

「90°システム広告」をつくろう！－基礎編－

1. 指導対象 中学1年生，中学3年生
2. 指導時間 2時間
3. 数学内容 投影図，相似な図形の性質，三平方の定理
4. 指導にあたって

「90°システム広告」とは，サッカースタジアムのゴール脇等のフィールド上に敷かれている広告である。「90°システム広告」は，スタジアムのある特定の位置にあるメインカメラから映すと，目の錯覚によって垂直に立って見えるが（※次ページ図1左参照），他の位置のカメラから映すと立体に見えない（※次ページ図1右参照）。以下，メインカメラから映した垂直に立って見える広告を「仮想広告」と呼ぶ。このような仕組みは，中心投影法によって説明することができる。つまり，「仮想広告」をメインカメラから射影し，平面（フィールドに相当する）で切断することによって，「90°システム広告」が得られる。

「90°システム広告」の作成方法には，中学校第1学年で学習する投影図を用いる方法，中学校第3学年で学習する三平方の定理や相似な図形の性質を用いる方法，高等学校で学習するベクトルを用いる方法がある。ベクトルを用いる方法については，『「90°システム広告」をつくろう！－応用編－』で取り上げる。

「90°システム広告」をつくろう！－基礎編－（１）

サッカースタジアムのゴール脇等には、スタジアムのある特定の位置にあるメインカメラから映すと、垂直に立って見える広告が敷かれていることがあります。その広告を「90°システム広告」と言います。また、メインカメラから映した垂直に立って見える広告を「仮想広告」と呼びます。

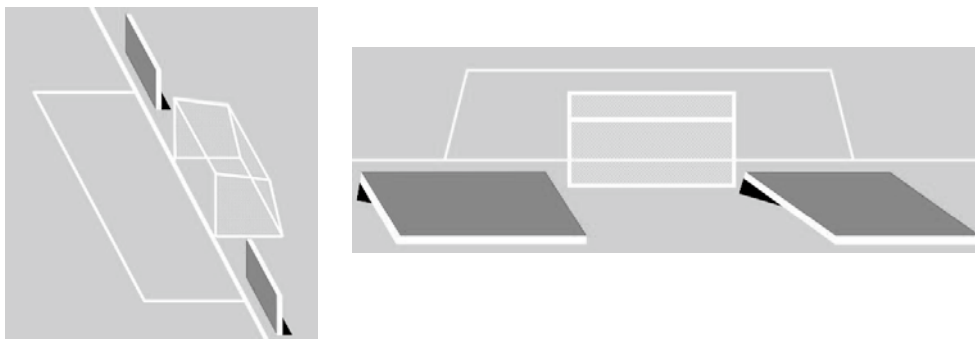
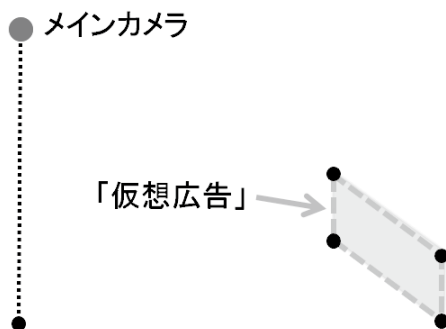


図 1

- ①（条件整理）「90°システム広告」上のある点は、それに対応する「仮想広告」上の点とメインカメラの位置を結ぶ直線とフィールドの交点と一致する。

下の図は、メインカメラの位置と、メインカメラの位置からフィールドへ引いた垂線の足、長方形として見える「仮想広告」を表したものである。「仮想広告」として見える長方形の右上の頂点と左上の頂点に対応する「90°システム広告」上の点を作図してみよう。



「90°システム広告」をつくろう！－基礎編－（2）

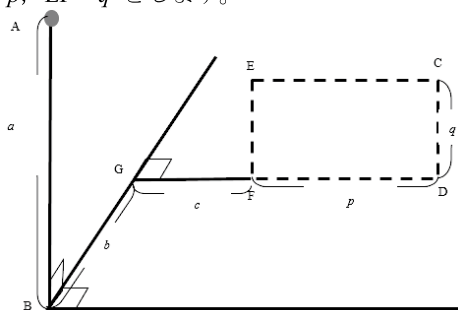
2 (解決) 問題Aを解いてみよう。

問題A 以下の【条件】のとき、(1) ～ (4) の値を求めてみよう。

【条件】

メインカメラの位置を点Aとし、点Aからフィールドへの垂線の足を点Bとします。「仮想広告」として見える長方形の右上の頂点、右下の頂点、左上の頂点、左下の頂点をそれぞれ点C, D, E, Fとします。点Bから直線FDへの垂線の足を点Gとします。直線AC, AEとフィールドの交点をそれぞれ点H, Iとします。このとき、 $AB=a$, $BG=b$, $GF=c$, $FD=p$, $EF=q$ とします。

