

二次関数のグラフ探究

東京学芸大学（大学院） 高濱 良匡

東京学芸大学（大学院） 山田 剛

東京学芸大学（大学院） 高田 弥佳

1. 授業の構想

(1) 意図

二次関数で、 $y = ax^2 + bx + c$ の形で表された式（一般形と呼ぶ）と $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ の形で表された式（因数分解形と呼ぶ）を関連づけることで、二次関数のグラフや二次方程式の理解を深める。

(2) GeoGebra による探究

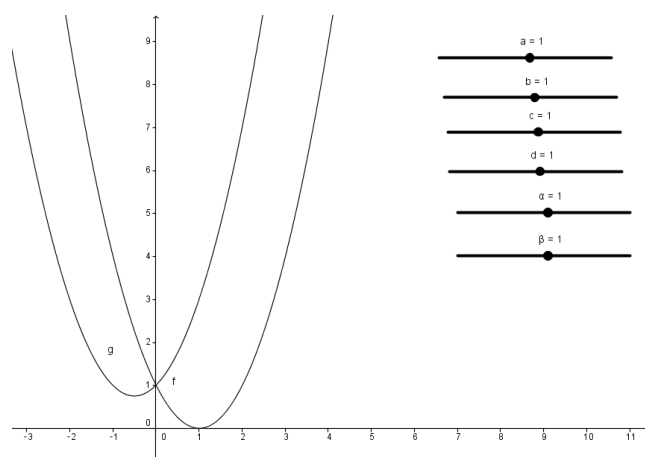
本活動ではグラフツールの一つである GeoGebra を用いて、 a, b, c, α, β の値を変化させることで、それぞれが表している二次関数を探究していく。

①準備

準備として、 a, b, c, α, β の値を動かせるように、スライダーを作成する。

今回はグラフを別々に操作したいので、一般形($y = ax^2 + bx + c$)と因数分解形($y = a(x - \alpha)(x - \beta)$)で同じ文字が使われている a を一般形のみとし、因数分解形の a は d として、 $a, b, c, d, \alpha, \beta$ のスライダーを作成する。（つまり、一般形は $y = ax^2 + bx + c$ ，因数分解形は $y = d(x - \alpha)(x - \beta)$ ）

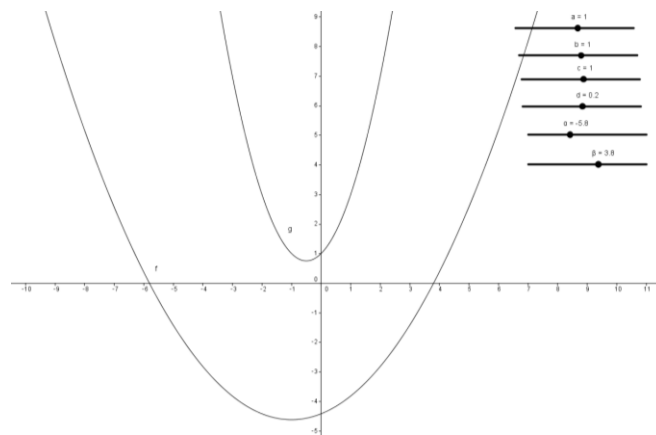
すべて 20 から -20 を範囲とし 0.1 ずつ変化するように設定する。すなわち、今回のパラメータは有理数での考察にとどまる。 $y = ax^2 + bx + c$ と $y = d(x - \alpha)(x - \beta)$ となる二次関数を打ち込む。（図 1）



[図 1]

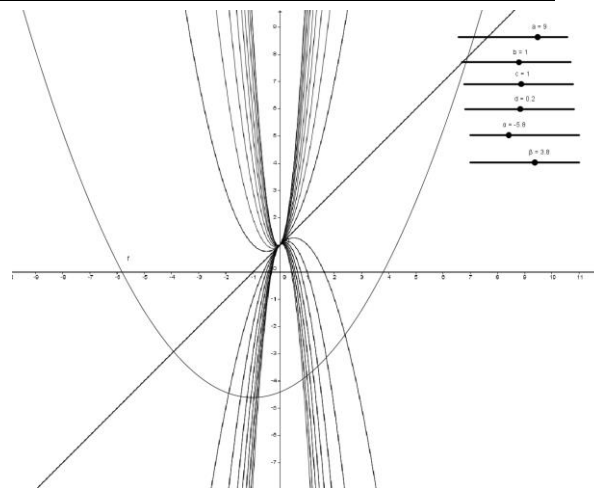
①一般形を動かして因数分解形と一致させる活動

因数分解形を固定し、一般形の a, b, c を動かして、一致するようにグラフを変形する。そのために、まずは a, b, c によってグラフがどう変化するかを考察する。



