数学的プロセスの質を高める授業

東京学芸大学附属中高数学教育研究会

１．東京学芸大学附属中高数学教育研究会について

本研究会は，東京学芸大学附属小金井中学校，附属竹早中学校，附属世田谷中学校，附属高等学校，附属国際中等教育学校の数学科教員および，東京学芸大学の数学教育関係教員によって構成されており，平成 24 年度に，次の 2 点を大きな目的として発足した．即ち第一に，中等教育段階におけるより良い数学教育を実現するため，第二に中等教育段階における授業研究の在り方を追求し普及させていくためである．第一の目的に対して，附属の教員と大学教員による集団であることを活かし，第二の目的にある授業研究を方法として研究を進めていきたいと考えている．

２．問題意識と研究の目的

本研究会では次の問題意識をもっている．それは，我が国の数学教育では，数学の内容だけでなく数学のプロセスやそのプロセスで発揮される考え方や能力の育成が重視されてきたにも関わらず，結局のところ，数学の内容を教えることに偏重してしまっていないかということである．当然，数学の内容を教えることを軽視しているわけではないし，内容を教えることとプロセスを教えることを全く別々にとらえているわけでもない．しかし，「数学的な見方や考え方」や「数学的活動」が長い間重視されてきた我が国の数学科授業の実態は，果たしてそれらを重視したものになっているのだろうか.

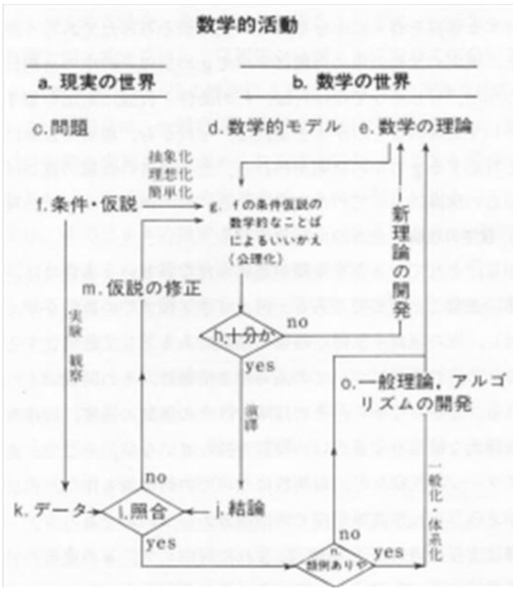


図 1　「数学的活動」の模式図
(島田，1977，p.15)

数学のプロセスを重視するとは，数学を使い，創るプロセスを重視するということである．それは活動としては「数学的活動」であるととらえられるし，そのプロセスにおいて発揮される見方・考え方が「数学的な見方・考え方」であるととらえられる．以下，本研究会では，数学を使い，創るプロセスを総称して「数学的プロセス」と呼ぶこととする．これまでの数学教育研究において，「数学的プロセス」を図式にしたり（例えば島田，1977，**図 1**），「数学的プロセス」において発揮される能力を構造化したりする研究（例えば長崎ほか，2008）が国内外でされてきている．

このような「数学的プロセス」を重視した授業とはどのようなものであるのだろうか．そこでどのようにして数学的な見方・考え方や能力を育成していけばよいのだろうか．つまりは,「数学的プロセス」の質を高める学習指導とはどのようであるべきなのだろうか．さらには,「数学的プロセス」の質を評価するにはどうすればよいのか．どうすれば質が高まったと判断できるのか.「数学的プロセス」を視

点として授業を構想するとき，このようなことがすぐに問題となってくる．

そこで，本研究会では，「数学的プロセス」の質を高める授業とはどのようであるべきかを追究していくことを研究目的として，研究主題を「数学的プロセスの質を高める授業」に設定した次第である．

３．研究方法

本研究会では次のように研究を進めていく．即ち，具体的な授業において「数学的プロセス」と考えられるプロセスに特化して，その質を高めるための学習指導として何を行ったか，質が高まったかどうかの評価をどのように行い実際どうであったかという事例を集めていきながら，「数学的プロセス」とは何で，その質を高める授業とはどのようであるべきかを考察していく帰納的なアプローチである．そしてこのアプローチで研究を進めるための方法として授業研究が適している．

実際，本研究会では，上記の問題意識および研究の進め方に基づいて，具体的な授業について学習指導案の検討を重ねてきた．当該授業において焦点化した具体的な「数学的プロセス」は何で，その質を高めるための手立てとして何を用意したかということについてはそれぞれ後に説明される．ここでは，本日行われる研究授業および研究協議会に向けて，具体的な「数学的プロセス」およびその質を高めるための手立てを記述する際の基本的な考え方を示しておく．

“「数学的プロセス」の質を高める”ことを目的とする授業を，**図 2** のように単純化してとらえる．即ち，授業の最初の時点で生徒が遂行できると考えられる「数学的プロセス」があり（P_S），その質を高めるための授業者の手立てがあり，その結果として，授業の最初の時点よりも質が高まったとされる「数学的プロセス」を遂行する生徒たちの姿（P_G）があるということである．後者の姿は授業の目標とする姿である．

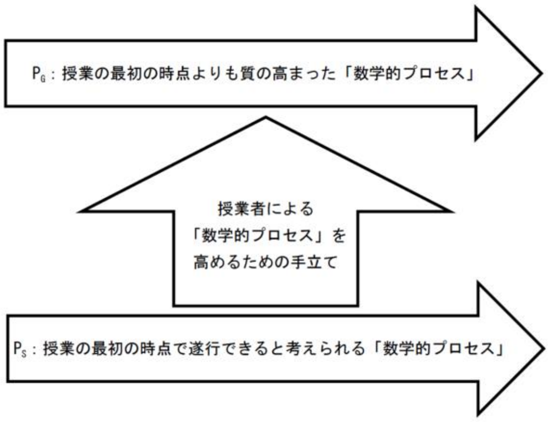


図 2　「数学的プロセス」の質を高める授業の構造

以下に続く公開授業の説明においては，この図式に従って具体的な「数学的プロセス」およびその質を高めるための手立てが示される．研究協議会においては，研究授業の意図および実際を踏まえて，「数学的プロセス」およびその質を高めるための手立てについて議論していきたい．例えば，うまく質が高まらなかったとなれば，意図していた手立てが適切ではなかったのかもしれないし，生徒が遂行できると考えられる「数学的プロセス」の想定（P_S）を誤っていたのかもしれない．その原因は何で，ではどうすればよかったか．逆にうまく質が高まったとすれば，その要因として何が効いていたのか．そういったことを議論し，「数学的プロセス」の質を高める授業とはどのようであるべきか，その一端を明らかにしていきたいと考えている．

引用参考文献

島田茂ほか.(1977).『算数・数学科のオープンエンドアプローチ』.みずうみ書房.

長崎栄三ほか.(2008).算数・数学教育の目標としての「算数・数学の力」の構造化に関する研究.『日本数学教育学会誌』第 90 巻 4 号．pp.11-21.

