第２回春期研究大会論文集
創成型課題研究の部

数理科学的意思決定におけるプロセスの具体化とその検討
－数学的モデル化の視点から－

Concretization of Processes in Mathematical Scientific Decision Making and Consideration of those from the Perspectives of Mathematical Modeling

清野辰彦
山梨大学

要　約

知識基盤社会とよばれる現代社会では，データや情報を的確に把握し，社会的文脈の問題に対して，問題解決する能力を身に付けることが，より一層，重要になってくる。その際，社会的文脈の問題に対する数理的な考察を行い，数理的に導かれた根拠に基づきながら，合意形成を行い意思決定する力の育成，すなわち数理科学的意思決定力の育成が，算数数学教育が担う重要な役割になると考える。
本稿では，数理科学的意思決定力の育成のための基礎的考察として，数理科学的意思決定の過程の特徴について，数学的モデル化の視点から具体的に検討することを目的とした。検討の結果，具体的な過程として，「多様な選択肢の創出」，「妥当性の検討と可能性の検討」，「指標の作成」という特徴的な活動を同定するとともに，それらの活動を具現化するための 6 つの問題状況を特定した。

キーワード：数理科学的意思決定，プロセス能力，数学的モデル化

１．本稿の目的

数学は，現実事象の問題解決を契機として生み出されてきた。エジプト人達が，ナイル川の氾濫によって，毎年，畑の区画を正確に再現する必要に迫られ，測量術を生み出し，発達させたのは，その典型である。数学はその後，紀元前 3 世紀ごろに編集された『ユークリッド原論』が示すように，それぞれの内容で体系を作りながら，めざましい発展を遂げてきた。また，現代では，数学は，経済学・社会科学・工学・物理学・医学などの学問の発展に貢献するだけでなく，社会における多種多様な問題解決に，極めて重要な役割を果たしてきている。不確定なデータや情報が散在している現代社会において，今後，その役割は，より広範にそしてより深淵になってくることは確実である。

こうした状況を考えると，小学校の算数教育，中・高等学校の数学教育も，時代に応じた教育へと変容する必要があることは，言う

までもない。つまり，教育の内容や系列，方法の適切性について，そしてどのような能力を育成すべきなのかについて再考する必要がある。

これからの社会では，データや情報を的確に把握し，社会的文脈の問題に対して，問題解決する能力を身に付けることが,より一層，重要になってくる。その際，社会的文脈の問題に対する数理的な考察を行い，数理的に導かれた根拠に基づきながら,合意形成を行い,意思決定する力の育成，すなわち数理科学的意思決定力の育成が，算数数学教育において果たすべき重要な責務になると考えている。では，こうした能力を育成するためには，どのような教材を用いればよいのか，どのような授業を展開すればよいのか，またどのように評価すればよいのであろうか。

本稿の目的は，数理科学的意思決定力の育成のための基礎的考察として，数理科学的意思決定の過程の特徴について，数学的モデル化の視点から具体的に検討することである。

２．数理科学的意思決定の過程

認知心理学において，意思決定とは，人間が何らかの判断をすることを意味し,「ある複数の選択肢（alternative）の中から，1 つあるいはいくつかの選択肢を選択すること」(竹村, 1996)，「選択を正当化する理由づけをさがすこと」（小橋，1988）とされる。このような意思決定の意味及び Pollak（2003）の「数学的モデル化過程」を基盤に，数理科学的意思決定の過程は，次のように規定される。

まず，現実世界の問題を数学的に定式化する。次に，そのモデルに対して数学的処理を施し，数学的結果を得る。この過程を繰り返し，複数の選択肢を創出した上で，その中から，根拠を明確にしながら合意形成を図り，何らかの決定を行う。上記のプロセスには，顕在的または潜在的に，当事者の様々な価値観が反映されている。また，一方向の線形的なものではなく，進んだり，戻ったりしながら，進展していき，往還的なプロセスになるという特徴を持っている。

３．数理科学的意思決定におけるプロセスの具体化とその検討

（１）多様な選択肢の創出

数理科学的意思決定では，一つの決定をするにあたって，多様な選択肢を創出して検討したり，既に選択肢が限定されている場合には，それらの選択肢を選出するまでの過程を明確にしたうえで，検討したりすることが重要となる。すなわち，数理科学的意思決定では，ある基準や仮定を置いた際に，どのような結論が得られるのか 1 つ 1 つ吟味し，明確にする活動が必要かつ重要であり，この点に特徴があるのである。