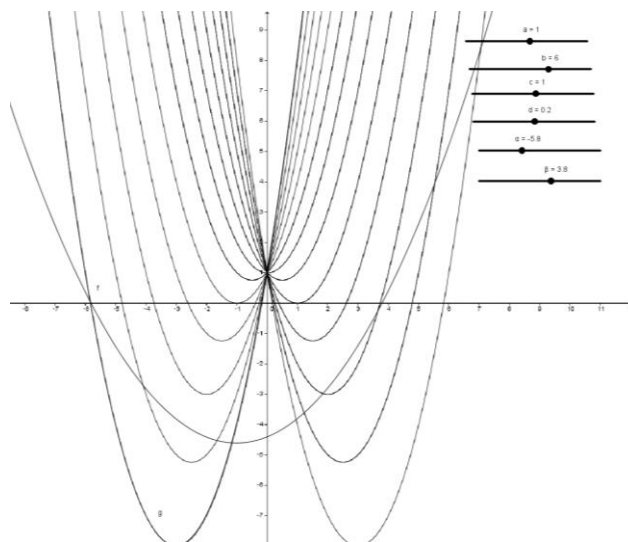
〔図 2〕

まず a のみを動かしてみる． a を動かすことによって，グラフの開き具合が変化している．また，頂点に着目すると，頂点が一次関数のように動くのではないかと推測される．(図 3)



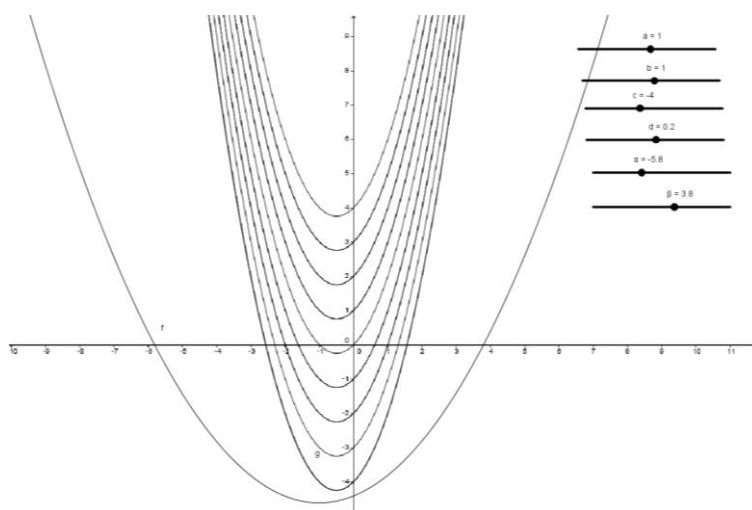
〔図 3〕

次に， b を動かしてみる． b を動かすことによって，グラフの開き具合は変化していない．また，頂点に着目してみるとグラフが下に凸の二次関数のように動くことが推測される．(図 4)



〔図 4〕

c を動かすと、グラフの開き具合は変化せず、グラフが y 軸方向に平行移動していることが推測される。
(図 5)



[図 5]

今回は、“グラフの開き具合”と“頂点の座標”について a, b, c を動かすことによってどのように変化するかをまとめる。

○グラフの開き具合について： a —変化する， b —変化しない， c —変化しない

このことから、グラフの開き具合というのは、 a にだけ影響を受けることがわかり、グラフの概形を一致させるために、 a を動かせばよいということがわかる。

○頂点の x 座標について： a —変化する， b —変化する， c —変化しない

○頂点の y 座標について： a —変化する， b —変化する， c —変化する

これを表にまとめると、以下(表 1)のようになる。

[表 1]

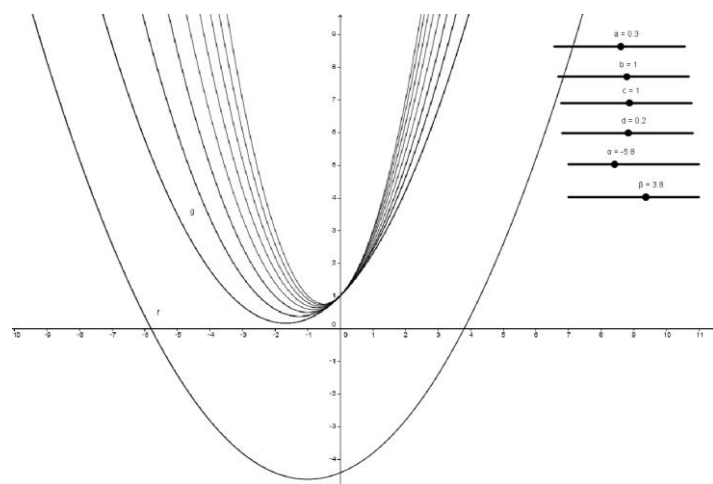
	グラフの開き具合	頂点の x 座標	頂点の y 座標
a	変化する	変化する	変化する
b	変化しない	変化する	変化する
c	変化しない	変化しない	変化する