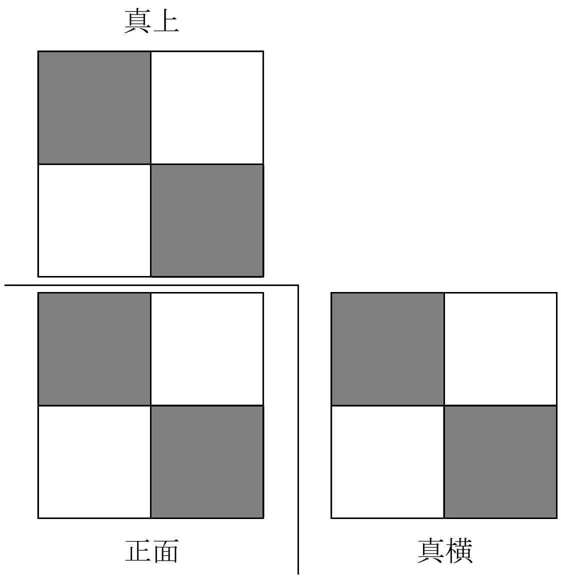
データに基づき判断・分析する授業〜統計〜

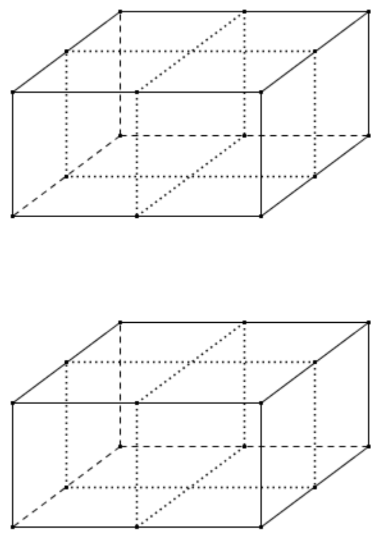
東京学芸大学附属国際中等教育学校　高橋広明

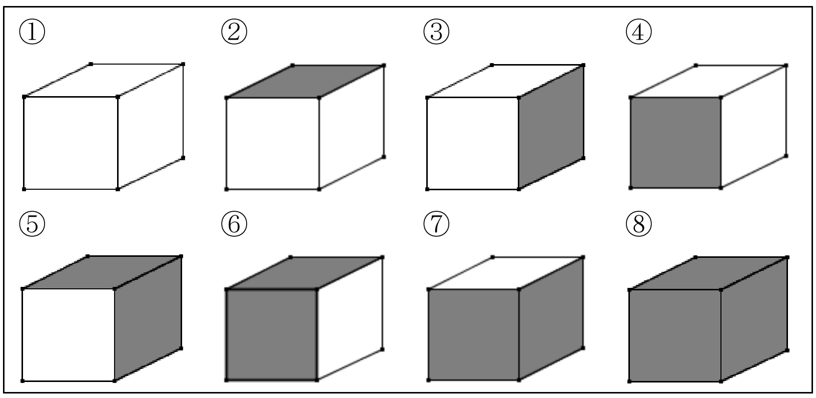
1. 本教材について

本教材の主題は，“立体パズルをつくる”活動である。ここでの立体パズルとは以下のものである。

2×2×2 に区切られた立方体について，指定された模様になるように，与えられた 1×1×1 の立方体のピースを組み合わせる。各ピースは回転できたりはせず，この向きで配置する。また，各ピースの面と面が重なった部分は見えなくなるものとする。また，模様は 3 面ある 2×2 の正方形について黒か白かのいずれかとする。







“立体パズルをつくる”活動とは，このパズルを素材として，パズル集やコンピュータゲームをつくる活動を想定している。パズル集とは市販されているナンプレ（ナンバープレイス）やクロスワードパズルのような冊子のイメージである。コンピュータゲームとはこのパズルを Web 上で行うイメージで，実際に「グローバルマス」というサイトもあり[注1)]，このサイトでは数学的な思考力が求められるゲームが複数提供されている。またこのサイトは，プレーヤーとしてだけでなくクリエーターとしても参加することができ，自ら作成した数学的なゲームを提供することもできるようになっている。いずれの媒体においても，次の 2 つの要素が要求される。

1) 難易度（レベル）を設定する

…パズル冊子などでは難易度を星の数で示したり，言葉で表したりなど，易しい問題から難しい問題へと進むように構成されているのが一般的である。ゲームにおいてもレベルが設けられているものが多い。「グローバルマス」でのゲームもクリエーターにはレベルクリア型のゲームの作成が求められており，易しいものから難しいものへと進むようになっている。

2) すべての解を考える

…パズル冊子では解答を用意する必要があるので，複数の解があるものはすべて提示する必要がある。またゲームで考えて場合は，正解か否かをコンピュータが判断しなければならないので，それを判断できるようにするためには，予めすべての解を与えておき，それにマッチしているかどうかで正否を判断させることができる（これは最も原始的な考え方で正否の判断にはよりよいアルゴリズムがあるかもしれないが，今回はそこまでは求めない)。

1)については人間の感性に関わる内容であるため，人がどのように難易度を感じているかを調査する必要がある。すなわち官能評価，感性評価の対象となる。2)については，それぞれの問題について解が一意に定まるのか否かを判断し，複数の解がある場合にはすべての場合を正しく列挙しなければならない。すなわち数え上げの範疇になる。いずれも数学を活用しなければ解決できない事柄である。ここでは特に 1)について学習を行う。1)の事柄を考察するためには，難易度についてどのように感じているのかを調査し，その調査結果に基づいて傾向を分析することで難易度を順序づけることができよう。すなわち統計を活用する場面である。

2. 本教材のプロセスとしての位置づけ

本教材に関わる一連の活動は，パズル冊子や Web ゲームにするためには，難易度をどのように評価すべきか，という問題から始まり，その問題を解決するためにデータを集め，分析することが必要となる。すなわちこれらの活動は PPDAC のプロセスに自ずと合致してくる。この PPDAC とは次のようなステップを踏むものである。

[1]	Problem (問題)	問題の把握と明確化 分析すべきデータと仮説の予想
[2]	Plan (計画)	研究計画の作成 既存のデータを使うのか，新たに調査するのか 不足している知識の習得
[3]	Data (データ)	データの収集 データの整備 統計表の作成
[4]	Analysis (分析)	グラフの作成 問題点の分析
[5]	Conclusion (結論)	分析結果の解釈（仮説との違い） レポートの作成 発表と討論 新たなアイデア

[1] Problem

このフェーズは前節で述べたとおりである。すなわち，“立体パズルをつくる”という目的意識のもと，難易度を設定することが必要となる。どのような問題を易しいあるいは難しいと感じるのか，それを明らかにしなければならない。

[2] Plan

先の難易度の感じ方についての問題に対して，それを調査するためにどのようなデータを取るかを考える必要がある。どのような調査をどのように行うか，について生徒には考えてもらいたい。しかしこの調査の計画は，本来どのように集計し分析するかまで想定しておかなければならないが，これから中学校で統計を学習しようとする中学 1 年生にそこまで要求することは難しい。そこで今回は調査問題については教師側で考えたものを与えることとした。調査問題については資料 1 を参照されたい。調査は異なるタイプの立体パズルを 3 問解いてもらい，解き終えた段階で難しいと感じた順に問題番号を答える形式となっている。その情報は調査問題を解く前に示している。また，立体パズルの問題に対する“慣れ”により，後半の問題の方が易しく感じられてしまうことも懸念される（このような指摘は実際に生徒からも表出している）。それを解消するために，クラスごと問題の順序を入れ替えた調査問題とした[注2)]。

