

パトロールのルートを決めよう

1. 指導対象 高校1年生
2. 指導時間 3時間
3. 数学内容 離散グラフ（オイラーグラフ）

4. 指導にあたって

文化財の盗難が多発しているため、自転車を使ってパトロールをするルートを決めるという問題場面を取り上げる。本授業では、以下の学習活動を想定している。

① 問題場面から仮定を設定し、効率よくパトロールするルートの条件を作成する活動

条件整理において、生徒は問題場面から、「効率よく」という言葉の意味を解釈する。「同じ道を一度しか通らない」や「指定された道以外通らない」等の条件を設定する。

② 実際の地図から、略図を設定する活動【問題A】

問題Aでは、実際の地図に記載されている様々な要素の中から、必要な要素を特定し、必要ない要素を捨象した略図を作成する。道の長さや曲がり方は、条件をもとにしたルートの作成に影響を与えない。よって、道を辺、交差点を点とする離散グラフを作成することができる。一方、文化財の盗難防止という問題場面より、略図に神社仏閣の地図記号を書き加えることが想定される。このとき、問題の解決に必要な要素として、どの地図記号が必要となるか特定する。

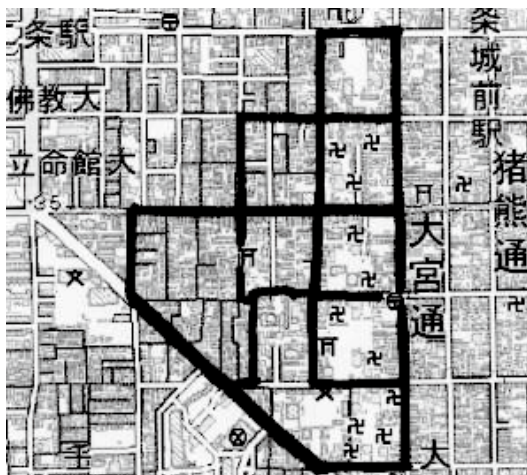
③ 略図をもとに作成した離散グラフから、オイラー回路を見いだす活動【問題B】

まず、問題Bで作成した略図を離散グラフと捉え、その次数に着目する。次に、オイラーの定理よりこの離散グラフがオイラーグラフではなく、オイラー回路を見いだせないことを導く。授業者は、問題Aで設定された条件を修正する場面を提示する。そして、生徒は条件を修正し、再度、離散グラフを作成する。その離散グラフの中には、次数がすべて偶点となるものが存在する。このように、オイラーグラフからオイラー回路を見いだすことができる。

パトロールのルートを決めよう (1)

問題 近年、神社やお寺の文化財を狙った盗難事件が増加しています。あなたは、京都府中京警察署の地域防犯係の警官として、防犯パトロールをすることになりました。人件費の削減のため、効率よく、指示された道をパトロールしなければいけません。どのようにルートを決めればよいでしょうか。

パトロールしなければならないルート（太線表示）



- 1 (条件整理) 必要な仮定を設定し、効率よくルートを決めるための条件を挙げてみよう。

パトロールのルートを決めよう (2)

2 (解決) 次のように仮定をおいた問題Aを解いてみよう。

問題A けんたさんは、次のような仮定をおいて考えています。

けんたさんの仮定

- ① 自転車に乗って1人でパトロールする
- ② 中京警察署から出発し、戻ってくる
- ③ 決められた道を一回だけ通る
- ④ 決められた道だけをすべて通る

実際の地図をもとに、必要な情報を取り出して、略図をつくってみよう。

3 (ふり返し) 略図をつくるときに気を付けた点や、つくった略図を見て気付いた点をふり返ってみよう。

パトロールのルートを決めよう (3)

