

「プッシュホン」に潜む関数

さいたま市立芝川小学校（長期研修生）松井 浩司

東京学芸大学（大学院生）野島 淳司

1. 教材について

本教材の概要は、「プッシュホン」のボタンを押した際の音に着目し、その音波をコンピュータのソフトを使ってグラフで表し、そのグラフの表す関数を、グラフソフトを用いて探究するというものである。さらに、求めた関数を現実場面に戻して解釈をすることまで視野に入れている。

現在、高等学校の生徒にとっての数学を学ぶ目的が、定期試験や受験のみとなってしまうという現状もあるということは否めない。したがって、現実事象との関わりの中で、数学を使って探究するという経験を積ませ、日常の現象と数学のつながりを感じさせることは不可欠であると考え。

本教材では、高等学校で学習する数学の内容の中でも、三角関数に着目した。三角関数は、現実にある様々な現象と密接に関係している。しかし、高等学校の数学Ⅱの教科書を開いても、これらを扱った内容はほとんど見られず、代数的な処理や式とグラフの関わりについての学習に終始している。そこで、本教材では、現実事象である「プッシュホン」の音に着目し、それぞれのボタンを押して鳴る音の音波がどのような関数になるかを見つけ出すという課題を設定した。「プッシュホン」の音波に着目した理由は、誰もが耳にするものである身近な事象であることと、音波を表す関数が 2 つの正弦曲線の和という探究する面白さを感じられるようなものとなっていることである。

「プッシュホン」における、音により番号を送信する方法は DTMF と呼ばれ、0～9, *, #のそれぞれのボタンに異なる音が割り振られている。それぞれのボタンを押してなる音の音波は、表 1 のように周波数の異なる 2 つの正弦曲線の和となっている。

	1209 Hz	1336 Hz	1477 Hz
697 Hz	1	2	3
770 Hz	4	5	6
852 Hz	7	8	9
941 Hz	*	0	#

表 1（各ボタンの音波）

例えば、プッシュホンの「1」のボタンの音波は図 1 のようになり、これは、高等学校で学習するグラフとは様子が異なる。しかしその振るまいやほぼ周期的に変化する様子から、

正弦曲線であることが予想できる。正弦曲線に表したときに係数を求めることは、数学的にはフーリエ展開によって行われる。しかしフーリエ展開を行うには、波の周期を正確に知る必要があり、図 1 を見ればわかる通り、これは容易ではない。さらにその計算は煩わしく、三角関数の積分の知識も必要となる。

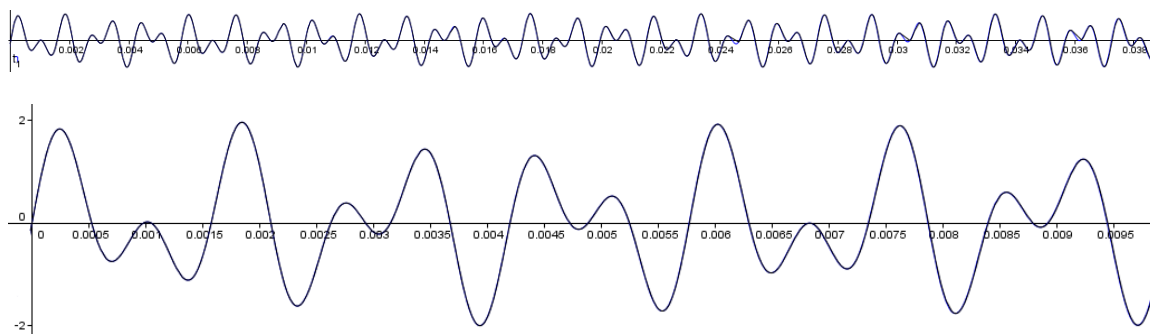


図 1 (「1」の音波；下は拡大したもの)

そこで本教材では、コンピュータを用いて、プッシュホンの音波の関数を特定していく活動を設定した。コンピュータを活用することで、生徒は様々な関数を設定することができ、係数や定数項などを自由に变化させることもできる。これにより、ある関数を入れたときにどのようなグラフが現れるのか、また変数を動かしたときに、グラフ上にどのような変化が生じるのかを捉えることができ、複雑な計算なしに、グラフを特定することが可能となる。