上記の意味をより明確にするために，Bowland Maths.[1)]の教材「outbreak」の Activity3 を用いて説明する。Activity3 の問題を以下に示す。

より多くの人々をウイルスの感染から守るための作業が続けられている。あなたは，ロンドンのある地区の人々に対するワクチン接種を任されている。

このウイルス感染を防ぐためのワクチンには 2 種類ある。どちらも 100%感染を防ぐことはできないが，以下の表のように，それぞれ異なる割合で感染を予防できる。

	ワクチンの成功率	1 人あたりにかかる費用
ワクチン A	95%	8.00 ポンド
ワクチン B	70%	3.50 ポンド

また，表にあるように 2 種類のワクチンにかかる一人あたりの費用は異なる。あなたには，945,500 人の予防接種対象者に対して，5,000,000 ポンドの予算が与えられている。

どのようにすれば最も効果的にワクチンを接種できるかを決めるのはあなた次第で

ある。計画のワークシートを使って，どのようにワクチンを接種するか決定せよ。

この問題には，問題文の他に，表 1 のような職種に関するデータが付帯されている。

表 1 「outbreak」に示されている職種の割合

	全人口に対する割合(%)
医療関係者（医師・看護師）	8
重要な公共サービス （電気・ゴミ収集など）	12
食料品店等の店員	12
農業・食料品生産業者	9
その他の販売業者	11
他の専門職：教師，法律家など	13
その他の小売業者：自動車修理業，室内装飾など	9
定年退職者	9
児童・生徒	10
5 歳未満の幼児	7
合計	100

この問題を社会的価値観を付与せずに，言わば形式的に解くとすれば，以下の連立方程式を立て，その処理をすることになろう。

$$\begin{cases} A+B=945500 \\ 8A+3.5B=5000000 \end{cases}$$

B の値を求めると，569777.77…となるので，若干の解釈を行い，B=569778，A=375722 を得る。この結果から，ワクチン A を 375722 人分，ワクチン B を 569778 人分接種すればよいと考える生徒が想定される。ここまでは，連立方程式の利用によく見られる「買い物」の問題と同様な解決である。だが，この後，真の問と対峙することになる。「569778 人分のワクチン A を誰に接種すればよいのであろうか」，「ワクチン B の成功率は，70%であるので，成功率が高いワクチン A を多くの人に接種すべきではないか」「ワクチン B は全員に接種し，残金を用いて，ワクチン A を接種すべきではないか」等の問である。

数理科学的意思決定を行うためには，こうした様々な問に対して，ある基準や仮定を置いた際に，どのような結論が得られるのかを 1 つ 1 つ吟味していくのである。例えば，ワクチン A を全員に接種するには，2564000 ポンド足りないので，まずワクチン B を全ての人に接種することにする。ワクチン B を接種した場合，接種者の 70%は感染を予防できるが，30%の人（283650 人）は感染を予防できないと考えられる。そこで，残金を用いてワクチン A も接種すると，211343 人に接種できることになる。この接種者が，ワクチン B によって感染を予防できると予想される人全員であれば，このワクチン A は意味をなさない。一方で，ワクチン B によっては感染を予防できない人全員に接種できたとすれば，2 つのワクチンによって感染を予防できる人数が格段に多くなる。つまり，感染予防者の上限の人数は，862597 人であり，下限の人数は 661850 人となる。このように上限と下限を明確にしたうえで，適切な接種方法を探っていく。意思決定では，こうした「シナリオ作り」が重要なのである。

「シナリオ」という用語には，予測のシナリオといったように，起こりうる出来事を仮定して並べたものという意味がある。不確実性の事象の際には，複数の数学的モデルを作成したりシミュレーションをしたりしながら未来を複数予測し，シナリオを考え，それぞれの未来に対する対応や対策が重要になってくるのである。こうしたシナリオは，様々な場面で作成されている [2)]。例えば，気候変動に関する政府間パネル（IPCC）では，「温室効果ガス排出シナリオ」を作成し，それに伴う地上気温の予測が行われている [3)]。

「シナリオ」の作成は，どのように思考したのかを視覚化し，意思決定した際の根拠を明確にする役割を果たす。それ故，数理的意思決定では，多様な「シナリオ」を作成した上で，判断する活動が重要となる。