すなわち、一般形を因数分解形に一致させるためには、まずグラフの開き具合をそろえるために a を動かす（ここで、 a の値は決まる）。 a の値が決まったことで、頂点の x 座標は b によってのみ決まるので、 b を動かし頂点の x 座標をそろえる（ここで、 b の値は決まる）。最後に c を動かして頂点の y 座標をそろえる、ということがわかる。

GeoGebra の探究から b を動かすと頂点が二次関数のように動くようだと推測できたので、なぜ b を動かすと頂点が二次関数のグラフのように動くのか、ほんとうに二次関数になるのか、ということを代数的に探究する可能性も秘めている。(a, c も同様)

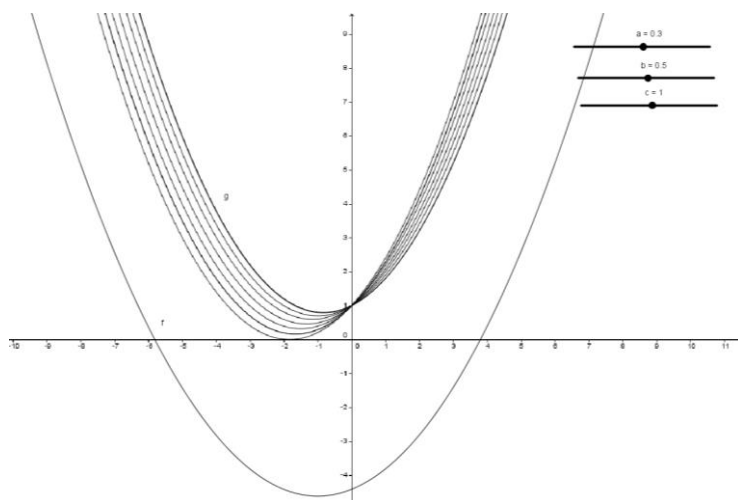
実際に、図 1 の状態から一般形を因数分解形に一致させる活動を行ってみる。

まず、グラフの開き具合を一致させるために、 a を動かす。(図 7)



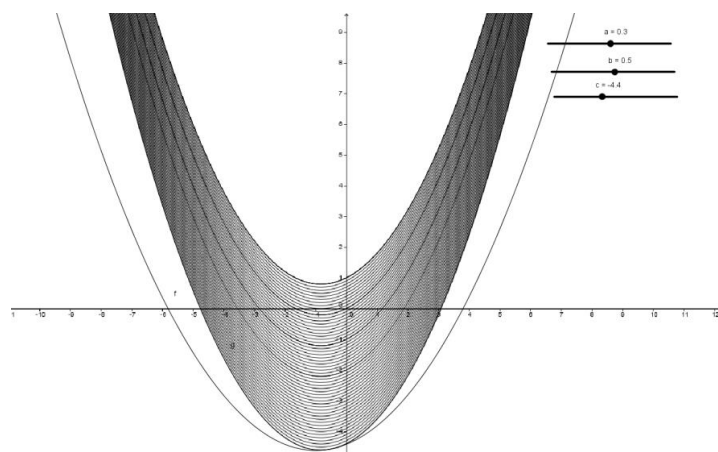
[図 7]

次に、頂点の x 座標が一致するように b を動かす. (図 8)



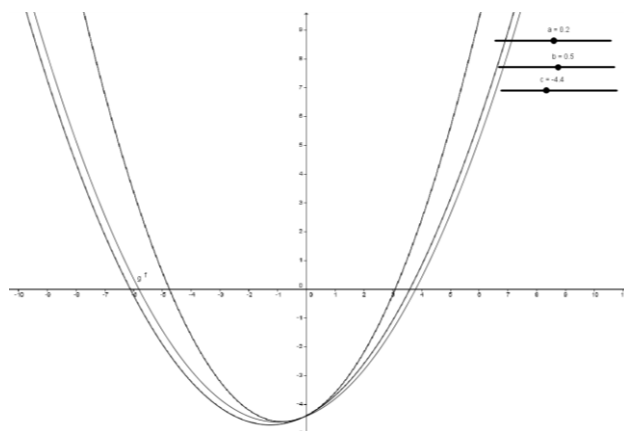
[図 8]

最後に頂点の y 座標が一致するように, c を動かす. (図 9)