さらに、関数や変数をでたらめに入力していたのでは、なかなか求めたいグラフに近づかないことから、グラフの特徴を数学的に捉えることが必要となる。例えば、最大値や最小値、周期や軸との交点などの特徴を考察し、それを踏まえて関数を設定することで、求めたいグラフに接近させることができる。特に、係数の変化によるグラフの変化を捉えるには、スライダーを用いて変数を動的に動かしていくことが有効であり、これを用いてより求めたいグラフに近い関数が得られると考える。これらの活動を通して、数学的にグラフの特徴を捉える力を養うことができると考える。

グラフを特定した後は、「プッシュホン」の現実事象に返って考えることで、数学の世界で探究した答えが現実の世界でどのような意味を持つかを考えるようにする。最終的には表 1 を見出し、生徒が数学的な探究を通して現実にある事象を解明したと実感できることを目標とする。さらにその実感を確かなものとするために、解明した関数の音波を使って音を鳴らせば、実際に電話がかけられるというところまで経験させたい。

2. 使用するソフトウェア

- Audacity (URL: <http://audacity.sourceforge.net/?lang=ja>)
音を鳴らして音波のグラフを表示させる (教師)。

- Excel
背景な透明なグラフを作成する（教師）。
- GeoGebra (URL: <https://www.GeoGebra.org/>)
Excel で作ったグラフを貼り付け（教師），そのグラフとなる関数を見つける（生徒）

3. 授業展開の例

展開例（自力解決まで）

教師の活動	生徒の活動	留意事項
用意した電話機で，0～9， *, #のボタンを押して音を 鳴らす。 用意した他の種類の電話 機でも同様に，いくつかの ボタンを押して音を聞く。 「プッシュホンボタン によってどのような音が出 るかが決まっています。 どのような秘密があるで しょうか。」 「音から波形を表示する ソフトウェアがあります。 どのような波になるか見 てみましょう。」	「押すボタンによって聞こえる音が違う」 「音の高さが違う」 「電話機が違って同じボタンを押して聞 こえる音は同じ」 「右にいくほど音が高く，下にいくほど音 が高い」  「音を聞くだけではこれ以上のことはわか らない。」 「音を波で表せれば何かわかるかもしれな い」	音を波で表すとい う考えが出なけれ ば，物理で音に関し て学習したことや， 音を視覚的に表す 方法を問うて，引き 出すようにする。 教師用の PC でサウ ンド編集ソフトウ ェア "Audacity" を 起動し，画面をスク リーンに映す。

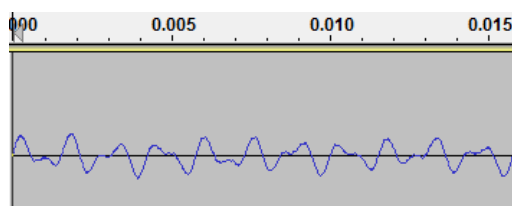
プッシュホンの「1」を押して録音し，波形を見る。

「『1』の音波はどのような関数になっていそうですか？」

「この『1』の音波が，どのような関数になっているかを探究してみましょう。」

Excel の関数を GeoGebra に貼り付けたものを，生徒全員のコンピュータに表示させる。

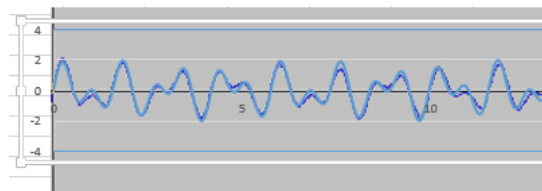
「『1』の音波を表すグラフの関数を見つけよう」



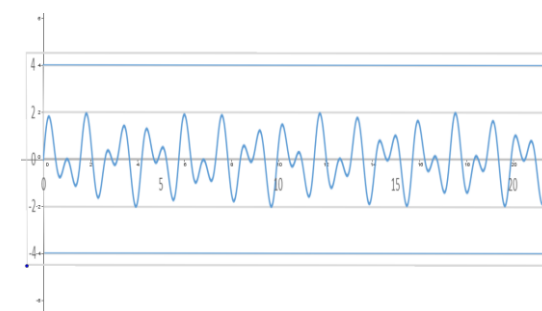
(「1」の音波)