（２）妥当性の検討と可能性の検討

現実事象の問題に対して，数理的意思決定を行う際には，問題を解決するにあたって有益なモデルを作成し，そのモデルに基づき，結論を得て，判断するという過程を辿る。その過程では,モデルに関する妥当性の検討や,あるモデルに基づくと，どのような結論が考えられるかという可能性の検討が行われる。この 2 つの検討が，幾度となく行われることによって,適切な意思決定ができるのである。以下では，1 つの問題の中で，上記の 2 つの検討が行われる様子を Bowland Maths.の教材「Keeping the Pizza Hot 」を用いて記述する。

「Keeping the Pizza Hot」の文脈は，宅配ピザ屋を開店しようとするある店主の相談役として，次の問題に対する助言をするという設定である。

宅配ピザの配達可能な範囲は，どのくらいか。

ピザは，温かい状態で食べないとおいしくない。何度まで温かい状態としてみなすことができるのかを調べるとともに，その温度に達するまでに，どのくらいの時間がかかるのかを明確にすることが最初の課題となる。そこで，味覚実験と温度低下に関する実験を行い，データを採取する。

図 1 は，ピザを「ピザの箱」に入れた際の時間と温度に関するデータの散布図である。縦軸は温度（℃），横軸は時間（分）である。

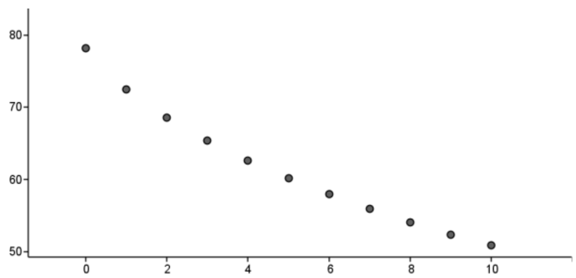

図 1　時間経過に対するピザの温度

得られたデータをグラフ化し，データの傾向を適切に捉えている関数式を導きだすことができれば，予測を行うことができるようになる。図 1 の散布図を観察すると，直線の傾向を示しているとも見ることができる。だが,直線で捉えた場合，時間が経つと，いずれ負の温度になり,凍ってしまうことを意味する。これは，事象を適切に捉えていない。また，曲線であることから，二次多項式で回帰した場合，ある範囲では適切であるように見えるが，これも，時間が経つといずれ，温度が上昇していくことになるため，不適切であると考えられる。こうした考察が，モデルに対する妥当性の検討である。

検討を重ねながら，データの線形化等による分析を通して，事象を適切に捉えているモデルとして，指数回帰モデルを特定したとする(図 2:縦軸は温度(℃),横軸は時間(分))。この後，データを採取し，検証という活動によって，このモデルの妥当性の検討が行われるのである。

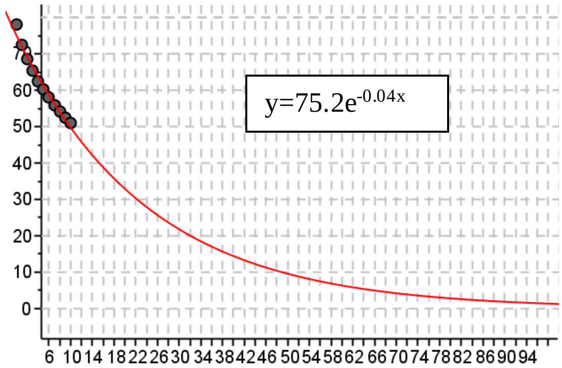

図 2　指数回帰モデル

モデルが特定されると，このモデルを用いて考察が行われる。例えば，味見実験において，ピザの温度が 40℃になると冷たいと感じた場合,その温度になるまでの時間を求める。すると，約 15.7 分が得られる。

この結果から，15 分で配達することができる範囲が，配達可能なエリアと考えることができる。ピザを配達するバイクの制限速度は 30km/h であるので，平均速度を 20km/h と仮定すると，配達可能距離は，店舗から 5km の

範囲になる。数理科学的意思決定の視点からみると，上記の解決では終わらない。「保温性の高い袋に入れれば温度の低下を抑えられるので，ビジネスエリアは，より広範囲になるのではないか」，「作る時間を考慮に入れると，配達時間に費やせる時間はもっと短くなるため，範囲を狭くする必要があるのではないか」，「実際に運ぶ際には，距離が 5km ではなく，道のりが 5km の範囲を考える必要があるのではないか」等，様々な問いが見出され，そしてその可能性の検討が行われる。数理的意思決定では，上記のように，妥当性の検討と可能性の検討が行われるのである。