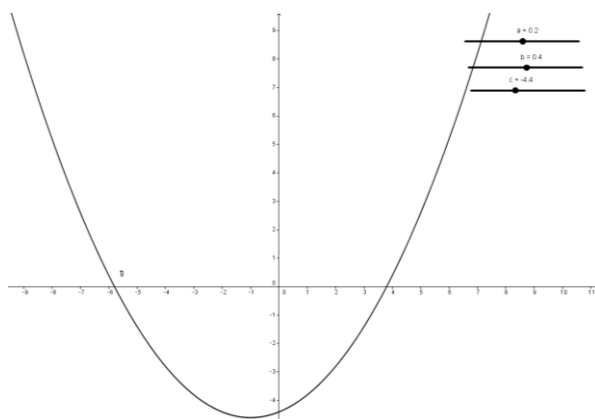
[図 9]

ここで、グラフが一致していないことがわかる。それは、開き具合が一致していないと判断する。そこで、もう一度 a を動かして、グラフの開き具合を合わせる。(図 10)



[図 10]

a に伴って、頂点の x, y 座標がずれてしまったので、まずは b を動かして頂点を近づける。(図 11)

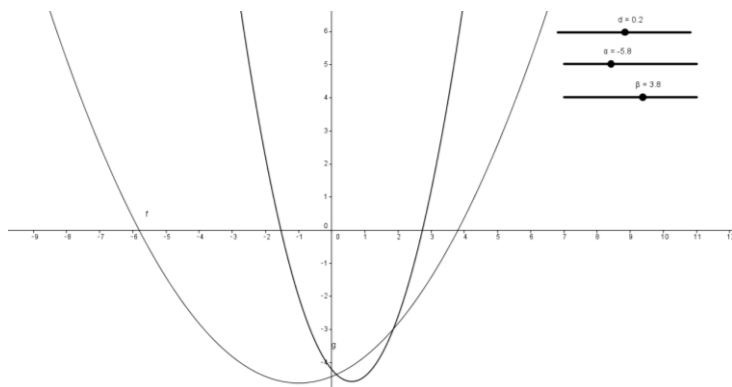


[図 11]

そうすると、一致したので一般形は $y = 0.2x^2 + 0.4x - 4.4$ となる。

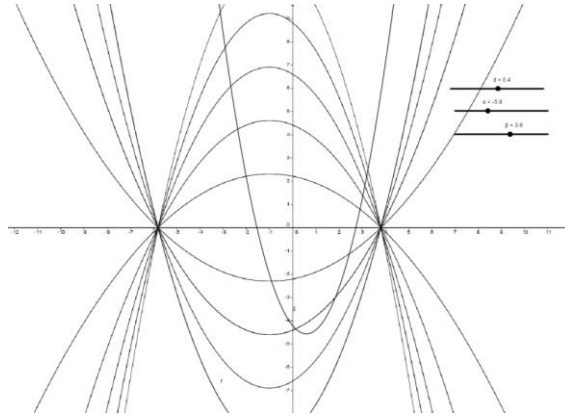
② 因数分解形を動かして一般形と一致させる活動

一般形を固定し、因数分解形の d, α, β を動かして、一致するようにグラフを変形する。そのために、まずは d, α, β によってグラフがどう変化するかを考察する。



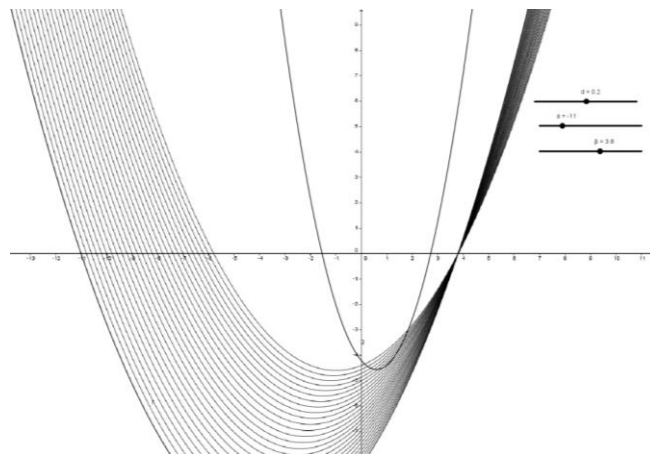
[図 12]

d を動かしてみると, d によって, グラフの開き具合が変化しているが, x 軸との交点は変わらない. (図 13)



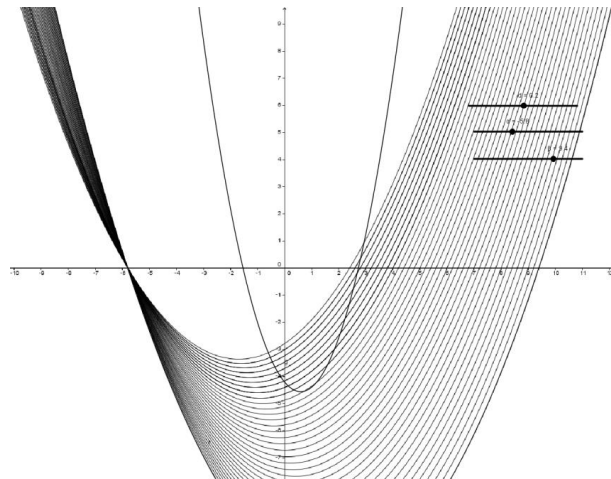
[図 13]

