

指導ガイド

「90°システム広告」をつくろう！－応用編－

1. 指導対象 高校生（空間におけるベクトル学習後）

2. 指導時間 3 時間

3. 数学内容 ベクトル，変換

4. 指導にあたって

基礎編では、「90°システム広告」の作成方法として，中学校第 1 学年で学習する投影図を用いる方法，中学校第 3 学年で学習する三平方の定理や相似な図形の性質を用いる方法を取り上げた。応用編では，高等学校で学習するベクトルを用いる方法を取り上げる。

応用編では，実際にイングランド王国の国旗が「仮想広告」として見える「90°システム広告」を作成する活動を想定している。作成した「90°システム広告」をメインカメラから映し，「仮想広告」としてイングランド王国の国旗が見えるかどうかを確かめる。「仮想広告」としてイングランド王国の国旗が見えない場合，作成した「90°システム広告」を修正する。このような活動を通して，「90°システム広告」と「仮想広告」の関係について把握する。

「仮想広告」を「90°システム広告」へ変換したとき，幅については比が保存されるのに対して，高さについては比が保存されない（図 i）。

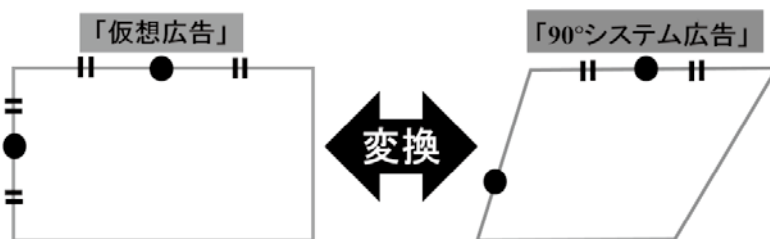


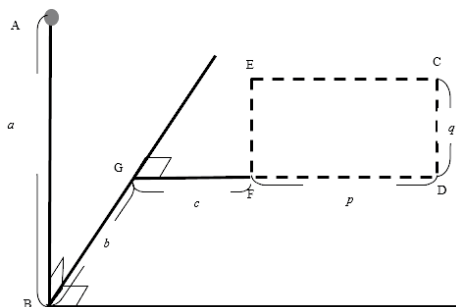
図 1 「仮想広告」と「90°システム広告」の変換のイメージ図

「90°システム広告」をつくろう！－応用編－（１）

『「90°システム広告」をつくろう！－基礎編－』では、三平方の定理と相似な図形の性質を用いる方法や投影図を用いる方法で、次のような「条件」のときの「90°システム広告」を作図しました。

「条件」

メインカメラの位置を点 A とし、点 A からフィールドへの垂線の足を点 B とします。「仮想広告」として見える長方形の右上の頂点、右下の頂点、左上の頂点、左下の頂点をそれぞれ点 C, D, E, F とします。点 B から直線 FD への垂線の足を点 G とします。直線 AC, AE とフィールドの交点をそれぞれ点 H, I とします。このとき、 $AB = a$, $BG = b$, $GF = c$, $FD = p$, $EF = q$ とします。



応用編では、「仮想広告」上の任意の点に対応する「90°システム広告」上の点の座標を求めることによって、「90°システム広告」を作図してみよう。

- 1 (条件整理) 点 F を原点、点 D を通るように x 軸、点 E を通るように z 軸、 x 軸と z 軸に直交するように y 軸を定め、3次元の直交座標系をとります。このとき、点 A, B, C, D, E, F, G の座標を求めよう。

