

多項式の近似によるいろいろな関数の導関数

課題設定の意図

三角関数，指数関数，対数関数等の微分は，高等学校第3学年の数Ⅲで学習する。そこでは，はさみうちの原理などの代数的な操作によって，それぞれの導関数を導く。それに対して，本課題は，数学Ⅱの多項式の微分の学習の後に，グラフ作成ソフトを使い，それらの導関数を探究するものである。具体的には，三角関数，指数関数，対数関数などを多項式関数で近似し，それらの導関数を推測する活動を行う。多項式で近似するという考えのよさや有用性を学ぶ機会にもなる。最終的には，三角関数や指数関数を多項式関数に表わすことが，マクローリン展開につながるということを生徒に意識させたいと考える。

さらに，この探究過程で，多項式の係数や符号変化がグラフに与える影響や，偶関数や奇関数の性質を見いだすことで，グラフから式を予想することや式からグラフを予想するといった，いわば関数感覚の伸長も期待できる。

授業の目標

グラフ作成ソフト (GRAPES) を使って，いろいろな関数を多項式で近似しようとする。

(関心・意欲・態度)

多項式の符号変化や偶関数・奇関数が多項式関数に与える影響を考えることができる。

(数学的な考え方)

微分の理解を深め，多項式関数に表わすよさを理解することができる。(知識・理解)

いろいろな関数を多項式関数に表わし，それを微分することができる。(技能)

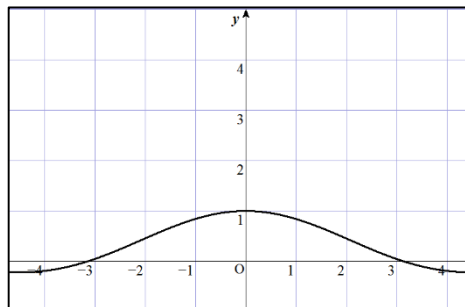
授業計画 (6 時間扱い)

第1・2時・・・三角関数($\sin x$)の微分 (本時)
主な活動内容 ・微分の定義に従って， $\sin x$ の微分を考える。 ・ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ の値を，GRAPES を使って $\frac{\sin x}{x}$ のグラフを書く。 ・ $y = x$ のとき， $\sin x$ は，原点において $y = x$ と一致することから， $\sin x$ のグラフは，原点において $y = x$ に一次近似できることを考える。 ・ $y = x$ のグラフを $\sin x$ に近づけるために，多項式関数に表わす。 $(-\pi \leq x \leq \pi)$ ・得られた多項式関数を微分する。 ・微分した多項式関数を GRAPES に表示し，そのグラフをよむ。
第3・4時・・・三角関数($\cos x, \tan x$)の微分
第5・6時・・・指数関数・対数関数の微分

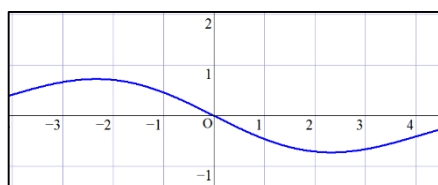
指導過程（第1時）

学習のねらいと発問	学習活動（予想される反応）
「多項式関数の導関数について学習しました。１次関数や２次関数の導関数はどうなりますか。」 「三角関数、指数関数、対数関数についてはどうでしょうか。最初に、三角関数を考えましよう。」 【自力解決】 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x \sin h}{h}$ $= \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$ ０／０になっているので、わからない。 以上の変形については $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} \text{ と } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$ は極限值があるものと仮定することによって、極限の線形性を保障している。 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} \text{ と } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \text{ の極限值が分かればよい}$ 「$y = \frac{\cos x - 1}{x}$ と $y = \frac{\sin x}{x}$ のグラフを書いてみて、$x \rightarrow 0$ のときどんな値なのかを見てみよう。」	

「 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ を，接線を求めること
調べられないかな。」



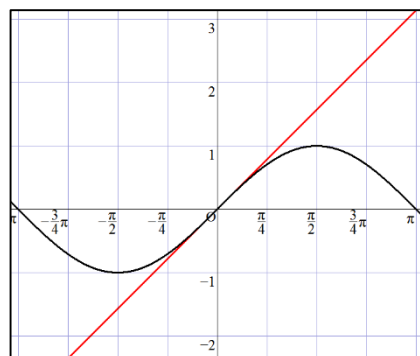
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