「周期関数っぽいような」

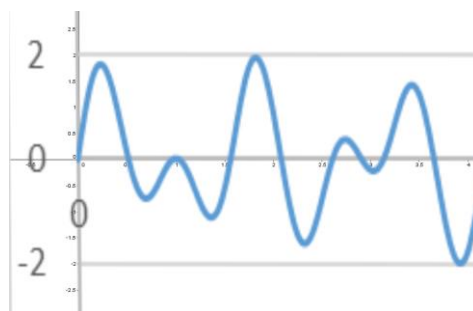
「sin とかのグラフに似ているけど，見たことない」



(Audacity と Excel のグラフを重ねたもの)



(Excel のグラフを GeoGebra に貼付)



(ズームしたもの)

不要な部分は削除し，波形が見やすいように拡大する。

"Audacity" のグラフは透明にならないので，あらかじめ用意したエクセルの透明化したグラフと重ね合わせ，これを使うことを確認する。

GeoGebra には Excel のグラフを大きさを調整して固定して貼る

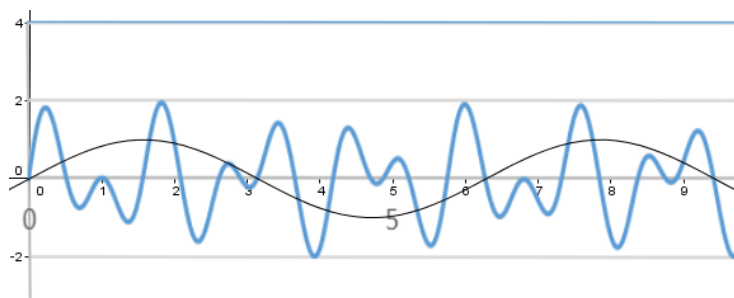
横軸は秒を表し単位は $\text{秒} \times 10^{-3}$ ，縦軸は振幅を表し単位はないことを確認する。

自力解決で予想される活動（青が求めたい音波のグラフ）

① 多項式関数や、分数関数を書いてみる。

→ x が ∞ や、特定の値で発散してしまう。

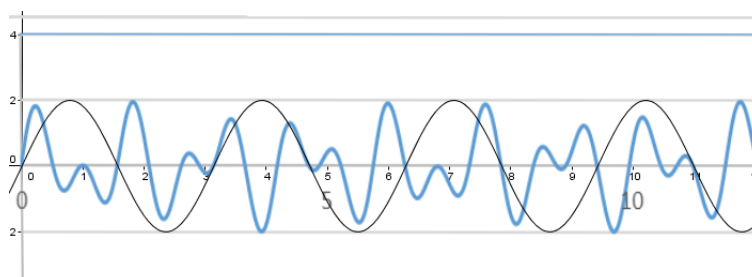
② 周期関数に見えるので、 $y=\sin x$ としてみる。



($y=\sin x$)

→ 周期と振幅が異なる。

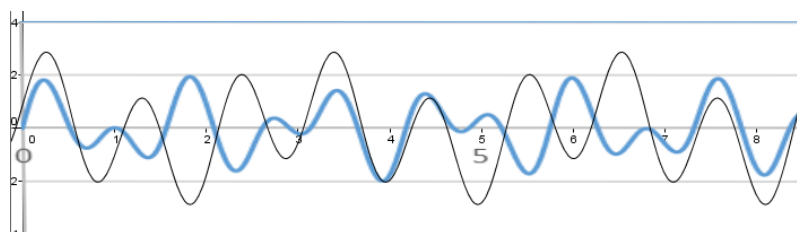
③ $y=a\sin(bx)$ と考え、係数を調整する。係数をスライダーで調整する。



(例として、 $y=2\sin 2x$)