α を動かすと, 一方の x 軸との交点が移動していることがわかる. また, グラフの開き具合ともう一方の x 軸との交点は, 変化しない. (図 14)



[図 14]

β を動かしてみると, α を動かしたときに変化しなかった x 軸との交点に変化する. また, グラフの開き具合と α で動いた x 軸との交点は変化していない. (図 15)



[図 15]

d, α, β を動かすことで、グラフの開き具合と x 軸との交点の変化が明らかとなったので、その二つの視点でまとめてみると、

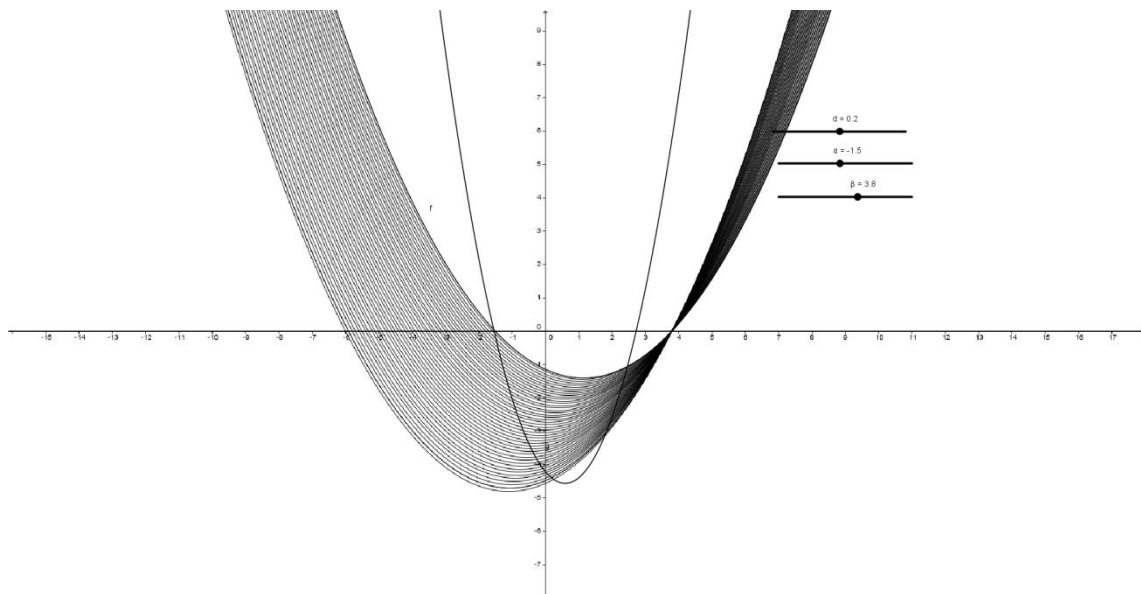
○グラフの開き具合： d —変化する， α —変化しない， β —変化しない

○ x 軸との交点： d —変化しない， α —変化する（一方）， β —変化する(他方)

因数分解形を一般形に一致させるときは、特に順番を考えずに、 d でグラフの開き具合をそろえ、 α と β でグラフの x 軸との交点をそろえればよいということがわかる。

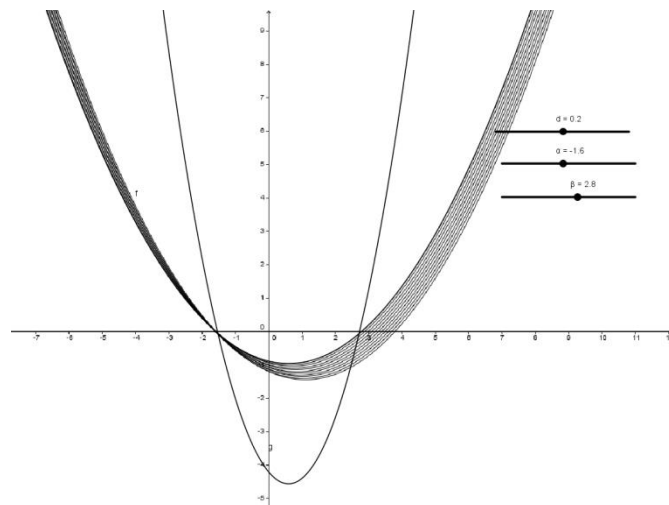
ここで、実際に図 12 の状態から因数分解形を一般形に一致させる活動を行う。

まずは、 α を動かして、 x 軸との交点の一つをそろえる。(図 16)