上の二つの極限は $0/0$ で不定形だが，グラフでは極限値があり，どちらが正しいのか不明。

接線の方程式から， $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

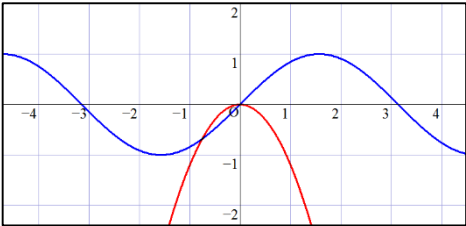
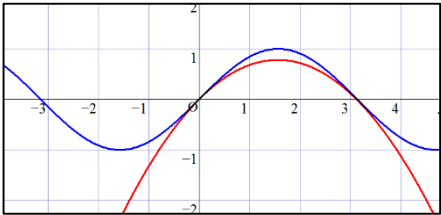
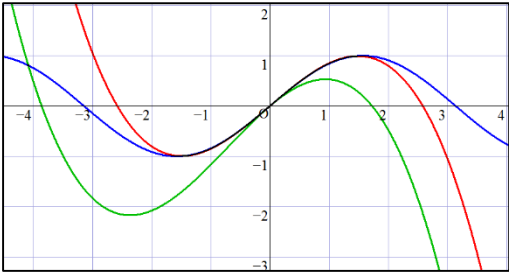


$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(0 + h) - \sin 0}{0 + h - 0}$$

原点における接線の傾きだと考え， $y=x$ なので，

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

(第2時)

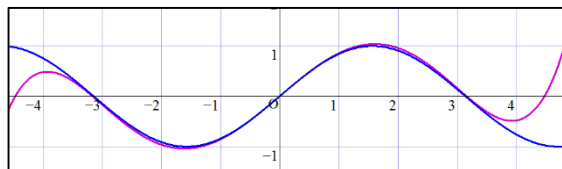
学習のねらいと発問	学習活動（予想される反応）
「前回是一次式で近似しましたが，$\sin x$ をもっと精密な近似式で表すことはできないでしょうか。」	・二次関数にしたら，もう少し近づくかもしれない。 二次式で近似してみると，  $y = -0.12x^2$ にすると，凸の部分がずれているので，平行移動してみる。  $y = x - 0.32x^2$ となる。 $y = ax^2$ だと偶関数なので，平行移動しても奇関数にはならない。 奇関数にするために三次式にすると， ・ $y = x + ax^2 + bx^3$（緑線） もしくは ・ $y = x + bx^3$（赤線）のどちらかになると予想する。  以上のように，$y = x - 0.32x^2 - 0.1x^3$（緑線）だと，対称

ここで、偶数乗だと対称性がくずれてしまうため、奇数乗のみをいれていくことを意識づけする。

性がくずれてしまう。

よって、 $y=x-0.15x^3$

にする。 $\pi/2$ までしか同じになっていないので、 x^4 を加えると、また対称にならなくなってしまうので、 x^5 を付け加える。



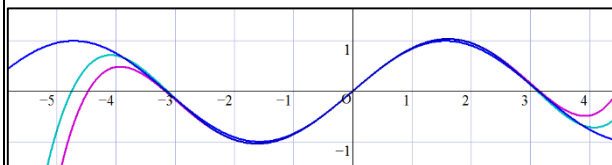
$y=x-0.15x^3+0.005x^5$ (紫線)

$y=x-0.15x^3+0.005x^5-0.000014x^7$ (水色線)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0.15x^3 + 0.005x^5 - 0.000014x^7}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 - 0.15x^2 + 0.005x^4 - 0.000014x^6$$

$$=1$$



「 $y=\sin x$ を多項式関数で表すことができたので、導関数を求めることができないでしょうか。」

となる。

π までは、グラフ上で近似することができた。
これを微分すると、

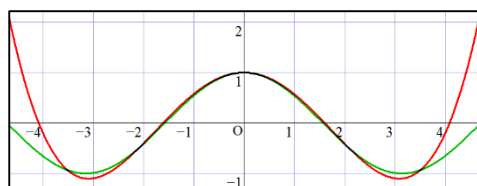
$y'=1-0.45x^2+0.025x^4-0.000098x^6$ となる。



「このグラフを見て、どんな関数が想像できますか。」

• $y=\cos x$ にみえる

「 $y=\cos x$ のグラフを出して見て比べてみよう。」



【まとめ】 「いろいろな関数を多項式関数で表すことができます。このように、いろいろな関数を多項式関数に表すことをマクローリン展開といいます。」 「他の関数について考えてみよう。」	・ だいたい同じだ。 ・ $\sin x$ を微分すると、やっぱり $\cos x$ になる。 ・ 三角関数でも多項式関数に表すと、微分することができる。 $\tan x$ をしてみよう。 実際には、$1/(\cos x)^2$ になるが、このグラフを予想することはできないだろう。 だから、三角関数の公式である $1 + (\tan x)^2 = 1/(\cos x)^2$ を使うとうまくいくのではないだろうか。
--	--