNGER, Complements and the generalized Nakayama conjecture. *Algebras and modules, II (Geiranger, 1996)*, 293–310, CMS Conf. Proc., **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [GH] M. GAMEIRO AND Y. HIRAOKA, Persistence modules on commutative ladders

- of finite type. *Discrete Comput. Geom.* **55** (2016), no. 1, 100–157.
- [Ho] T. HOLM, Derived categories, derived equivalences and representation theory. *Proceedings of the Summer School on Representation Theory of Algebras, Finite and Reductive Groups (Cluj-Napoca, 1997)*, 33–66, Babes-Bolyai Univ. Fac. Math. Comput. Sci. Res. Semin., “Babes-Bolyai” Univ., Cluj-Napoca, 1998.
- [H] M. HOSHINO, Modules without self-extensions and Nakayama’s conjecture. *Arch. Math. (Basel)* **43** (1984), no. 6, 493–500.
- [I] O. IYAMA, Finiteness of representation dimension. *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), no. 4, 1011–1014.
- [IY] O. IYAMA AND Y. YOSHINO, Mutation in triangulated categories and rigid Cohen-Macaulay modules. *Invent. Math.* **172** (2008), no. 1, 117–168.
- [IS] 岩永恭雄, 佐藤眞久, 環と加群のホモロジー代数的理論. 日本評論社
- [L1] S. LADKANI, Derived equivalences of triangular matrix rings arising from extensions of tilting modules. *Algebr. Represent. Theory* **14** (2011), no. 1, 57–74.
- [L2] S. LADKANI, On derived equivalences of lines, rectangles and triangles. *J. Lond. Math. Soc. (2)* **87** (2013), no. 1, 157–176.
- [LD] H. LENZING AND J. A. DE LA PENA, Spectral analysis of finite dimensional algebras and singularities. *Trends in representation theory of algebras and related topics*, 541–588. EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zurich, 2008.
- [Mi] Y. MIYASHITA, Tilting modules of finite projective dimension. *Math. Z.* **193** (1986), no. 1, 113–146.
- [M] B. MÜLLER, The classification of algebras by dominant dimension. *Canad. J. Math.* **20** 1968 398–409.
- [N] 中岡宏行, 圏論の技法. 日本評論社.
- [RS] C. RIEDTMANN AND A. SCHOFIELD, On a simplicial complex associated with tilting modules. *Comment. Math. Helv.* **66** (1991) 70–78.
- [RiS] J. RICKARD AND A. SCHOFIELD, Cocovers and tilting modules. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **106** (1989), no. 1, 1–5.
- [TW] H. TACHIKAWA AND T. WAKAMATSU, Cartan matrices and Grothendieck groups of stable categories. *J. Algebra* **144** (1991), no. 2, 390–398.
- [W] C.A. WEIBEL, An introduction to homological algebra. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **38**. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [卒 16] 内田琴美, 小田友美, 菊地恵宇, 北島大樹, 櫻井拓哉, 本間孝拓, 2016 年度相原ゼ

≡ 卒業論文. 2017 年 3 月.