「90°システム広告」をつくろう！－応用編－（2）

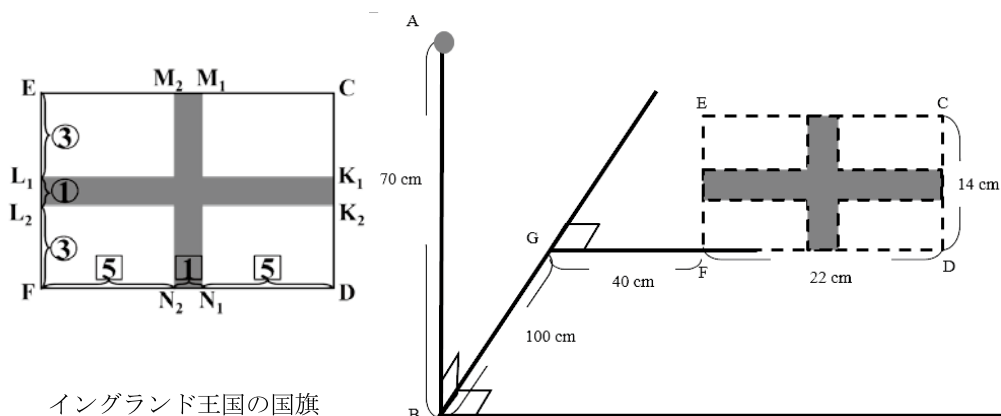
②（解決）問題Aを解いてみよう。

問題A 「仮想広告」上の任意の点を $S(s_x, 0, s_z)$ とし、直線 AS とフィールドとの交点を $T(t_x, t_y, 0)$ とします。このとき、 t_x, t_y を s_x, s_z を用いて表してみよう。また、点 H, I の座標を求めよう。

「90°システム広告」をつくろう！－応用編－（3）

3 (解決) 実際に「90°システム広告」を作成してみよう。

問題B 「条件」のとき、「仮想広告」として見えるイングランド王国の国旗の「90°システム広告」を作成してみよう。ただし、 $a = 70 \text{ cm}$, $b = 100 \text{ cm}$, $c = 40 \text{ cm}$, $p = 22 \text{ cm}$, $q = 14 \text{ cm}$ とします。



4 (ふり返り) 「90°システム広告」の作成を通して、「90°システム広告」と「仮想広告」の関係について分かったことや気づいたことを挙げてみよう。

(感想)

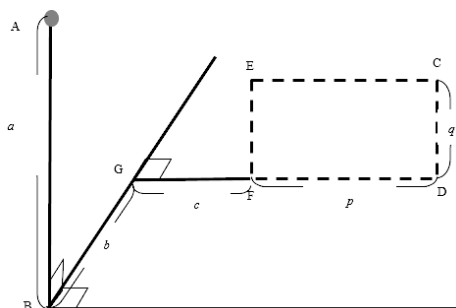
() 組 () 番 名前 ()

「90°システム広告」をつくろう！－応用編－（１）

『「90°システム広告」をつくろう！－基礎編－』では、三平方の定理と相似な図形の性質を用いる方法や投影図を用いる方法で、次のような「条件」のときの「90°システム広告」を作図しました。

「条件」

メインカメラの位置を点 A とし、点 A からフィールドへの垂線の足を点 B とします。「仮想広告」として見える長方形の右上の頂点、右下の頂点、左上の頂点、左下の頂点をそれぞれ点 C, D, E, F とします。点 B から直線 FD への垂線の足を点 G とします。直線 AC, AE とフィールドの交点をそれぞれ点 H, I とします。このとき、 $AB = a$, $BG = b$, $GF = c$, $FD = p$, $EF = q$ とします。



応用編では、「仮想広告」上の任意の点に対応する「90°システム広告」上の点の座標を求めることによって、「90°システム広告」を作図してみよう。

- 1 (条件整理) 点 F を原点、点 D を通るように x 軸、点 E を通るように z 軸、 x 軸と z 軸に直交するように y 軸を定め、3次元の直交座標系をとります。このとき、点 A, B, C, D, E, F, G の座標を求めよう。