（３）指標の作成

現実事象の問題に対する数理的意思決定をする場合，指標を作り，その指標を基にして，判断をするという活動がよく行われる。だが，これまでの学校数学では，指標を作成するという機会は，ほとんどない。多数の資料から，重要な要素を抽出し，その要素間の関係を構築し，資料を代表する基準を設定する能力は，これからの社会で活躍する子どもたちにとって，必要な能力であると考える。以下では，指標を作ることによって，意思決定をする 1 つの例を示す [4)]。

コンビニエンスストア S 店では，3 種類のランチ弁当を特別販売することにした。この 3 種類のランチ弁当の企画に関しては，S 店のアルバイト店員 3 人（A さん，B さん，C さん）にそれぞれアイデアを出させた。

A ランチ，B ランチ，C ランチの弁当は，1 個当たりそれぞれ 400 円，500 円，600 円で設定された。販売を開始して 2 カ月が経過して，3 種類の毎週の売上高が図表のように報告された。店長はこのランチ弁当を担当した 3 人の中から，1 人に対し時給をアップするのなら，誰を選ぶべきか。

売上高：円

		Aランチ	Bランチ	Cランチ
3月	第1週	114,300	117,000	123,600
	第2週	124,200	135,000	105,600
	第3週	119,700	124,000	98,400
	第4週	124,200	106,000	157,200
4月	第1週	109,800	124,000	110,400
	第2週	127,800	116,000	97,200
	第3週	119,700	114,000	108,000
	第4週	117,900	119,000	153,600

この問題では，まず，3 つのランチ弁当の 2 か月間の売上高を求め，1 週あたりの平均売上高を求めることになるであろう。その値は，A ランチ：119700 円，B ランチ：119375 円，C ランチ：119250 円である。1 週あたりの平均売上は，ほぼ同じであるため，平均だけでは判断できない。だが，売上表をよく観察してみると，最も売れた週の売り上げと最も売れなかった週の売り上げの差は，A ランチが 18000 円，B ランチが 29000 円，C ランチが 60000 円であり，A ランチにバラつきが少ないことがわかる。範囲だけではなく，標準偏差を求め，バラつき具合を数値化すると，A ランチ：5437，B ランチ：7999，C ランチ：22224 となる。店長にとって，バラつきが大きいということは，販売予測が立てにくく，売れ残りが多くでる可能性があり，リスクが大きい。それ故，ここでは，リスクを最小にする意思決定が適切である。そこで，平均（期待値）が大きく，標準偏差が小さい場合に，大きな値を示す指標の作成が有効となる。具体的には，「平均－標準偏差」あるいは「平均／標準偏差」という指標である（表 2）。

表 2　作成した指標の値

	A ランチ	B ランチ	C ランチ
平均 − 標準偏差	114263	111376	97026
$\frac{\text{平均}}{\text{標準偏差}}$	22.0	14.9	5.4

表 2 の結果から，売上があり，リスクが最小の弁当は，A ランチであると考えられるた

め，店長としては，A さんの時給をあげるという判断が想定される。

上記の問題解決では，A ランチを企画した A さんへの報酬に関わる意思決定が行われただけでなく，店長として重要な情報が得られた。それは，第 4 週目に，多くの C ランチが売れているということである。第 4 週に給料日が設定されている人が多いことを考えると，この事実も理解できる。そこで，店長の判断としては，第 4 週に，若干高価な弁当やデザートを用意することが考えられるのである。

上記のように，数理科学的意思決定では，指標の作成が 1 つの特徴的な活動になると考えられる。今回提示した例では，指標を作成するにあたって，平均と標準偏差が使用された。指標を作成し，そしてその指標を基に，意思決定が行えたという経験は，生徒にとって，平均と標準偏差の価値を感得させることにもつながると考えるのである。

４．数理科学的意思決定の視点からみた教材の検討

（１）数理科学的意思決定が生じる問題状況

我々は，日常の生活場面の中で，状況を把握し，その状況に応じて適切であると判断した意思決定を行っている。だが，この意思決定の多くは，主観的，直観的な意思決定であり，数理的に導かれた根拠に基づいた意思決定ではない。日常の生活場面での判断は，他者と合意形成をしなくても，自己の判断で事足りる場合の方が多く，数理科学的意思決定を行わなくても済んでしまうからである。