→ 求めたい波のような複雑な形を取らない。

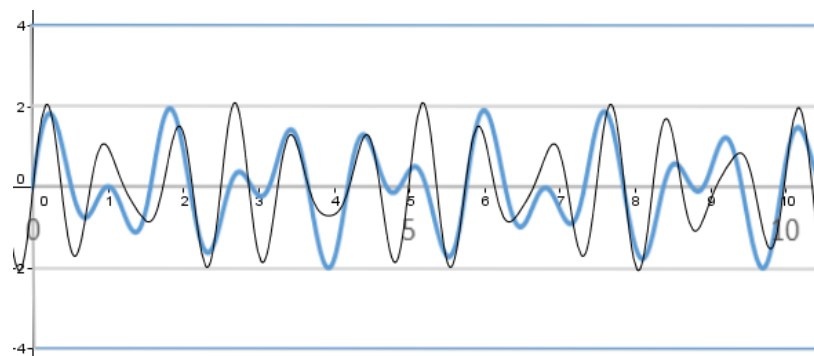
④ $a \sin(bx) + c \cos(dx)$ を考える。係数をスライダーで調整する。



(例として、 $y=2\sin(6x)+\cos(2x)$)

→ 複雑な形をするようにはなったが、求めたいものからは遠い。また、 $c \neq 0$ とすると、このグラフは原点を通らないため、 $\cos$ の和を含めることは不適切であると考えられる。

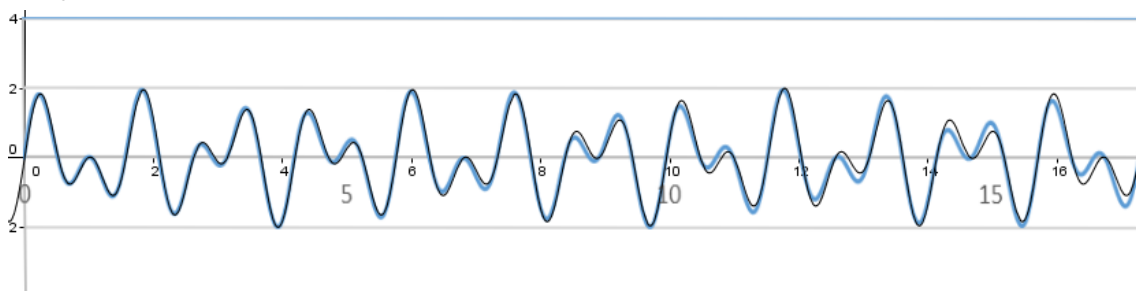
- ⑤ $a \sin(bx) + c \sin(dx)$ を考える。係数をスライダーで調整する。



(例として, $y = 1.4 \sin(7.6x) - 0.7 \sin(-10x)$)

→ 求めたいグラフに段々と近づいてきた。しかし変数が4つあり、動かし方が難しい。

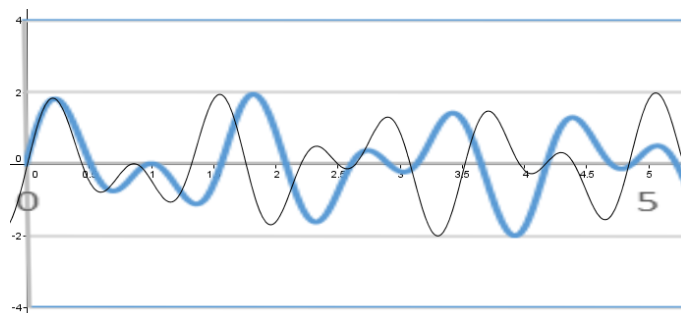
- ⑥ 最大値, 最小値がおよそ 2, -2 であることから, $\sin$ の係数は両方 1 であると仮定し, $y = \sin(bx) + \sin(dx)$ を考える。



(上手くいった例として, $y = \sin(7.6x) + \sin(4.4x)$)

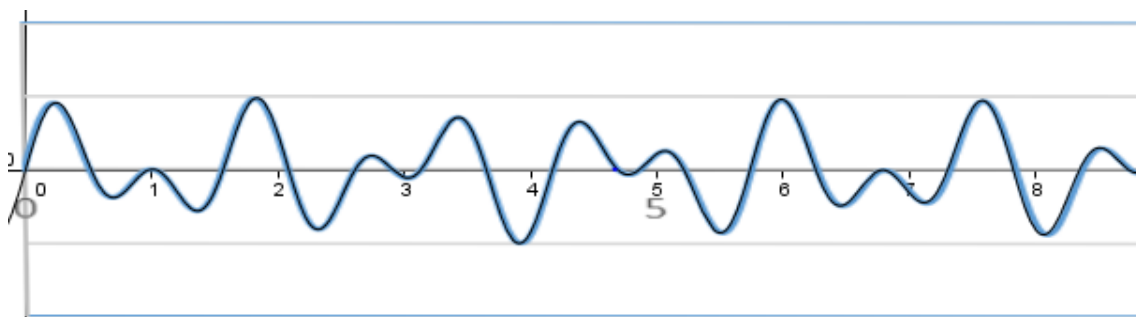
→ 求めたいグラフとはほぼ重なる。しかし、係数 2 つを独立に動かしてうまく調整するのは難しい。そこで係数の動かし方を工夫する。