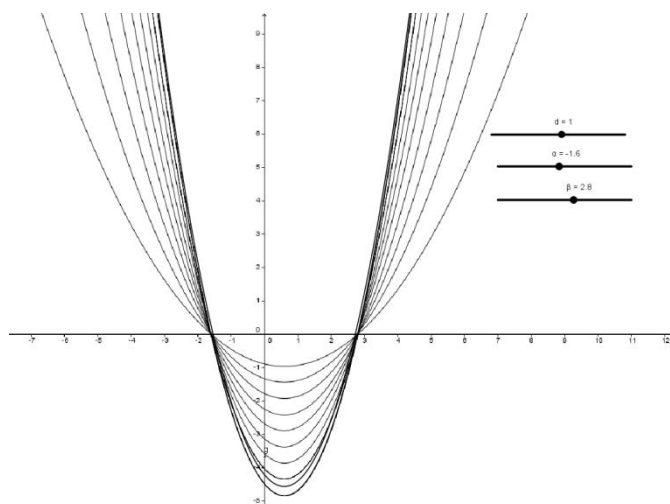
[図 16]

次に、 β を動かして、 x 軸とのもう一つの交点をそろえる。(図 17)



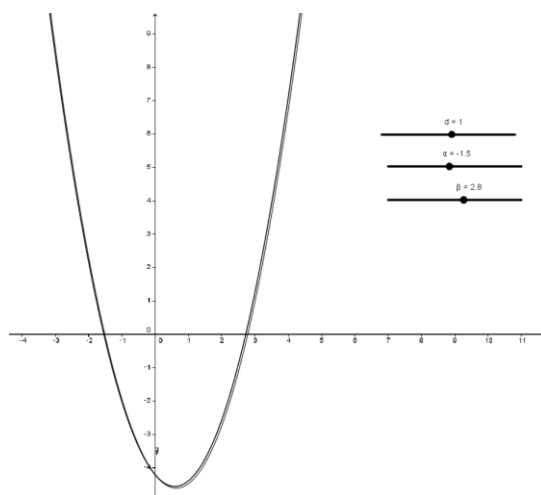
[図 17]

最後に d を動かして，一般形と一致させる．(図 18)



[図 18]

この活動を行ったことで，結論に到ったグラフが図 19 である．

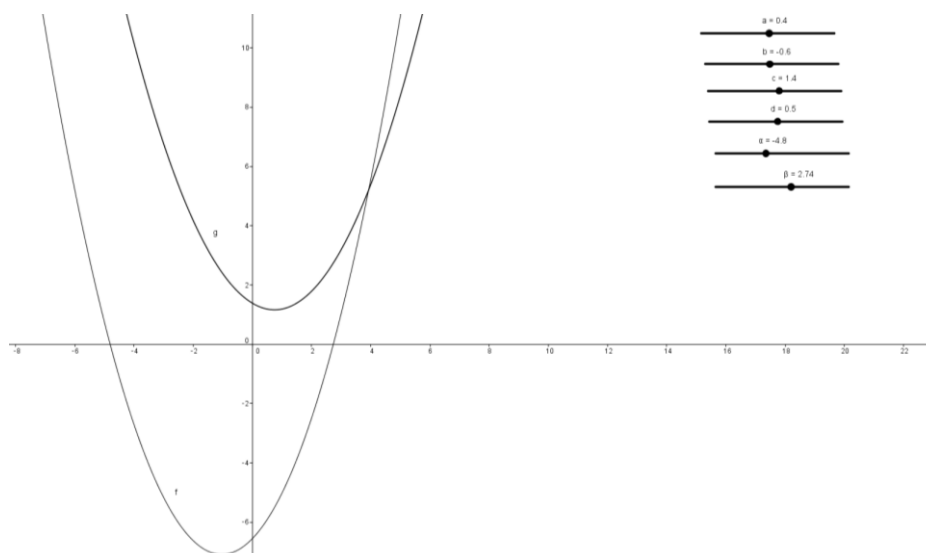


[図 19]

図 19 で，もし因数分解形と一般形が多少ずれていると判断したのであれば，GeoGebra ではグラフの拡大縮小が行えるので，動く範囲を 0.1 ではなく，細かくして，ぴったりと一致するように探究を進めることもできる．

③さらなる探究

一般形から因数分解形，因数分解形から一般形へと一致させる活動を進めていくと，一般形を以下の図(図 20)のようにすると，因数分解形では一致させることができない二次関数のグラフが存在することを見つける．なぜなら，因数分解形は x 軸との交点を動いているので， x 軸との交点がないグラフに一致させることはできない．