- (1) 線分BD, BF
- (2) 線分DH, FI
- (3) 線分HI
- (4) 四角形FDHIにおいて,
FDに対する高さ



「90°システム広告」をつくろう！－基礎編－（3）

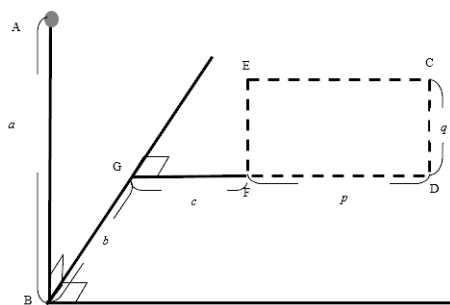
3（解決）問題Bを解いてみよう。

問題B 以下の【条件】のとき、四面体ABHIの投影図を作図してみよう。

【条件】

メインカメラの位置を点Aとし、点Aからフィールドへの垂線の足を点Bとします。

「仮想広告」として見える長方形の右上の頂点、右下の頂点、左上の頂点、左下の頂点をそれぞれ点C, D, E, Fとします。点Bから直線FDへの垂線の足を点Gとします。直線AC, AEとフィールドの交点をそれぞれ点H, Iとします。このとき、 $AB = a$, $BG = b$, $GF = c$, $FD = p$, $EF = q$ とします。



4（ふり回り）問題A, 問題Bのいずれかを解くことによって、「90°システム広告」（四角形FDHI）を作図することができました。実際に「90°システム広告」を作成する際には、どちらの方法で作成しますか。また、それはなぜですか。

（感想）

「90°システム広告」をつくろう！—基礎編—（1）

サッカースタジアムのゴール脇等には、スタジアムのある特定の位置にあるメインカメラから映すと、垂直に立って見える広告が敷かれていることがあります。その広告を「90°システム広告」と言います。また、メインカメラから映した垂直に立って見える広告を「仮想広告」と呼びます。

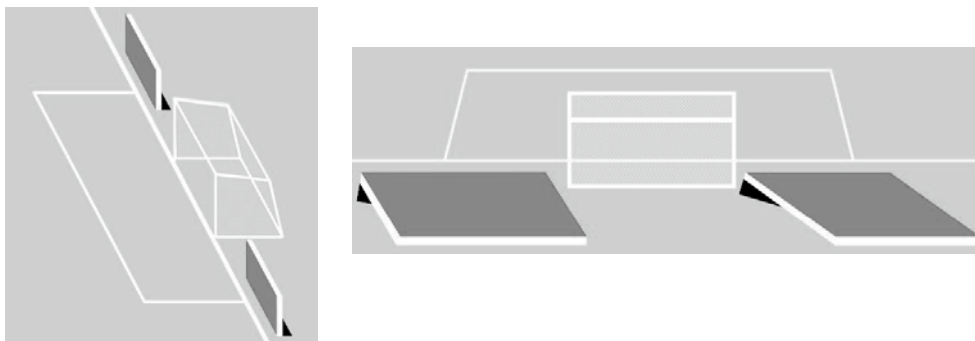
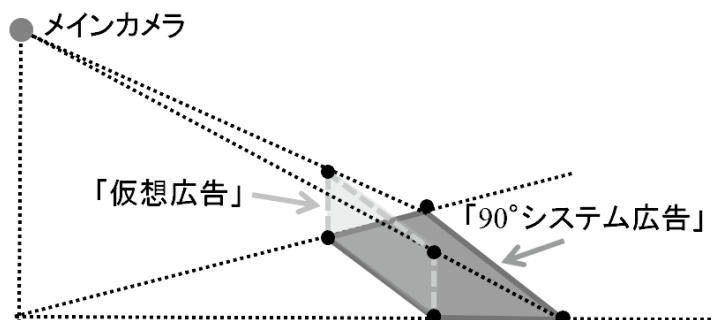