<解>

$$A(-c, -b, a)$$

$$B(-c, -b, 0)$$

$$C(p, 0, q)$$

$$D(p, 0, 0)$$

$$E(0, 0, q)$$

$$F(0, 0, 0)$$

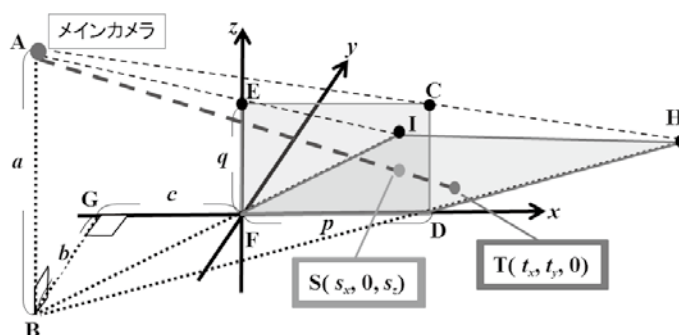
$$G(-c, 0, 0)$$

「90°システム広告」をつくろう！－応用編－（2）

2 (解決) 問題Aを解いてみよう。

問題 A 「仮想広告」上の任意の点を $S(s_x, 0, s_z)$ とし、直線 AS とフィールドとの交点を $T(t_x, t_y, 0)$ とします。このとき、 t_x , t_y を s_x , s_z を用いて表してみよう。また、点 H , I の座標を求めよう。

<解>



AS : AT = 1 : n とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AT} &= n\overrightarrow{AS} \\ \overrightarrow{FT} - \overrightarrow{FA} &= n\overrightarrow{FS} - n\overrightarrow{FA} \\ \overrightarrow{FT} &= n\overrightarrow{FS} + (1-n)\overrightarrow{FA}\end{aligned}$$

これを成分で表すと、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ns_x + (n-1)c \\ (n-1)b \\ ns_z + (1-n)a \end{pmatrix}$$

z 成分に着目すると, $0 = ns_z + (1-n)a$ より, $n = \frac{a}{a-s_z}$ となる。

よって,

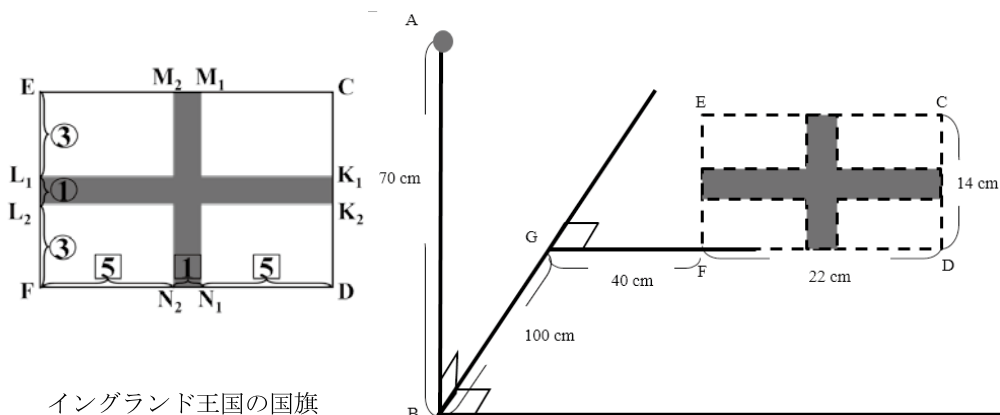
$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{as_x + cs_z}{a - s_z} \\ \frac{bs_z}{a - s_z} \end{pmatrix} \dots\dots\dots \textbf{(i)}$$

$$(i) \quad \mathcal{Y}, \quad H\left(\frac{ap+cq}{a-a}, \frac{bq}{a-a}, 0\right), \quad I\left(\frac{cq}{a-a}, \frac{bq}{a-a}, 0\right)$$

「90°システム広告」をつくろう！－応用編－（3）

3 (解決) 実際に「90°システム広告」を作成してみよう。

問題B 「条件」のとき、「仮想広告」として見えるイングランド王国の国旗の「90°システム広告」を作成してみよう。ただし、 $a = 70 \text{ cm}$, $b = 100 \text{ cm}$, $c = 40 \text{ cm}$, $p = 22 \text{ cm}$, $q = 14 \text{ cm}$ とします。