[3] Data

これは実際に調査問題を作成し，調査を実施するフェーズである。これは前述通り，教師側が用意したものを生徒対象に行った，データを収集した。このフェーズから実際にデータを取り扱うこととなるため，ここから統計の内容が大きく関わってくることとなる。今までの統計領域の学習の中で，順序尺度以外のデータは扱われてきた。例えば，名義尺度については小学校 3 年生で学校内におけるけがの種類と人数などの関係の学習などをしている。小学校 6 年生では鶏が産んだ卵の重さの分布のように比率尺度のデータの考察が行われている。また本校では統計の学習の中で，車内温度の分析やテストの得点についての考察を行っている。これらのデータは間隔尺度である。しかし今回収集したデータは順序尺度であるため，そのようなデータを分析するのは初めてとなる。もちろん順序尺度を名義尺度として集計し，分析することもできるが，順序を持ったデータであるという特徴を踏まえた考察も期待したい。そこで今回は様々な観点から考察しやすいように，収集した学年全体のデータ（データ数 104）を提示するのではなく，約 1 クラス分である 27 のデータを提示することとする（資料 2）参照。なお，このデータはあるクラスのデータをもとに，多様な分析や主張ができるように筆者が作成したデータである。

[4] Analysis

順序尺度では特にデータのまとめ方や分析の仕方によって解釈や難易度の判断が異なってくる（後述参照）。分析の目的は一般的な難易度の傾向を探ることである。そのため，その傾向について合理的な判断をするためにはいろいろな観点からデータを集計し，分析する必要がある。

難易度の傾向について合理的な判断がなされたら，次にその難易度はどこから生じているものなのかを分析する必要がある。3 つの問題にはそれぞれ特徴があるから，感じる難易度に差が生じたはずである。その特徴とは何であるかを分析できれば，その特徴に基づき，同じ難易度の問題や難易度がさらに高い問題，低い問題を作成することが可能となる。“立体パズルをつくる”という大きな目的のために

は必要な分析である。
本授業の主題である「データに基づき判断・分析する授業」とは，特にこの Analysis のフェーズにおいて上記のようにデータに基づき難易度を判断し，その難易度を生じさせている要因を分析することを目指したものである。

[5] Conclusion
最終的には難易度が設定された“立体パズルをつくる”ことが目的である。そのために[4]までのフェーズで難易度とそれを生じさせている要因を判断・分析し，一定の結論は得られる。このフェーズで大切なのが，結論を得て終わりではなく，分析結果を解釈したり新たなアイデアを得たりすることである。今の場合，難易度についての判断・分析が正しいという確証はない。その確証を高めるには，分析結果に基づいて同じ程度の，あるいはより難易度に差が生じるであろう問題を作成し，再び他の集団を対象に調査を行ってみる必要がある。そのためにはどのような問題を用意し，どのように調査するかなどを考える必要が出てくる。すなわち[1]のフェーズに戻ってくる。このように，本活動をとおして，PPDAC のプロセスがサイクルとして存在し得るものであるということを理解されることが期待できる。

3. 本授業で期待したいプロセスの質の高まり

3.1. 現段階でのプロセスの質

PPDAC サイクルは，統計的問題解決のプロセスモデルを示しているといえる。最終的にはこのサイクルとしてのプロセスを生徒自らが意識して，実行できるようになることが望ましい。そのためには，このプロセスの存在を知り，一つ一つのフェーズについて具体的にどのようなことを行うのかをケーススタディとして学んでいくことが必要であろう。それらの経験を通して，統計的な問題解決を行う際にこれらのプロセスを意識し，主体的にそのプロセスを実行できるようになると思われる。これまでの「資料の活用」領域（本校では「データの分析」という単元名である）での学習において，PPDAC サイクルについてはその存在と意義を指導し，探究課題の解決を通して，その学習が PPDAC サイクルのどのフェーズに位置づいているのかを意識させながら授業を行ってきた。その結果，プロセスについての理解は深まりつつある。一方で，扱ってきた課題では統計の考え方（例えば分布を調べる必要性や，層別して集計する考え方など）を重視してきたため，データを分析してからの結果の解釈についてはほぼユニークに定まってしまうケースしか扱えなかった。すなわち，Data→Analysis→Conclusion のプロセスは誰もが同じ結論になるような流れしか扱えていない。これが現段階での生徒のプロセスの質である。

3.2. 本授業でねらう高める質

統計的問題解決において何らかの結論を得ようとするとき，分析結果に基づく結論は合理的であればいろいろな解釈があってもよい。例えば平成 24 年度の全国学力・学習状況調査数学 B の問題 3 では，スキージャンプの原田選手と舟木選手の飛距離のヒストグラムを基に，次の 1 回でより遠くへ飛びそうな選手を判断する問題が出題されている。この問題は，合理的な説明がなされていればどちらの選手を選んでも正答となっている。この時の正答率は 47.1%で，資料の傾向を的確に捉え，判断の理由を数学的な表現を用いて説明することに課題があると分析している（国立教育政策研究所(2012)）。この問題からも示唆される通り，Analysis→Conclusion はユニークであるとは限らない。様々な視点からの分析を通して，合理的な結論を得られるような活動を通して，このプロセスの質は高まることが期待される。

3.3. 質の高まりの判断

上述のとおり，本授業で高めたいのは Analysis→Conclusion のプロセスである。様々な分析の視点の

中から最も合理的と思われる結論を自ら判断できるようになれば，この質は高まったといえよう。ワークシートや発言からその高まりを判断したい。

3.4. 質を高めるための方策

プロセスの質（本授業では Analysis→Conclusion のプロセスの質）を高めるためには結果がユニークに定まらないもの，あるいは様々な視点からの分析が可能な課題が必要である。それがすでに述べたように順序尺度データの分析である。後述のとおり様々な考え方が表出することが期待できる。それらの考え方を共有し，多肢の選択肢の中から最も合理的と思われる結論を導き出してもらいたい。

4. 想定されるデータの解釈と難易度の判断について

授業で提示する資料 2 について，想定されるデータのまとめ方やその解釈および難易度の判断について考える。

(1) データを名義尺度としてとらえ，散らばりの様子を数値から判断する場合

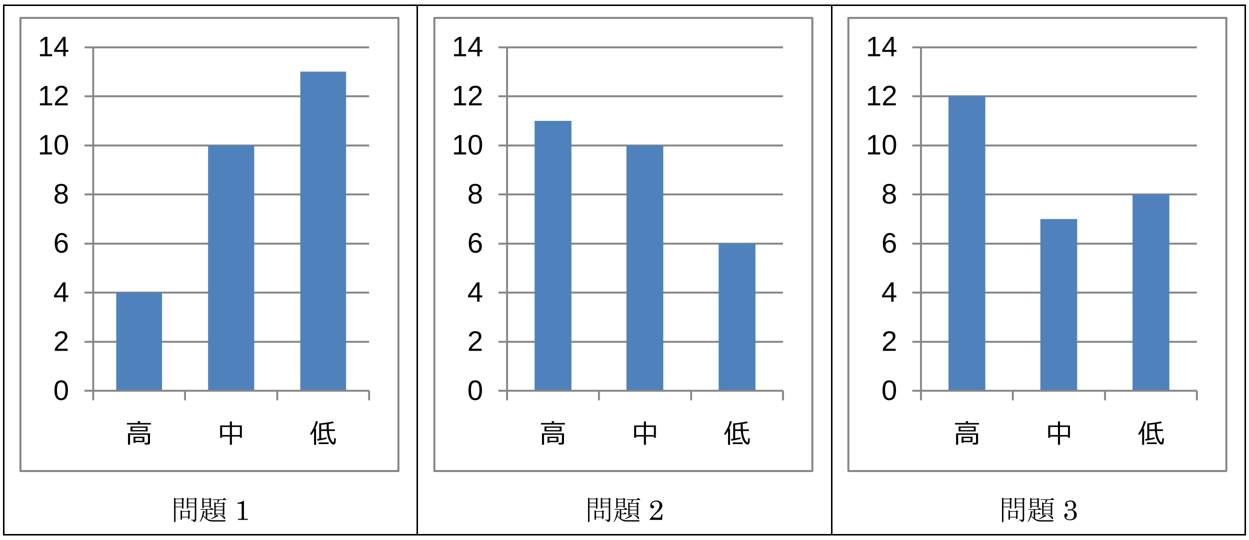
難易度	高(1 位)	中(2 位)	低(3 位)
問題 1	4	10	13
問題 2	11	10	6
問題 3	12	7	8