- ⑦ 初めて 2 に近づくとところ ($x=0.22$ あたり) で, $y=\sin(bx)$, $y=\sin(dx)$ が初めてともに 1 になっていると考える。すると x の係数 $b(d)$ は, $b \times 0.22 = \pi/2$ より, $b=d= 25/11 \pi$ となるが、これでは複雑な形にならないため、同じだけ $25/11 \pi$ から同じだけ正と負にずらす。つまり $y=\sin(25/11+t) \pi$, $y=\sin(25/11-t) \pi$ としてみる。



(例として, $t=-0.6$ のとき)

求めるグラフに近づいてきたが、まだ一致しない。そこで「 $25/11$ π から同じだけ」ずらしたという仮定がまずかったと認識し、さらに $y=\sin(25/11+0.6+u)\pi$, $y=\sin(25/11-0.6+v)\pi$ としてみる。



(上手くいった例として, $u=-1.48$, $v=0.75$ のとき)

- ⑧ $y=a\sin(bx)\cos(cx)$ の形を考える。 $a=2$, $b=6$, $c=-1.6$ のとき, つまり $y=2\sin(6x)\cos(-1.6x)$ とすれば, 求める関数とほぼ合致する。
積和公式より, $2\sin(6x)\cos(-1.6x) = \sin(7.6x) + \sin(4.4x)$ であるので, ⑥に統合できる。

展開例 (自力解決後)

教師の活動	生徒の活動	留意事項
『1』の音波の関数を求めることができたが, 今度はこれを現実事象, すなわちプッシュホンに戻して考えよう。」 「求めた関数は2つの波の和であることがわかった。それぞれの波は何Hzか？」 「実際の『1』の音波は, 1209Hz と 697Hz の波の組み合わせでつくられています。」	⑥～⑧により求めたいグラフにほぼ重なる ⑥より $y=\sin(7.6x)+\sin(4.4x)$ ⑦より $y=\sin(25/11+0.15)\pi+\sin(25/11-0.88)\pi$ ⑧より $y=2\sin(6x)\cos(-1.6x)$ 「⑦は $y=\sin\Box\pi$ の形になっているからわかりやすい。」 「⑦の $25/11$ を小数に直して, 秒の変数で考えれば, $y = \sin(1211 \times 10^{-3} \times 2\pi t) + \sin(696 \times 10^{-3} \times 2\pi t)$ になる。」 「1211Hz と 696Hz」 「音波のグラフから関数を求めることができた！」 「プッシュホンに三角関数が使われているなんて驚いた。」	物理の学習により, x を秒としたときに 1 秒間に 1 周期分の波がある $y = \sin(2\pi x)$ の周波数が 1Hz であることは既知であるとする。 積和公式により⑧は⑥に統合できることを確認する。

この後、グループごとに、プッシュホンの他の音に関する探究を割り振り、同様の活動によりそれぞれの音の関数を特定する活動を行う。さらにこれを現実事象に戻し、それぞれが何 Hz の波の合成であるかを求める。最終的には表 1 を作成し、プッシュホンの音の仕組みを得ることを目標とする。

さらに「プッシュホン」という現実事象に戻り、これらの音波の組み合わせから実際に音を出し、電話をかけられるというところを、クラス全体で共有する（この際にどのソフトウェアを使うかなどの詳細は検討中）。

参考文献

川添充，岡本真彦(2012)『思考ツールとしての数学』p.106，共立出版

トランスナショナルカレッジオブブレックス(2013)『フーリエの冒険 新装改訂版』，ヒッポファミリークラブ