

学 習 指 導 案

作成者 東龍平, 佐々木陽平, 和田康戴

日時 平成 26 年〇月×日 第 1 時限(9:00~9:50)

場所 〇〇高等学校

学級 1 年〇組 (男子 20 名、女子 20 名、計 40 名)

単元名 平面図形から空間図形への類推

授業の意図

現在の数学教育では空間観念の育成が 1 つの目標になっている。しかし、空間観念の育成を図る教材は乏しいように思われる。特に、高等学校において顕著である。一方では、日本では論証指導における平面図形の指導が空間図形の指導に比べて重点化される傾向にある。平面図形の指導と空間図形の指導を孤立した指導として考えるのではなく、その関連性を強調した指導をすることによって、数学的な見方や考え方の指導を大切にしつつ、空間観念の育成ができるのではないかと考える。空間観念の育成として類推の水準をあげることがあると考える。類推によって平面図形と空間図形を行き来することで、空間図形の構成要素の関係を捉えられるからである。

このことを踏まえて、類推に焦点を当てて授業を行う。扱う題材は四面体の内角の和と外角の和、四面体の重心である。指導計画は 3 時間構成である。第 1 時間目では、類推の契機の間をつくることをねらいとしている。類推の契機について「類推を行う場合に、いちばん重要な契機は、B の世界の x' は、A の世界の x と似ているという認識である。」(島田茂,1990)とあり、空間の世界の四面体は平面の世界の三角形と似ていると認識させることを意図している。その中でも比較的類推しやすいと思われる四面体の内角の和と外角の和が一定であることを取上げる。第 2,3 時間目では、四面体の重心を取上げる。この問題は『教職数学シリーズ 実践編 10 教師のための問題集』に載せられている。四面体の重心を取上げる意図は、類推の方法が多様にあること(結果的には同じになるが)と証明が類推できるからである。第 2 時間目では類推するとき図形の関係を同じとみること(例えば、直線が面積を 2 等分することと面が体積を 2 等分することは同じとみること)が大事であることを指導するのがねらいである。適当に四面体の頂点と向かい合う面の重心を結ぶ生徒に対して、頂点と重心を結ぶことを三角形においても同じとみることができることを伝える。似ている時は何が同じかを明確にすることが大事である。第 3 時では、四面体の重心が存在することを証明する。三角形の重心が存在することの証明を活かせることを指導する。三角形ではそれぞれの中線の交点の中線が中線を 2:1 に内分する点になるので重心が存在することが証明される。同じように、四面体ではそれぞれの中線の交点の中線が中線を 3:1 に内分する点になるので重心が存在することが証明される。

この単元全体を通して生徒が最も主体的に活動でき、多様な解法が表れる時間が第 2 時間目であると思われる。そこで、今回は第 2 時間目に焦点を当てて授業展開を考える。

指導計画

	ねらい	予想される活動
第1時間目	類推すること	三角形について知っていることと四面体について知っていることを比較し、四面体の内角の和と外角の和を類推して、それぞれ一定であることを証明する。
第2時間目 (本時)	類推において関係を同じとみること	四面体の重心を類推する。
第3時間目	証明を類推すること	四面体の重心が存在することを証明する。

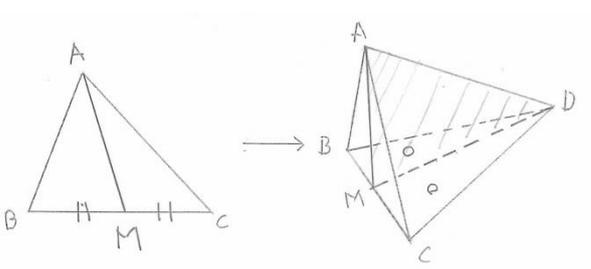
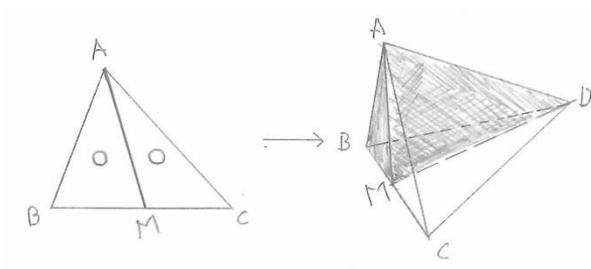
本時の目標

- 三角形の重心を見直して四面体の重心を類推する。
- 類推において何が同じかを明確にする。

使用教科書 なし

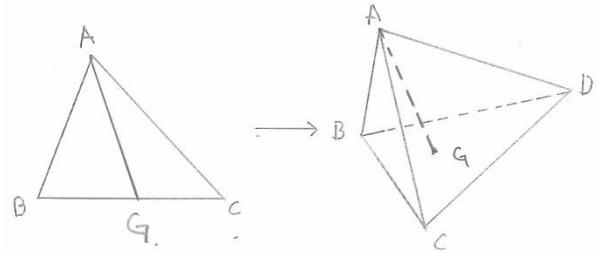
準備するもの なし

指導過程

時間	教師のねらいと発問	学習活動(予想される反応)
5分	<p>1. 問題の提示</p> <p>「三角形が多角形を作れることと四面体が多面体を作れることは同じだね。」</p> <p>「三角形と多角形の関係と四面体と多面体の関係は同じだね。」</p> <p>• 三角形と四面体は似ていることの確認。</p>	<p>学習活動(予想される反応)</p>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">四面体の重心の決め方を考えよう</div>		
10分	<p>2. 自力解決</p>	<p>1. 辺の長さの等分→面の面積の等分</p> <p>三角形の中線が辺の長さを2等分しているとみて、面の面積を2等分するように頂角の1つの辺を通る平面をつくり、四面体の重心を決める。</p>  <p>2. 三角形の面積の等分→四面体の体積の等分</p> <p>三角形の中線が三角形の面積を2等分しているとみて、四面体の体積を2等分するように頂角の1つの辺と向かい合う辺の中点を通る平面をつくり、四面体の重心を決める。</p> 