(a) 難易度ごとにみた場合，「低」は問題 1 が最も多く，「高」は問題 3 が最も多い。したがって，最も難易度が高いのが問題 3 で，次いで問題 2，最もやさしいのが問題 1 である。

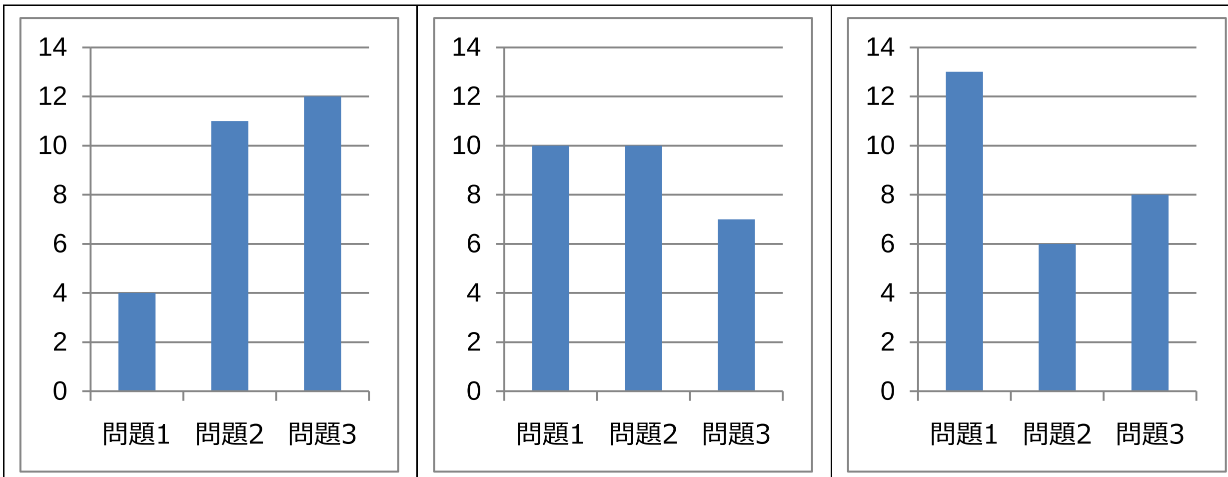
(b) 問題ごとにみた場合，問題 1 は「低」に偏っているので最もやさしい。問題 2 と問題 3 を比較すると，難易度を「中」または「高」と捉えている人数が，問題 2 は 21/27 名であるのに対し問題 3 は 19/27 名であるから問題 3 より問題 2 の方が難しい。

(2) データを名義尺度としてとらえ，散らばりの様子をグラフから判断する場合

(a) 問題ごとのグラフを作成



(b) 難易度ごとのグラフを作成



難易度「高」　難易度「中」　難易度「低」

予想される難易度についての判断は(1)と同じ。

(3) 各問題を難易度による重み付けをして，その値から判断する場合

ex:「高」3 点，「中」2 点，「低」1 点で重み付けをした場合

難易度	高(3 点)	中(2 点)	低(1 点)	得点
問題 1	4	10	13	3×4＋2×10＋1×13＝45
問題 2	11	10	6	3×11＋2×10＋1×6＝59
問題 3	12	7	8	3×12＋2×7＋1×8＝58

となるので，問題 2，問題 3，問題 1 の順に難しい。

(4) 問題ごとの難易度を集計し直し，難易度を順位化して平均値や合計値から判断する場合

資料 2 のデータは難易度順に問題番号が記されているが，これを問題ごとに難易度をどう応えたのかを表すように集計し直す。難易度「高」を 1 位，「中」を 2 位，「低」を 3 位として集計し直すと右のようになる。問題ごとにその平均を求める（総数が等しいので合計値でも比較できる）と以下のようになる。

	問題 1	問題 2	問題 3
平均	2.33	1.82	1.85
合計	63	49	50

数値が小さい方が難易度が高いので，問題 2，問題 3，問題 1 の順に難しい。

問題1	問題2	問題3
3	1	2
2	3	1
2	1	3
1	2	3
1	2	3
2	3	1
2	1	3
3	2	1
3	2	1
3	2	1
3	1	2
3	2	1
2	3	1
3	1	2
1	2	3
3	1	2
3	1	2
3	1	2
2	1	3
2	3	1
1	2	3
2	1	3
3	2	1
3	1	2
2	3	1
2	3	1
3	2	1

(5) 2 つずつの問題の比較を通して難易度を判断する場合

問題 A と問題 B について A の方が B よりも難易度が高いことを A>B で表すこととする。

	順序	度数
①	123	4
②	132	0
③	213	4
④	231	7
⑤	312	6
⑥	321	6

	比較	結果	
(i)	1＞2	①＋②＋⑤	10
	2＞1	③＋④＋⑥	17
(ii)	1＞3	①＋②＋③	8
	3＞1	④＋⑤＋⑥	19
(iii)	2＞3	①＋③＋④	15
	3＞2	②＋⑤＋⑥	12

(i)より，問題 2＞問題 1

(ii)より，問題 3＞問題 1

(iii)より，問題 2＞問題 3

以上より，難易度は，問題 2＞問題 3＞問題 1　の順になる。

(1)や(2)は各回答者が回答する際に提供した順序性が反映されていない。授業でもデータのまとめ方としてはそれぞれの度数を求め, それをまとめた表から考察しようとすることが予想される。しかし順序を考慮しないと合理的な判断は難しい。社会的選択理論においても，多数決（(1)(a)がこれに近い）による決定に疑義を唱えたボルダによってボルダ方式（順序に点数を割り当て得点化する方式 ; (3)がこれにあたる）を提唱し, 一方でコンドルセはペアごとで比較し合い, その全勝者（コンドルセ勝者とも呼ばれる。なおコンドルセ勝者が常に存在するとは限らない。）を選ぶべきであると提起した。今回提示するデータではボルダ勝者（ボルダ方式による勝者）とコンドルセ勝者がともに問題 2 で一致しているが，常にそうなるとは限らない。ペア全勝者（コンドルセ勝者）でもボルダ勝者にならないこともある。例えば右のようなデータの場合(数値は問題番号)，問題 2 はペア全勝者であるが，ボルダ勝者は問題 3 になる。以上の議論は坂井(2013)を参考にした。

高	中	低
2	3	1
2	3	1
2	3	1
3	2	1
3	2	1
3	1	2
3	1	2
1	2	3
1	2	3

なお，今回は 3 つの問題の難易度（3 つの順序）の判断であったが，問題数が増えるともっと多くの解釈が可能となる。以下はパウロスの全員当選モデルと呼ばれているもので，A から E の候補者がいずれも当選する例を示している（パウロス(1997)）。それは難易度についても同様に考えられる。今，問題 A～問題 E の 5 問について 55 名の難易度の評価が以下の通りだったとする。