[図 20]

ここからは，グラフソフトを離れて代数的に考察する．

グラフソフトの探究から，因数分解形は何か制限があるのではないかと予想される．そこで，因数分解形を展開し一般形に直してみると，

$$y = d(x - \alpha)(x - \beta)$$

$$y = dx^2 - d(\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

となる． d ， α ， β が実数を動くことから，どの係数(d ， $d(\alpha + \beta)$ ， $\alpha\beta$)も実数の範囲を動かことができるので，展開しても一般形との違いを考察することができない．

そこで，標準形に変形してみると，

$$\text{一般形は， } y = a \left(x - \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$\text{因数分解形は， } y = d \left(x - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 + d\alpha\beta - \frac{d(\alpha + \beta)^2}{4}$$

$$y = d \left(x - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 + \frac{4d\alpha\beta - d(\alpha + \beta)^2}{4}$$

$$y = d \left(x - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 - \frac{d(\alpha - \beta)^2}{4}$$

となる，頂点の x 座標は実数の範囲を動かすが，

$d > 0$ のとき，頂点の y 座標は負の範囲，

$d < 0$ のとき，頂点の y 座標は正の範囲のみを動く．

つまり，因数分解形は d の正負によって，頂点の y 座標の動く範囲が制限されている．

因数分解形の頂点の y 座標が制限されないようにするためには， $(\alpha - \beta)^2$ が正の実数範囲だったのが，すべての実数の範囲を動かようにしなくてはならない．そこで，2 乗となる数が負になるような数(複素数)を導入する必要性が生まれる．

つまり，何とか因数分解形を一般形に一致させたいという問題意識のもと，複素数を導入することのできる可能性をもった教材である．

2. 本時案

(1)ねらい

- ・ 一般形($y = ax^2 + bx + c$)と因数分解形($y = a(x - \alpha)(x - \beta)$)の a, b, c, α, β の値を変えることで、それぞれが表せる二次関数のグラフを探究する。
- ・ また、その考察から一般形はすべての二次関数を表せること、因数分解形ではグラフが x 軸との交点をもつ二次関数を表せることを知る。

(2)

学習のねらいと発問	学習活動(予想される反応)	評価・配慮事項
1. 問題提起 ($y = ax^2 + bx + c$)と ($y = a(x - \alpha)(x - \beta)$)がそれぞれ二次関数を表すことを復習し、前者を一般形、後者を因数分解形と呼ぶことを全体で確認する。 「($y = ax^2 + bx + c$)と ($y = a(x - \alpha)(x - \beta)$)はどちらも二次関数を表しているから、係数を変化させれば2つの式のグラフを一致させることができるはずですよ。では、GeoGebra を使って2つのグラフを一致させてみましょう。」 2. 準備 ・ GeoGebra をひらかせ $a, b, c, d, \alpha, \beta$ の6つの文字ですべて最小・20, 最大 20の区間に設定したスライダーを作成するように指示する。 ・ 一般形の式を $y = ax^2 + bx + c$, 因数分解形の式を ($y = a(x - \alpha)(x - \beta)$)として数式に入力させる。 (一般形と因数分解形を別々に操作するためにの因数分解形の a を d にするよう指示する。) 3. 探究活動 ※グラフを一致させる活動をするが、$a, b, c, d, \alpha, \beta$ の変化によるグラフの変	二次関数はどのような形の式であらわされたかを確認する。 Geogebra で必要な初期設定を行う。	・ 全員必ず同じ文字でスライダーを設定するよう注意する。 ・ グラフの区別ができるように、それぞれ別の色に変えさせる。 ・ 準備は教師があらかじめデータを用意しておき、それを開かせるだけでも可能。

化の仕方を理解することを目標としているため、完全に一致させられなくても大体一致させることができているといい。 ①一般形を動かして因数分解形と一致させる活動 「因数分解形の d, α, β を適当に決めて、一般形の a, b, c を動かして、因数分解形のグラフと一致させてみましょう。」 ・ a, b, c によるグラフの変化を使ってグラフを一致させられるかをみる。 ・ 計算せずにスライダーを動かすだけで一致させられないかを問う 「一般形を因数分解形に一致させるためのコツはありますか。」	・ a, b, c によるグラフの変化を考えずに当てずっぽうに動かす ・ グラフの開き具合を a で決める ・ 頂点の x 座標が一致するように b を動かす ・ 頂点の y 座標が一致するように c を動かす ・ 代数的に $(y = a(x - \alpha)(x - \beta))$ を展開し、$a = d, b = -d(\alpha + \beta), c = d\alpha\beta$ として計算して a, b, c をその値に合わせるように動かす。 「まず、a, b, c それぞれの動きについて観察しました。」 a について 「グラフの開き具合が変わる。」 「頂点が一次関数のように動く。」 「a の絶対値が大きいほどグラフの開き具合が小さくなって、絶対値が小さいほどグラフの開き具合が大きくなる。」 「$a = 0$ のとき直線、$a < 0$ のとき上に凸、$a > 0$ のとき下に凸になる。」 「y 切片が変わらない。」 b について 「グラフの開き具合は変わらない。」 「二次関数(放物線)のように動く。」 「y 切片が変わらない。」 「$b = 0$ のとき一番上にくる。」 「$b = 0$ のとき一番下にくる。」 c について 「グラフの開き具合は変わらない。」 「y 軸方向に平行移動している。」	・ 机間巡視をして生徒がどのように一致させようとしているかをみる
--	---	--