だが，判断を下す必要がある意思決定者の状況や立場が変わると，合意形成の必要性が高まり，数理的意思決定が重要になってくることがある。例えば，学校の教員という状況下，会社員という状況下，あるいは，国内の政策決定者という立場，国家間の契約を決定する立場といったように，状況や立場が変化すると，関わりのある集団が拡大するため，客観的，論理的な意思決定が必要になってくるのである。

この「状況」という概念に関して，示唆的であるのは，PISA（Programme for International Student Assessment）（国立教育政策研究所，2004）の次の分類である。

「『私的』: 生徒の日々の活動に直接関係する文脈，『教育的』: 生徒の学校生活に現れるような文脈，『職業的』: 職業の場面に現れるような文脈，『公共的』: 生徒が生活する地域社会における文脈，『科学的』: より抽象的な文脈で，技術的な過程，理論的な場面，明らかに数学的な問題についての理解に関連する。ここには，数学の授業でよく直面するような数学そのものである『数学内的』文脈も含まれる」（p.34）[5)]

PISA では，上記のように，状況と生徒との「距離」，並びに「数学の記号や構造が現れる程度」（p.34）によって，状況を分類しているのである。本研究では，数理的に導かれた根拠に基づきながら，合意形成を行い，意思決定する力の育成を狙っている。この合意形成という活動が顕著に現れ，そして困難な場面となる典型は，やはり国際的な問題に関する状況においてであろう。それ故，本研究では，「国際的」という状況を加え，次の 6 つに分類される状況を想定しながら，教材開発や授業構成を考えていく。

表 3　教材に反映させる問題状況の分類

A．問題状況
A1：私的…生徒の日々の活動に直接関係する文脈
A2：教育的…学校生活に現れるような文脈
A3：職業的…職業の場面に現れるような文脈
A4：公共的…生活する地域社会における文脈
A5：国際的…国際社会における文脈
A6：科学的…科学に関連する文脈

「国際的」に分類される教材例（西村他，2012）を以下に示す。なお，本教材は，Bowland Maths.の教材「Water Availability」を改良した

ものである。

あなたに，国際支援機関から，水不足に悩むアルジェリア，ヨルダン，トルコの 3 か国へ「水」を公平に分配するという任務が与えられた。どのように分配すればよいだろうか。

国	人口（百万人）	農業における経済活動人口（万人）	面積(㎢)	耕地面積（㎢）	１年間に利用可能な水（㎦）
アルジェリア	35	316	2,381,740	84,350	12
ヨルダン	6	12	89,320	2,830	1
トルコ	72	817	783,560	242,940	214

（２）数理科学的意思決定を意図した教材開発に向けた課題

数理科学的意思決定を経験し，学習するために用いられる教材は，本稿において考察してきた「多様な選択肢の創出」，「妥当性の検討と可能性の検討」，「指標の作成」等の活動が想定される教材である。これらの教材は，児童生徒を問題状況のある立場に位置付け，考察する目的を明確にしているという特徴がある。例えば，先述した「Keeping the Pizza Hot」では，店主の相談役の立場として，ピザの配達可能な範囲を決定するという目的が設定されている。そして，この目的を達成するために，ピザが冷める際の時間と温度の関係を特定するという活動を行っている。これまでも，冷却曲線の関数式を特定する教材は提案されてきた。だが，何のために時間と温度との関係を見出し，関数式を求めるのか，その目的が明確ではない教材も散見される。

Blum（1993）は，教材を観る際に，「人工的ではなく，本当に現実的か」という視点を挙げている。この視点から観た時，数理科学的意思決定で扱おうとする教材は，現実的であり，考察の目的が明確である「真正（authentic）な問題解決」を意図した教材と言えよう。こうした教材を開発していくためには，問題状況において，児童生徒をどのような立場に位置付けて問題解決に着手させるのか，また，その問題状況をどのようにイメージ化させていくかという新たな課題を考えていく必要がある。

また，数理科学的意思決定を行う際，これまでの学校数学では光が当てられてこなかったツールを使うと効率的に考察が進められる場合がある。例えば，その一つが，決定木（decision tree）である。決定木とは，将来起こりうる事象を枝分かれするように描き，どの枝を選択すると期待値が最大になるのかを視覚的に把握するためのツールである。意思決定力を育成していくためには，こうしたツールも視野に入れた教材開発が必要になってくると考えられる。

５．まとめと今後の課題

本稿の目的は，数理科学的意思決定力の育成のための基礎的考察として，数理科学的意思決定が行われる際のプロセスを具体化し，その特徴について，数学的モデル化の視点から検討することであった。