①	A＞D＞E＞C＞B	18 人
②	B＞E＞D＞C＞A	12 人
③	C＞B＞E＞D＞A	10 人
④	D＞C＞E＞B＞A	9 人
⑤	E＞B＞D＞C＞A	4 人
⑥	E＞C＞D＞B＞A	2 人

(a) 単記投票方式

最も難しかったのはどれか，と尋ねたとき最も多く得票するのは問題 A である。

(b) 上位二者決選投票方式

難易度1位を得票した上位2つ（A,18票とB,12票）で決選投票すると，A＞B（①）18に対してB＞A（②＋③＋④＋⑤＋⑥）37であるので，最も難しいのは問題Bである。

(c) 勝ち抜き決戦方式

1位票の獲得数が小さいものを除外していく。初めに問題Eが除外される。すると4票がBに，2票がCに移行するので，次の段階では問題Dが除外される。すると9票がCに移行するので，さらに次の段階では問題Bが除外される。すると12票がさらにCに移行するので，最終的に問題Cが最も難しいと判断される。

(d) 順位表店方式

1位5点，2位4点，3位3点，4位2点，5位1点で得点化すると，それぞれ，A:127，B:156，C:162，D:191，E:189となるので，問題Dが最も難しい。

(e) 総当たり決戦方式

一対比較法にて評価する。A vs E（18 vs 37），B vs E（22 vs 33），C vs E（19 vs 36），D vs E（27 vs 28）となり，いずれもEの方が難しかったと評価される。よって問題Eが最も難しい。

このように，解釈によってはすべての問題が最も難しい問題と判断できることになる。

正規化順位法（福田(2009)）によって資料2のデータの尺度値（-1から1の間でそれぞれどこに位置付くか，心理尺度を数値化したもの）を求めると下記のようになる。

問題1	問題2	問題3
-0.322	0.1789	0.1431

このことから，難易度は問題2＞問題3＞問題1の順となる。また有意水準5%でそれぞれの尺度値間について t 検定を行うと，問題3と問題1は有意に差があるが，問題2と問題3については有意な差は認められない。

また，生徒に行った実際の調査結果の内訳は以下の通りとなった。

問題1＞問題2＞問題3	10
問題1＞問題3＞問題2	9
問題2＞問題1＞問題3	25
問題2＞問題3＞問題1	29
問題3＞問題1＞問題2	12
問題3＞問題2＞問題1	19
計	104

このデータも同様に正規化順位法にて尺度値を求めると次のようになる。

問題1	問題2	問題3
-0.2694	0.3065	-0.037

ここでも難易度は問題2＞問題3＞問題1の順となる。これについても同じように尺度値間にて t 検定を行うと，問題2と問題3，問題3と問題1いずれにおいても有意な差が認められた。したがって実データにおいては明らかに難易度に関して差を感じていることが分かる。

5. 立体パズルの問題の構造について（調査問題の問題分析）

下の図のように，立方体の 8 つのピースを次のように(a)～(h)とし（図 1），1 つのピースの面をそれぞれ x，y，z 面とする（図 2）。

図 1

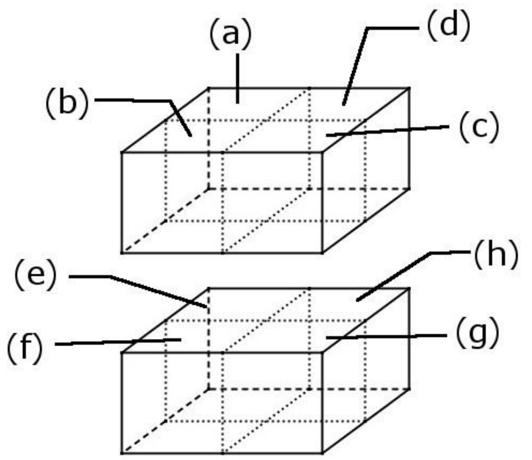
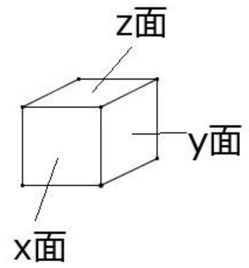
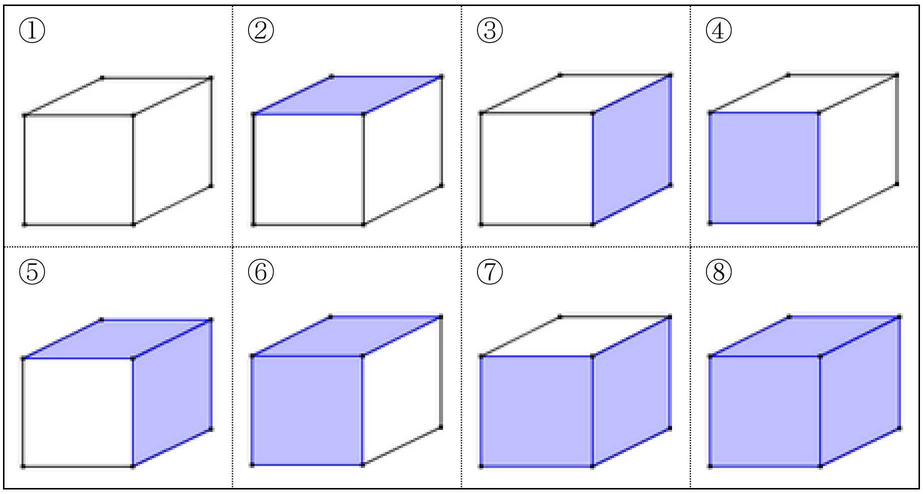


図 2



また，下の 8 つのピースを①～⑧とする。



与えられた模様に従い，(a)～(h)に①～⑧を対応させていくこととなる。このとき，

3 面が確定：(c)

2 面が確定（残り 1 面は白黒任意）：(b),(d),(g)

1 面が確定（残り 2 面は白黒任意）：(a),(f),(h)

3 面とも白黒任意：(e)

となる。したがって，与えられた模様に従って①～⑧の各ピースを対応させるとき，

(c) →(b),(d),(g)→(a),(f),(h)→(e)

の順に確定させていけばよい。

解が一意に定まる場合について考える。このとき(c)に対応するピースの確定ののちに定まる(b),(d),(g)については，(c)さえ定まれば(b),(d),(g)がすべて一意に定まる場合と，(b),(d),(g)のどれかが定まったのちに残りが確定する場合とに分かれる。資料 1 においては，問題 1 が前者で問題 2 が後者となる。それも含め，資料 1 の各問題の特徴について以下に述べる。

各面について，黒面を 1，白面を 0 で表すこととすると，ピース①～⑧の各面は次のように表せる。

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
x	0	0	0	1	0	1	1	1
y	0	0	1	0	1	0	1	1
z	0	1	0	0	1	1	0	1

また，立方体のピース(a)～(h)は表に現れている面と隠れている面とがあり，隠れている面については黒面でも白面でもどちらでもよいこととなる。それを表したのが下の表で，網掛け部が隠れている面を表している。

	a	b	c	d	e	f	g	h
x								
y								
z								

与えられた模様により，上の表の空白部は 0 または 1 が確定する。それに合致するように，①～⑧のピースを対応させればよい。また，模様と立方体のピースとの対応は右の図のとおりである。ここで，(a)-z は立方体(a)の z 面を表すものとする。