<解>

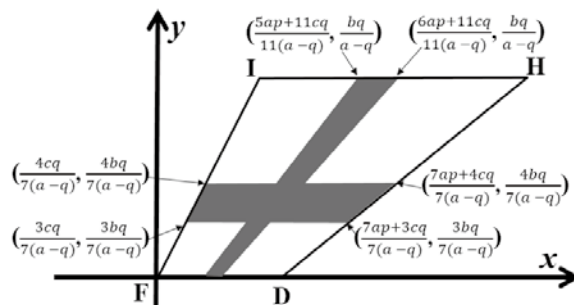
点 K_1 , K_2 , L_1 , L_2 , M_1 , M_2 を座標で表すと

$$K_1(p, 0, \frac{4}{7}q), K_2(p, 0, \frac{3}{7}q), L_1(0, 0, \frac{4}{7}q),$$

$$L_2(0, 0, \frac{3}{7}q), M_1(\frac{6}{11}p, 0, q), M_2(\frac{5}{11}p, 0, q)$$

となる。

よって、(i) の式から、上記の点に対応する「90°システム広告」上の点の座標を求めると、右の図のようになる。



4 (ふり返し) 「90°システム広告」の作成を通して、「90°システム広告」と「仮想広告」の関係について分かったことや気づいたことを挙げてみよう。

<解>

幅については比が保存されるのに対して、高さについては比が保存されない

(感想)

参考資料

基礎編で取り上げた、三平方の定理と相似な図形の性質を用いる方法や投影図を用いる方法でもイングランド王国の国旗の「90°システム広告」を作成することができる。

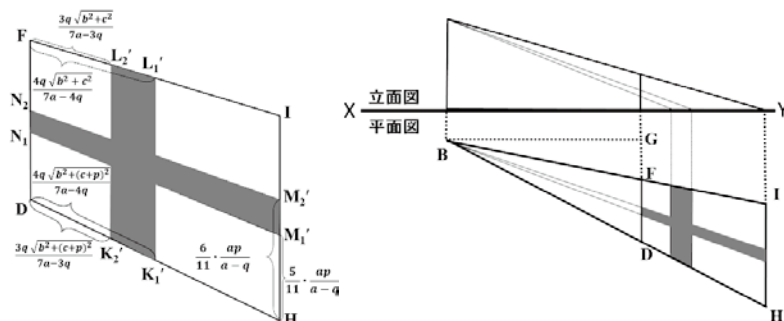


図 i 三平方の定理と相似な図形の性質を用いて作成したイングランド王国の国旗の「90°システム広告」の数学的モデル（左）と投影図を用いて作成したイングランド王国の国旗の「90°システム広告」の数学的モデル（右）

本教材をさらに発展させる場合、次のような問題が想定できる。それは、フィールドと「仮想広告」のなす角が θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) のときの「90°システム広告」を作図する問題や、日本の国旗が「仮想広告」として見える「90°システム広告」を作図する問題である。

図 ii 左の図は、投影図を用いる方法で作図したなす角 θ の「90°システム広告」であり、図 ii 右の図は、ベクトルを用いる方法で作図した日本の国旗である。

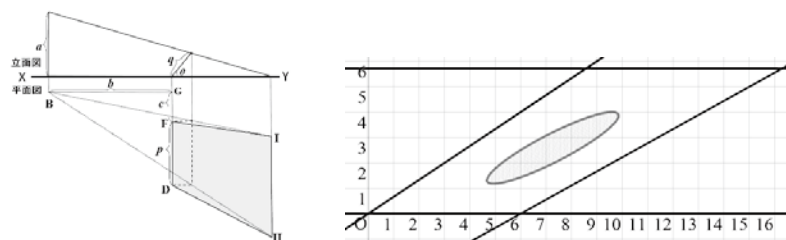


図 ii 投影図を用いて作成することができるなす角 θ の「90°システム広告」の数学的モデル（左）とベクトルを用いて作成することができる日本の国旗の「90°システム広告」の数学的モデル（右）

引用・参考文献

三島直人 (2015) 『90°システム広告』の数学的モデルに着目した変換指導に関する一考察」

『日本教育実践学会第 18 回研究大会発表論文集』日本教育実践学会 pp.29-30

三島直人・松崎昭雄 (2015) 『90°システム広告』の作図方法に着目した数学教材—中等教育段階における課題学習教材の一例として—『日本数学教育学会誌』第 97 巻第 9 号, pp.13-21.

() 組 () 番 名前 ()