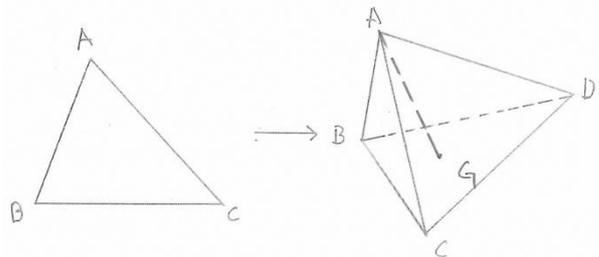
3. 辺の重心→面の重心

三角形の辺の中点は線分の重心と見直して、四面体の面の重心と頂点を結び、四面体の重心を決める。



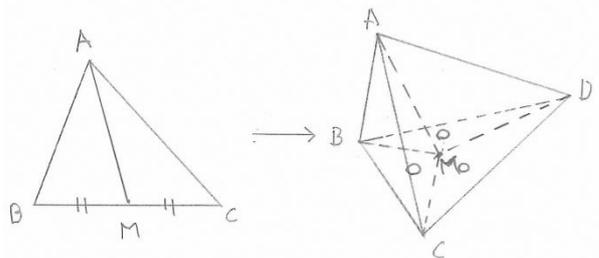
4. 適当に頂点と重心を結ぶ

四面体の重心を決めるのだから、三角形の面の重心と頂角を結んでみて、四面体の重心を決める。



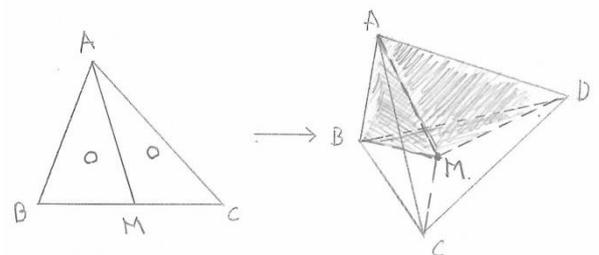
4. 1. 2等分→3等分

三角形の中線が辺の長さを2等分しているとみて、面の面積を3等分するように頂点から面の重心へ線分を引き、四面体の重心を決める。



4. 2. 2等分→3等分

三角形の中線が三角形の面積を2等分しているとみて、四面体の体積を3等分するように頂点から面の重心へ線分を引き、四面体の重心を決める。



<p>30分</p>	<p>3. 練り上げ</p> <p>「どうやって考えたのか？」</p> <ul style="list-style-type: none"> •4を取上げて, 三角形における中線と重心の関係を捉えてない例を挙げる。 <p>「他の考えはあるか？」</p> <ul style="list-style-type: none"> •1. 1と2. 1を取上げ, 三角形における中線と重心の関係を捉えている例を挙げる。 <p>「1つの頂角に対して3つの平面を考えているか, その共通部分は何か？」</p> <ul style="list-style-type: none"> •3 つの平面の共通部分が頂角と重心を結んだ線分になることを確認する。 	<p>5. 適当に各面の重心を結ぶ。</p> <p>(授業では取上げないが, 四面体が形成される。くり返せば重心に近づく。三角形に類推して考えると面白い。)</p> <p>「適当に重心と頂点を引いて, 四面体の重心を決めようとした。そしたら1点に交わりそうだった。」</p> <p>「三角形の中線が辺の長さを2等分しているとみて, 面の面積を2等分するように頂角の1つの辺を通る平面を考えた。」</p> <p>「三角形の中線が面積を2等分しているとみて, 四面体の体積を2等分するように頂角の1つの辺を通る平面を考えた。」</p> <p>「頂点と重心を結んだ線分。」</p>
<p>重心を決定しようとして何を同じとみていたのか？</p>		
<p>」</p>	<p>「(4の意見に対して)頂点と面の重心を結ぶことを三角形において同じとみれるか？」</p> <ul style="list-style-type: none"> •同じとみるよさを顕在化させる。 	<ul style="list-style-type: none"> 1. 1の意見に対して <p>「線分が辺を2等分することと平面が面を2等分すること。」</p> <ul style="list-style-type: none"> 2. 1の意見に対して <p>「線分が面積を2等分することと平面が体積を2等分すること。」</p> <p>「頂点と辺の重心を結んでいる。」</p>

5 分	<p>4. まとめ</p> <p>「四面体の重心の決め方はそれぞれの頂点と重心を結ぶ線の交点になりそうだ。」</p> <p>「類推するときは何が同じかを明確にすることが大切である。」</p> <p>「次の時間に本当に1点で交わるか証明しよう。」</p> <p>・学習感想を書かせる</p>	<p>学習感想</p> <p>「新しいことを考えるとき何が同じかをはっきりさせるのが大事だと思った。」</p> <p>「四面体の重心と三角形の重心が同じような関係にあって面白かった。」</p>
--------	--	--

引用・参考文献

島田茂(1990)『教職数学シリーズ 実践編 10 教師のための問題集』 共立出版