(a)-z	(d)-z		
(b)-z	(c)-z		
(b)-x	(c)-x	(c)-y	(d)-y
(f)-x	(g)-x	(g)-y	(h)-y

以下，各問題についてその特徴を考察する。

問題 1

(a)-z	(d)-z		
(b)-z	(c)-z		
(b)-x	(c)-x	(c)-y	(d)-y
(f)-x	(g)-x	(g)-y	(h)-y

	a	b	c	d	e	f	g	h
x		1	1			1	1	
y			0	0			0	0
z	0	1	1	1				

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
x	0	0	0	1	0	1	1	1
y	0	0	1	0	1	0	1	1
z	0	1	0	0	1	1	0	1

(c)は⑥で確定する。次に(b),(d),(g)は，(b)が⑧，(d)が②，(g)が④とそれぞれ確定する。次の(a),(f),(h)は， (f)が⑦，(h)が①と定まったのち，(a)が③と定まる。最後に(e)が⑤となる。このように解は一意に定まる。さらに(c)が確定すれば，それぞれ独立に(b),(d),(g)が確定する構造である。

問題 2

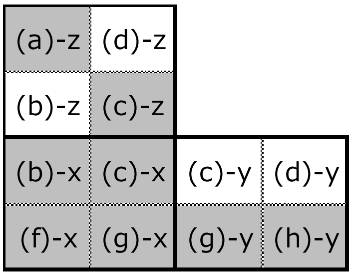
(a)-z	(d)-z		
(b)-z	(c)-z		
(b)-x	(c)-x	(c)-y	(d)-y
(f)-x	(g)-x	(g)-y	(h)-y

	a	b	c	d	e	f	g	h
x		1	1			1	1	
y			0	0			0	0
z	1	0	1	0				

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
x	0	0	0	1	0	1	1	1
y	0	0	1	0	1	0	1	1
z	0	1	0	0	1	1	0	1

(c)は⑥で確定する。次の(b),(d),(g)は同時には定まらない。すなわち，(g)が④と定まったのち，(b)が⑦，(d)が①と定まる。次の(a),(f),(h)は，(f)が⑧，(h)が②と定まったのち，(a)は⑦と定まる。最後に(e)が③となる。これも解が一意に定まる問題である。この問題は，(c)が確定したのち，(g),(b)が確定してはじめて(a)が確定する構造である。

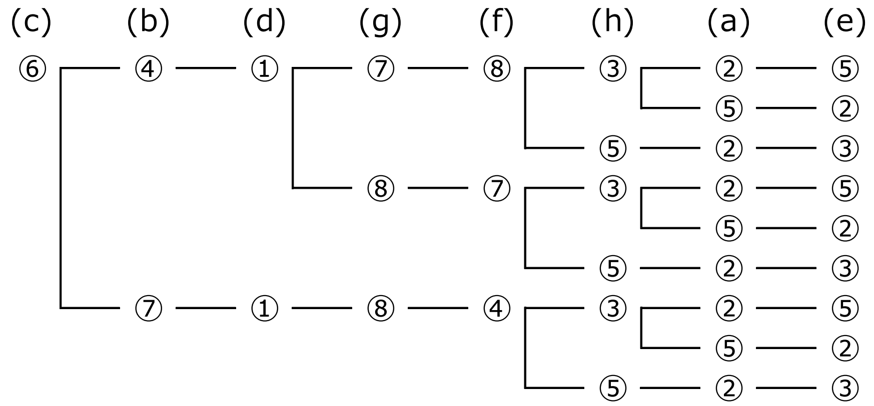
問題 3



	a	b	c	d	e	f	g	h
x		1	1			1	1	
y			0	0			1	1
z	1	0	1	0				

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
x	0	0	0	1	0	1	1	1
y	0	0	1	0	1	0	1	1
z	0	1	0	0	1	1	0	1

(c)は⑥で確定するが，次の(b),(d),(g)はいずれも一意には定まらない。そこで順に場合分けにて考えると，次のようになる。



したがって，全部で 9 通りの解がある問題である。

注 1) http://www.globalmath.info/

なおグローバルマスでは，ゲームを通して次の 9 つの力（数学的思考力）を育むことを期待している。

<table>
<tr><td>①抽象化力</td><td>・与えられた条件を理想化・単純化する力</td></tr>
<tr><td>②規則認識力</td><td rowspan="2">・重要な条件を見つけることができる力
・与えられた条件を分解／整理できる力
・関係性や規則性を抽出する力
・関係性や規則性を確かめる力</td></tr>
<tr><td>③分類力</td></tr>
<tr><td>④戦略力</td><td>・解決の方針を立てる力</td></tr>
<tr><td>⑤実行力</td><td>・条件，方針に基づいた操作を行う力</td></tr>
<tr><td>⑥振り返り力</td><td>・結果を見直したり，改善したりする力</td></tr>
<tr><td>⑦数量感覚</td><td>・数や量の大きさをすばやく見積もる力</td></tr>
<tr><td>⑧空間感覚</td><td>・物体の状態や関係をすばやく正確に認識する力</td></tr>
<tr><td>⑨関数感覚</td><td>・変化の様子をすばやく正確に把握，認識する力</td></tr>
</table>

注 2) クラスと問題番号の対応は以下のとおりである。なお，添付の資料は A セットの問題である。

問題番号	1	2	3
A セット（1 組）	問題 1	問題 2	問題 3
B セット（2 組）	問題 3	問題 2	問題 1
C セット（3 組）	問題 1	問題 3	問題 2
D セット（4 組）	問題 2	問題 3	問題 1

【参考・引用文献】

国立教育政策研究所,(2012),「平成 24 年度全国学力・学習状況調査　中学校　数学　報告書」

坂井豊貴,(2013),『社会的選択理論への招待』,日本評論社

ジョン.A.パウロス,(1997),『数学するヒント』，白揚社

全国統計教育研究協議会編,(2004), 「中学生のための統計」,総務省統計局 Web サイトより
http://www.stat.go.jp/teacher/dl/pdf/c2learn/materials/second/02_1.pdf