②因数分解形を動かして一般形と一致させる活動 「では次に、一般形の a, b, c を適当に決めて、因数分解形の d, α, β を動かして一般形のグラフと一致させてみましょう。」 ・ d, α, β によるグラフの変化を使ってグラフを一致させられるかをみる。 ・ 計算せずにスライダーを動かすだけで一致させられないかを問う 「因数分解形を一般形に一致させるためのコツはありますか。」	「上下に動いている。」 「一致させるには、まず a を動かしてグラフの開き具合を合わせて、次に b で軸の位置を合わせて、最後に c で頂点の y 座標をそろえます。あとは微調整をします。」 ・ x 軸との交点が一致するように α, β を動かす。 ・ x 軸との交点が一致したら d を動かしてグラフの開き具合を一致させる。 ・ 代数的に $0 = ax^2 + bx + c$ を解いて α, β を求めてその値に合うように d, α, β を動かす。 「まず d, α, β それぞれの動きについて観察しました。」 d について 「x 軸との交点が変わらず、グラフの開き具合だけが変わる。」 「$d=0$ のときグラフがなくなる。($y=0$, x 軸になる。)」 α, β について 「2 つある交点のうち一方は変化するが、もう一方は変化しない。」 「$\alpha = \beta$ とすると、グラフが x 軸に接する。」 「グラフの開き具合は変わらない。」 「放物線を描くようにグラフが動く。」 「一致させるためには、まず α と β をそれぞれ動かして x 軸との交点と一致させ	・ このことに関しては、p.4 を参照。
---	---	--

「一般形はどのようなグラフですか。」 ← 4. 因数分解形を動かして一般形と一致させる活動の考察 「同じ二次関数を表す式であるのに、なぜ x 軸と交点を持たないグラフと因数分解形のグラフは一致させることができないのかを考えてみましょう。」	て、d を動かしてグラフの開き具合を調整します。」 「d, α, β をどう動かしても一致させられない」 ・ $y = ax^2 + bx + c$ の具体的な式を答える ・ x 軸と交点を持たないグラフ ①「因数分解形の式を展開して、一般形と比較してみました。」 $y = d(x - \alpha)(x - \beta)$ $= dx - d(\alpha + \beta)x + d\alpha\beta$ 「一般形と同じ形の式になった。」 「同じ形のはずなのになぜ表せないのだろう。」 ②「グラフが上(下)に開いていれば(下に凸, 上に凸), 頂点の y 座標が 0 以下(以上) でないと x 軸との交点をもたなくなり、解がなくなってしまうから。」 ③「一般形の式と展開した因数分解形の式を平方完成して標準形にして比較してみました。」 一般形 $y = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ 因数分解形 $y = d(x - \alpha)(x - \beta)$ $= dx^2 - d(\alpha + \beta)x + d\alpha\beta$ $= d\left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 + d\alpha\beta - \frac{d(\alpha + \beta)^2}{4}$ $= d\left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 + \frac{4d\alpha\beta - d(\alpha + \beta)^2}{4}$ $= d\left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \frac{d(\alpha - \beta)^2}{4}$	・ 一致させられない生徒がいなければ、一般形として $y = x^2 + x + 1$ を与え、これと因数分解形が一致させられるか問う。
---	---	---

「因数分解形するとき、なぜ頂点の y 座標の符号がわかるのですか。」 「なんとか因数分解形でも、x 軸との交点をもたない（二次方程式の解がない）二次関数を表したい、という方針でいきましょう。」 「因数分解形を標準形にした式のどこがどうなればいいですか。」 (以下、複素数の導入をする.)	「因数分解形の頂点の y 座標が $d>0$ のときは必ず負、$d<0$ のときは必ず正になっている。」 「一般形は頂点の座標の符号は定まらない。」 「$(\alpha - \beta)^2$ は絶対正になるから、d の正負によって符号がわかる。」 「頂点の y 座標が x 軸よりグラフの開いている側にあればいい」 「$(\alpha - \beta)^2$ が負の数になればいい」	
---	---	--