4 (解決) 問題Aをもとに, 問題Bを解いてみよう。

問題B 問題Aでつくったグラフをもとに, オイラー回路を見つけてみよう。
オイラー回路を見つけることができなかった場合, 新たにオイラーグラフをつくってみよう。

5 (ふり返し) オイラーグラフをつくるときに気を付けた点や, つくったオイラーグラフを見て気付いた点をふり返ってみよう。

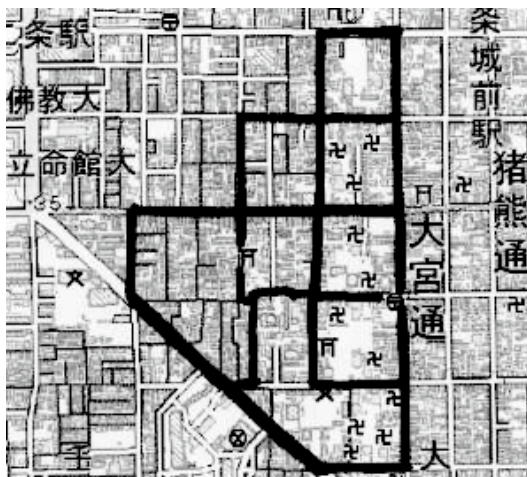
(感想)

() 組 () 番 名前 ()

パトロールのルートを決めよう (1)

問題 近年、神社やお寺の文化財を狙った盗難事件が増加しています。あなたは、京都府中京警察署の地域防犯係の警官として、防犯パトロールをすることになりました。人件費の削減のため、効率よく、指示された道をパトロールしなければいけません。どのようにルートを決めればよいでしょうか。

パトロールしなければならないルート（太線表示）



1 (条件整理) 必要な仮定を設定し、効率よくルートを決めるための条件を挙げてみよう。

<解>

以下のように、効率よくルートを決めるための条件を挙げることができる。

- ① 同じ道を一度しか通らない。
- ② 神社仏閣の文化財の盗難防犯のパトロールなので、神社仏閣が多い道を多く通る。
- ③ パトロールする人数は少ないほうが人件費がかからないので、一人でパトロールすることにする。
- ④ 指定された道は通らなければいけないので、すべての道を通るようにする。

パトロールのルートを決めよう (2)

2 (解決) 次のように仮定をおいた問題Aを解いてみよう。

問題A けんたさんは、次のような仮定をおいて考えています。

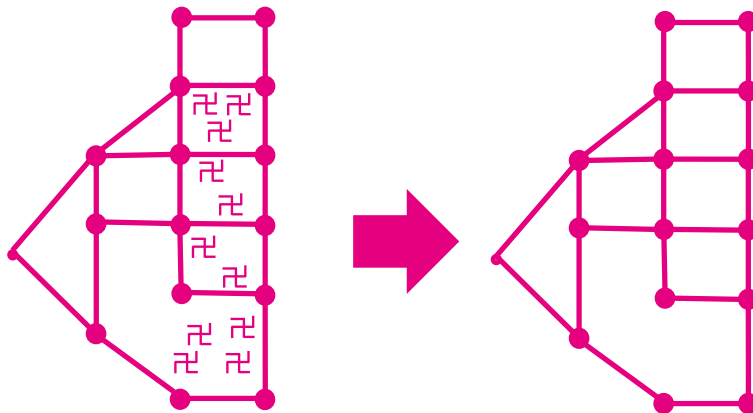
けんたさんの仮定

- ① 自転車に乗って1人でパトロールする
- ② 中京警察署から出発し、戻ってくる
- ③ 決められた道を一回だけ通る
- ④ 決められた道だけをすべて通る

実際の地図をもとに、必要な情報を取り出して、略図をつくってみよう。

<解>

左下の図のように作成した略図では、お寺の位置を書き入れている。この略図において、条件に合うルートをつくる時、お寺の位置は影響を与えない。よって、右下の図のようにしてもよい。



3 (ふり返り) 略図をつくるときに気を付けた点や、つくった略図を見て気付いた点をふり返ってみよう。

<解>

○略図をつくるときに気を付けた点

- ・実際の地図とは違い、道の幅や距離は正確にかいていない
- ・条件に合うルートを作成するとき、お寺の位置をかいていない

○つくった略図を見て気付いた点

- ・道と交差点の関係だけを取り出している
- ・道を辺、交差点を点とする離散グラフとなっている

パトロールのルートを決めよう (3)