高橋昌一郎,(2008),『理性の限界』,講談社現代新書

福田忠彦他,(2011),『人間工学ガイドー感性を科学する方法ー』,サイエンティスト社

資料１

数学パズルを作ろう
～難易度調査～

Ａセット

●合図があるまで用紙を開かないでください。

●問題は全部で３問あります。最後にその３問を難しかった順に並べてもらいますので，そのつもりで１問ごと解いてください。

●解答はすべて解答用紙に書いてください。

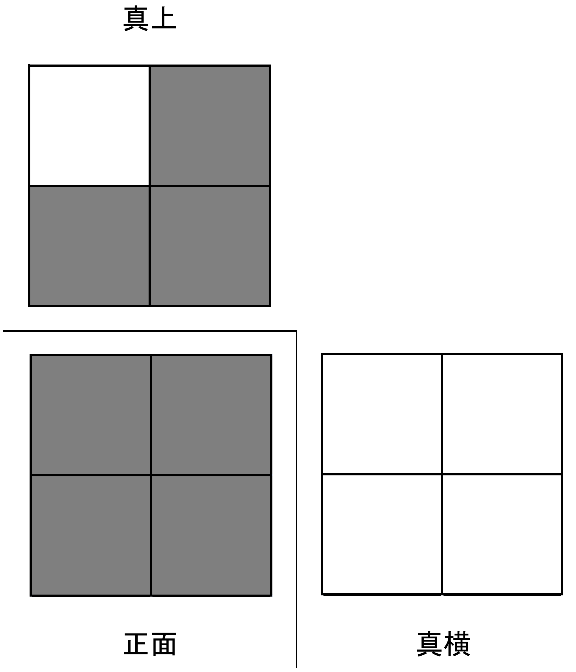
●解答用紙にはアンケートもあるので，それにも答えてください。

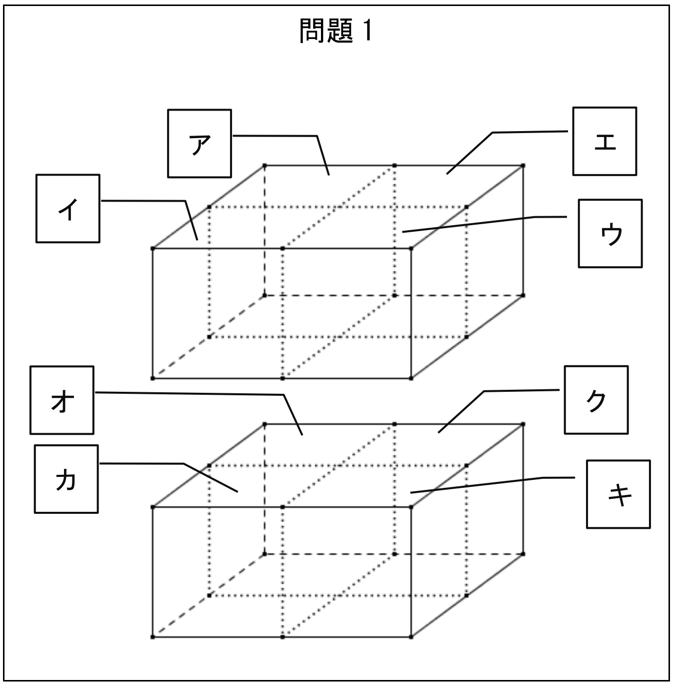
年　　　組　　　番

立体パズル（問題１）

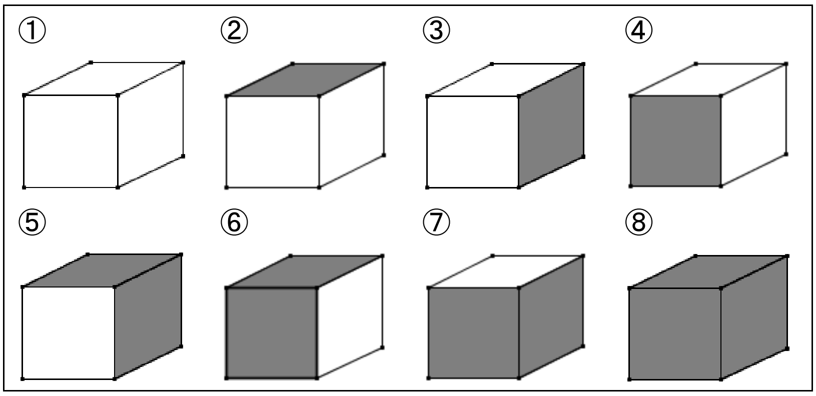
下で示した模様になるように，**ア～ク**に当てはまるピースの番号を解答用紙に書き入れましょう。各ピースの向きは変えられません。

なお，答えは一通りとは限りません。各面の模様が示されたとおりになっていれば完成です。





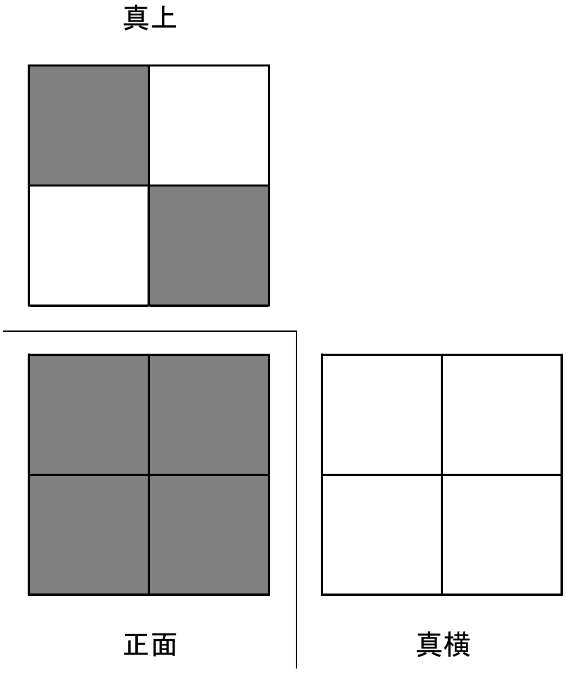
ピース

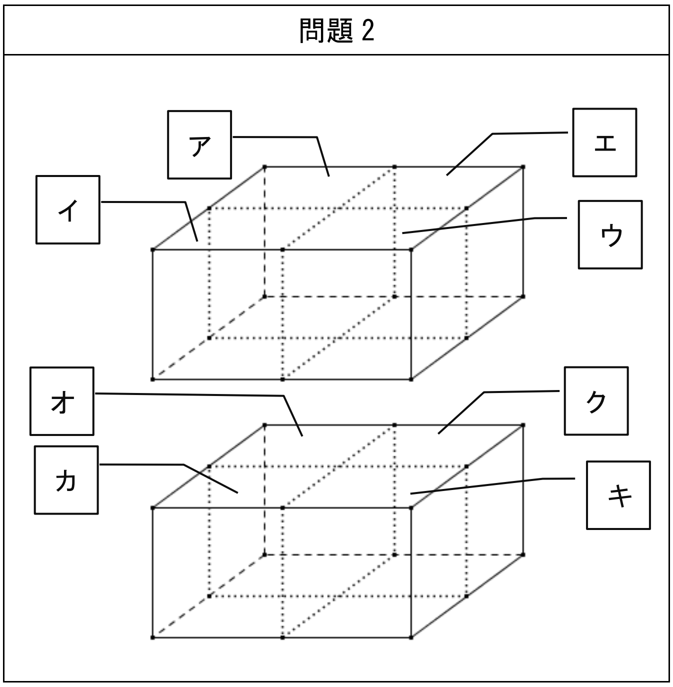


立体パズル（問題２）

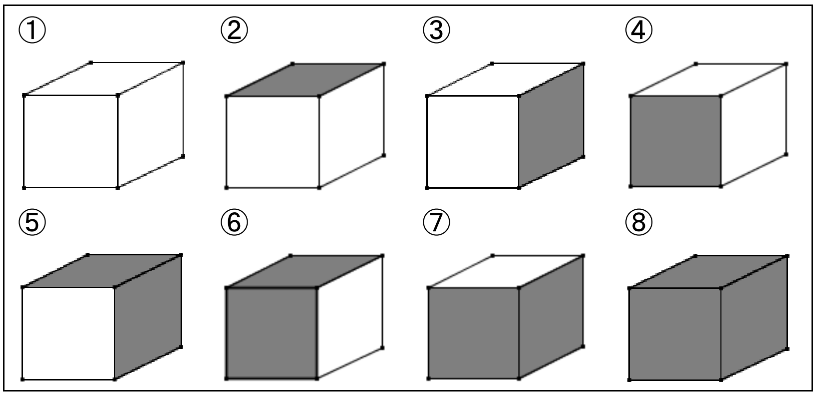
下で示した模様になるように，**ア～ク**に当てはまるピースの番号を解答用紙に書き入れましょう。各ピースの向きは変えられません。