図 1

- ①（条件整理）「90°システム広告」上のある点は、それに対応する「仮想広告」上の点とメインカメラの位置を結ぶ直線とフィールドの交点と一致します。

下の図は、メインカメラの位置と、メインカメラの位置からフィールドへ引いた垂線の足、長方形として見える「仮想広告」を表したものである。「仮想広告」として見える長方形の右上の頂点と左上の頂点に対応する「90°システム広告」上の点を作図してみよう。

<解>



「90°システム広告」をつくろう！－基礎編－（２）

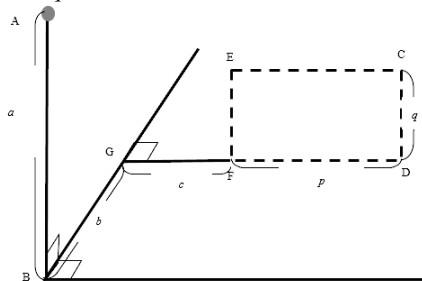
2 (解決) 問題Aを解いてみよう。

問題A 以下の【条件】のとき、(1)～(4)の値を求めてみよう。

【条件】

メインカメラの位置を点Aとし、点Aからフィールドへの垂線の足を点Bとします。「仮想広告」として見える長方形の右上の頂点、右下の頂点、左上の頂点、左下の頂点をそれぞれ点C, D, E, Fとします。点Bから直線FDへの垂線の足を点Gとします。直線AC, AEとフィールドの交点をそれぞれ点H, Iとします。このとき、 $AB=a$, $BG=b$, $GF=c$, $FD=p$, $EF=q$ とします。

- (1) 線分BD, BF
- (2) 線分DH, FI
- (3) 線分HI
- (4) 四角形FDHIにおいて、
FDに対する高さ



<解>

- (1) $\triangle DBG$ に着目すると、三平方の定理より

$$BD = \sqrt{b^2 + (c+p)^2}$$

同様に、 $\triangle FBG$ に着目すると、

三平方の定理より、 $BF = \sqrt{b^2 + c^2}$

- (2) $\triangle ABH$ に着目すると、 $AB \parallel CD$ より

$$\triangle ABH \sim \triangle CDH$$

よって、相似比 $a:q$ より $DH = \frac{q\sqrt{b^2 + (c+p)^2}}{a-q}$

同様に、 $\triangle ABI$ に着目すると、 $\triangle ABI \sim \triangle EFI$ より

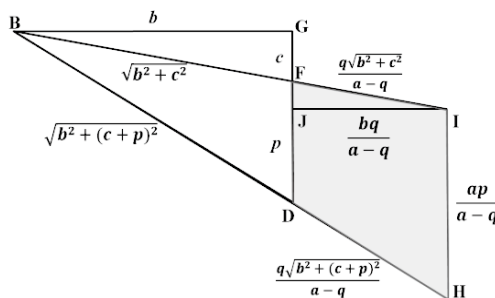
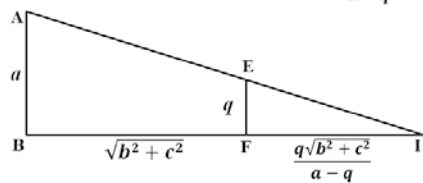
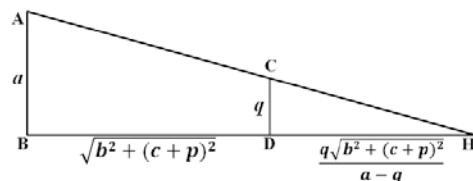
$$FI = \frac{q\sqrt{b^2 + c^2}}{a-q}$$