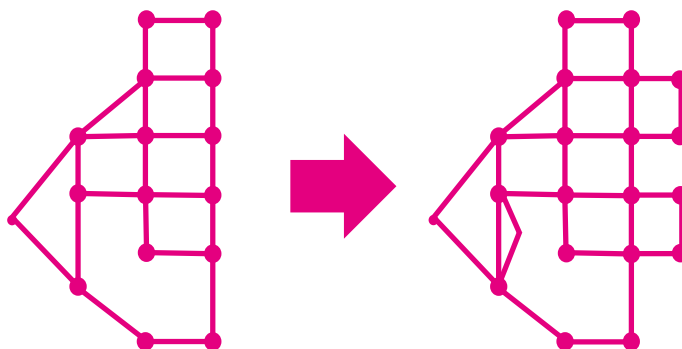
4 (解決) 問題Aをもとに、問題Bを解いてみよう。

問題B 問題Aでつくったグラフをもとに、オイラー回路を見つけてみよう。
 オイラー回路を見つけないことができなかった場合、新たにオイラーグラフをつくってみよう。

<解>

左の離散グラフは、奇点が4つあるため、オイラーの定理より、オイラーグラフではない。

よって、下の図のように辺を追加し、オイラーグラフをつくることができる。



5 (ふり返し) オイラーグラフをつくるときに気を付けた点や、つくったオイラーグラフを見て気付いた点を振り返ってみよう。

<解>

○オイラーグラフをつくるときに気を付けた点
 奇点があると、オイラーグラフではないため、
 奇点ができないように、辺を加える。

○つくったオイラーグラフを見て気付いた点
 実際の地図に照らしあわせると、
 加えた辺は次の2つに大別できる。

- ① 決められた道以外を通る
- ② 同じ道を2回通る

(感想)

参考資料

本授業では、頂点と、頂点間を結ぶ辺で構成される離散グラフを用いる（図 i）。

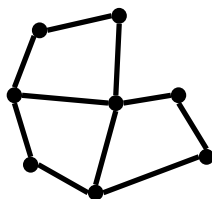


図 i 離散グラフ

ある頂点に結ばれている辺の本数を、次数という。2 頂点間を結ぶ 2 本以上の辺や両端点が一致している辺を考えると、前者を多重辺、後者をループと呼ぶ。これら 2 つを許したグラフを多重グラフと呼ぶ。

離散グラフにおいて、任意の 2 頂点が結ばれているとき、連結であるという。すべての辺をちょうど 1 回ずつ通る道筋をオイラー回路と呼び、そのような離散グラフをオイラーグラフと呼ぶ。離散グラフがオイラー回路をもつための必要十分条件は、離散グラフが連結であり、かつすべての頂点の次数が偶数となることである。これをオイラーの定理と呼ぶ。

離散グラフがオイラー回路をもたないとき、オイラーの定理より、次数が奇数である点が存在する。このとき、次数が奇数どうしである 2 点を結ぶ多重辺をつくることにより、すべての点の次数が偶数である多重グラフをつくる。このグラフは、オイラーの定理よりオイラーグラフであり、オイラー回路をもつ。このような数学的処理をオイラーグラフ化と呼ぶ（図 ii）。

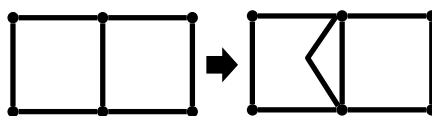


図 ii オイラーグラフ化

引用・参考文献

Ueda, R. (2017, July). A consideration on a mathematics lesson on graph theory: Focusing on Euler graph and Euler circuit. *International Conferences on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications*, Cape town, South Africa: SANLAM Training Centre Corporate Office.

上田凜太郎（2017）「離散数学の数学的モデル化教材の一考察－オイラーグラフに焦点をあてて－」『第 50 回秋期研究大会発表収録』日本数学教育学会 pp.151-154

() 組 () 番 名前 ()