具体化された 1 つ目のプロセスは,「多様な選択肢の創出」である。的確な意思決定をしていくためには，ある基準や仮定を置いた際に，どのような結論が得られるのか 1 つ 1 つ吟味し，明確にしていく活動が重要となる。その活動は，選択肢の創出活動であり，「シナリオ」作りとも表現できる。2 つ目のプロセスは,「妥当性の検討と可能性の検討」である。数理科学的意思決定では，モデルに対する妥当性の検討が行われるとともに，そのモデルに基づくと，どのようなことが考えられるのかという可能性の検討が行われる。この 2 つの検討は，車で言うところの両輪にあたる重要な活動である。さらに，具体的事例の考察の際に明確にされたように，2 つの検討では，問いが連続的に生起するという特徴があった。問いを設定し，その問いに答えるという重要な活動を数理科学的意思決定プロセスでは，潤沢に経験できることも示唆された。3 つ目のプロセスは,「指標の作成」である。数理的意思決定を行う際には，指標を設けて，それ

を基に数値化して判断するという活動がよく行われるが，これまで学校数学ではあまり光が当てられてこなかった。数理的に導かれた根拠に基づきながら判断するための 1 つの方法として，学習する価値がある。

最後に，数理的意思決定が生じる問題状況並びに教材開発に向けての課題について考察した。これからの社会を生きていく子供たちは，これまでの子供たち以上に，早期に，多様な社会や国際的な社会と接点を持つことになる。社会の範囲が拡大すればするほど，価値観が多様化するため，コミュニケーションは困難になろう。そうした状況を想定し，子供達が，数理的に導かれた根拠に基づきながら，合意形成を行い，論理的，客観的に意思決定する力を育成するための問題状況を教材に反映する必要があると考えたのである。

今後の課題は，2 点ある。1 点目は，数理的意思決定における活動の他の特徴について明確にするとともに，その活動の教育的価値について考察することである。2 点目は，教材の開発を進めるとともに，上記の活動が反映される授業の構成並びにその実践と評価を行っていくことである。

注

1）Bowland Maths.は，プロセス能力の育成をめざすイギリスのプロジェクトである。

2）小寺隆幸（2003）は，二酸化炭素濃度の予測を行い，「シナリオ」の意味と重要性を伝える授業を行っている。

3）IPCC 第 4 次評価報告書統合報告書政策決定者向け要約参照

4）中村力（2008，pp.139-143）の問題を加筆修正した。また，問題解決の記述も中村（2008）を参考にして記述した。

5）国立教育政策研究所（2013）では，「私的」「職業的」，「社会的」，「科学的」の 4 つに分類されている。だが，本研究は，小学校から高等学校までの教材を視野に入れているため，学校に関わる状況が多く想定される。そこで，「教育的」が記述されている国立教育政策研究所（2004）を引用した。

引用・参考文献

国立教育政策研究所（2004）『生きるための知識と技能 2』明石書店.

国立教育政策研究所（2013）『生きるための知識と技能 5』明石書店.

小寺隆幸（2003）「中学校関数におけるデータの分析の指導の実際と考察－現実のデータを中学生はどう分析したか－」第 36 回数学教育論文発表会論文集，pp.241-246.

小橋康章（1988）『認知科学選書 18 決定を支援する』東京大学出版会，p.40.

清野辰彦（2014）「豊かに生きる力をはぐくむ ICT を活用した問題解決授業づくり－「数学化」と「解釈・評価」に焦点を当てて－」『教育科学数学教育』no.675，明治図書，pp.104-107.

竹村和久（1996）「意思決定とその支援」『認知心理学 4 思考』東京大学出版会，p.81.

中村力（2008）『ビジネスで使いこなす定量分析』日本実業出版社.

西村圭一･山口武志･清水宏幸･本田千春（2011）「数学教育におけるプロセス能力育成のための教材と評価に関する研究－イギリス『ボーランド数学（Bowland Maths.）』の考察－」日本数学教育学会誌数学教育，第 93 巻（9），pp.2-12.

西村圭一他（2012）「数学的判断力の育成に関する研究－プロセス能力の水準化とその実際－」第 45 回数学教育論文発表会論文集，pp.329-334.

Henry O.Pollak（2003）A history of the teaching of modeling,*A History of School Mathematics Volume1*, NCTM, pp.647-671.

W.Blum （1993） Mathematical modelling in mathematics education and instruction,T. Breiteig et.al（eds）*Teaching and Learning Mathematics in Context*.Ellis Horwood Ltd.