- (3) $BD:DH = BF:FI = (a-q):a$ より $FD \parallel IH$

よって、 $BD:DH = FD:IH$ より $HI = \frac{ap}{a-q}$

- (4) 点Iから直線FDへの垂線の足を点Jとすると、

$\triangle BGF \sim \triangle IJF$ となり $IJ = \frac{bq}{a-q}$



「90°システム広告」をつくろう！－基礎編－（3）

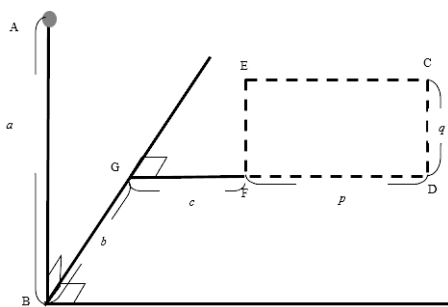
3 (解決) 問題Bを解いてみよう。

問題B 以下の【条件】のとき，四面体 ABHI の投影図を作図してみよう。

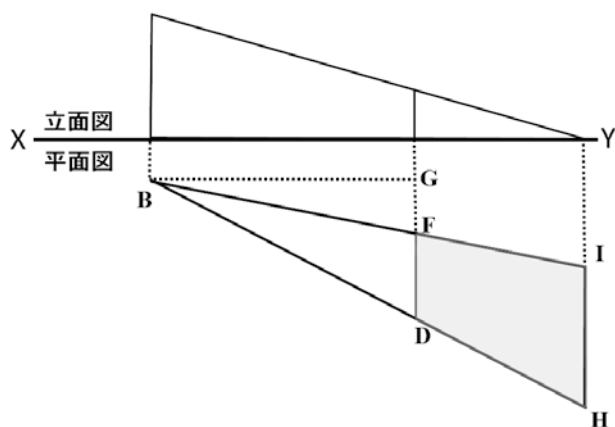
〔条件〕

メインカメラの位置を点 A とし、点 A からフィールドへの垂線の足を点 B とします。

「仮想広告」として見える長方形の右上の頂点，右下の頂点，左上の頂点，左下の頂点をそれぞれ点 C, D, E, F とします。点 B から直線 FD への垂線の足を点 G とします。直線 AC, AE とフィールドの交点をそれぞれ点 H, I とします。このとき， $AB=a$ ， $BG=b$ ， $GF=c$ ， $FD=p$ ， $EF=q$ とします。



<解>



④ (ふり返し) 問題A, 問題Bのいずれかを解くことによって, 「90°システム広告」(四角形FDHI)を作図することができました。実際に「90°システム広告」を作成する際には, どちらの方法で作成しますか。また, それはなぜですか。

<解>

投影図を用いて作成します。

なぜならば、辺の長さ等を計算せずに作成できるからです。

(感想)

参考資料

中学校段階において本教材を扱う際には、次のような活動も想定できる。生徒は、まず、クリアファイルで作ったイングランド王国の国旗をメインカメラに映しながら（図 i）、イングランド王国の国旗の「90°システム広告」を作成する。次に、イングランド王国の国旗の「90°システム広告」の外枠が台形になること、縦赤ラインについては比が保存されること、横赤ラインについては比が保存されないことを確認する。そして、中学校第 1 学年で学習する単元「空間図形」で取り扱うならば投影図を用いて、中学校第 3 学年で学習する単元「三平方の定理」で取り扱うならば投影図に加えて三平方の定理と相似な図形の性質を用いて、外枠が台形になること等を説明する。

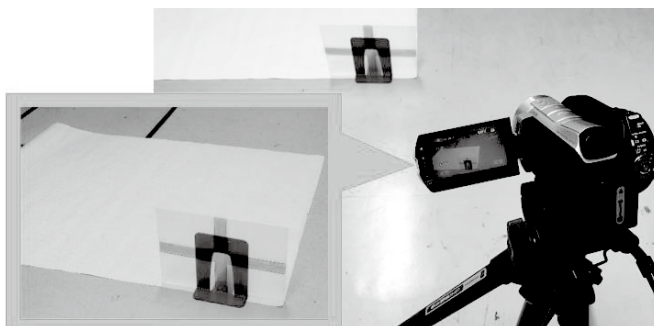


図 i 「仮想広告」として見えるイングランド王国の国旗を
メインカメラから映している様子

参考・引用文献

三島直人 (2015) 「『90°システム広告』の数学的モデルに着目した変換指導に関する一考察」

『日本教育実践学会第 18 回研究大会発表論文集』 pp.29-30

三島直人・松寄昭雄 (2015) 「『90°システム広告』の作図方法に着目した数学教材—中等教育段階における課題学習教材の一例として—」『日本数学教育学会誌』第 97 巻第 9 号, pp.13-21.