なお，答えは一通りとは限りません。各面の模様が示されたとおりになっていれば完成です。





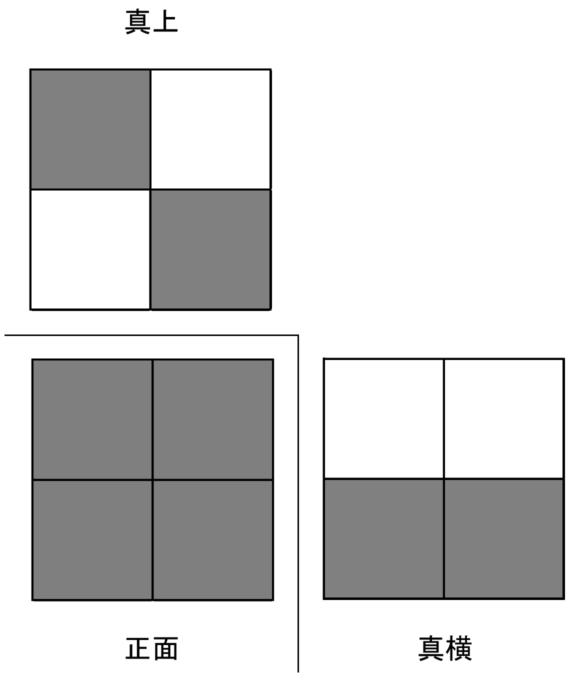
ピース

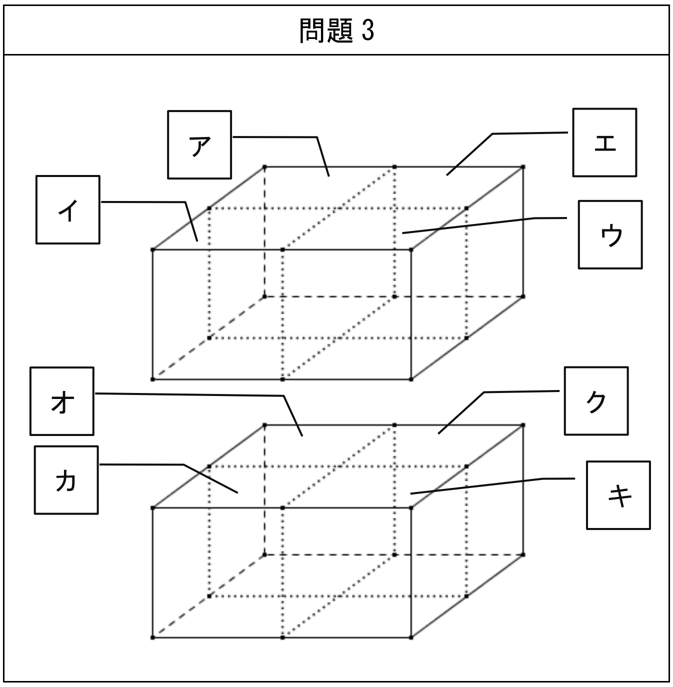


立体パズル（問題３）

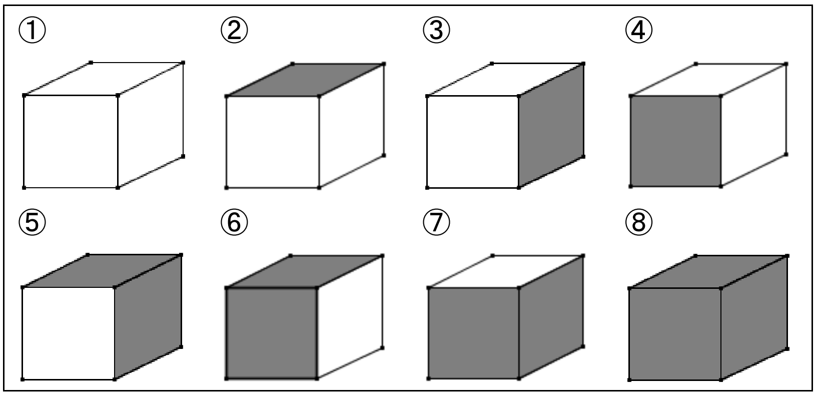
下で示した模様になるように，**ア～ク**に当てはまるピースの番号を解答用紙に書き入れましょう。各ピースの向きは変えられません。

なお，答えは一通りとは限りません。各面の模様が示されたとおりになっていれば完成です。





ピース



数学パズルを作ろう～難易度調査問題 A～解答用紙

立体パズル解答欄

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
問題１								
問題２								
問題３								

難易度をお聞きします。問題 1～問題３について，難しかった順に並べてください。

難 ⇔ 易		
問題	問題	問題

なぜそのような順にしたのか，理由を書いてください。

このパズルでは空間的思考力や論理的思考力が必要になります。より面白いパズルにするためにはどのように発展，改善することが考えられますか。自由に書いてください。

年　　　組　　　番　（ 男 ・ 女 ）

「立体パズル」難易度　集計結果

資料２

数値は問題番号です。

No	難易度・高	難易度・中	難易度・低
1	2	3	1
2	3	1	2
3	2	1	3
4	1	2	3
5	1	2	3
6	3	1	2
7	2	1	3
8	3	2	1
9	3	2	1
10	3	2	1
11	2	3	1
12	3	2	1
13	3	1	2
14	2	3	1
15	1	2	3
16	2	3	1
17	2	3	1
18	2	3	1
19	2	1	3
20	3	1	2
21	1	2	3
22	2	1	3
23	3	2	1
24	2	3	1
25	3	1	2
26	3	1	2
27	3	2	1

数学的モデルを解釈する授業～関数～

東京学芸大学附属国際中等教育学校　　成田　慎之介

1. はじめに

「知識基盤社会」と呼ばれる現代社会において，知識の習得だけではなく，それらを活用していく能力が重要視されてきている．例えば，OECD/PISA 調査では数学的リテラシーが重視され，全国学力・学習状況調査においても，「B 問題」では問題解決のために活用能力が必要とされている．また，学習指導要領においても，「学習し身に付けたものを，日常生活や他教科等の学習，より進んだ算数・数学の学習へ活用していくこと」(文部科学省，2008)が挙げられている．

数学を活用するといったときに考察の対象となる事象は，現実世界の事象でもあるし，数学世界の事象でもある．本時では，現実世界の問題を対象として数学を活用していく，いわゆる数学的モデル化を遂行する．

三輪(1983)は，数学的モデル化のプロセスを図 1 のように捉えている．数学的モデル化の授業実践は数多く報告されており(例えば，西村,2012；浜田,2010)，それらにおいては当然このようなプロセスを経ているだろう．数学的モデル化を遂行するために，全くそれが未経験の生徒に対しては，まずはこのサイクル自体を経験させることが大切であるだろう．しかし，ある程度経験した生徒に対しては，このプロセス一つ一つの質を高めていく必要があると考える．

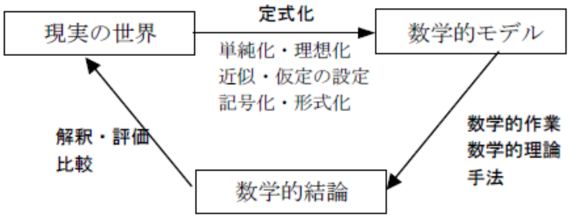


図 2　数学的モデル化のプロセス　三輪(1983)

例えば，「定式化」のプロセスにおいて，現実のデータから「数学的モデル」を作成した際，そのモデルを用いてすぐさま「数学的作業」に移るのではなく，モデルの妥当性や信頼性を評価するということが考えられる．仮定の設定は妥当なのか？近似線などを引いた場合，適切な近似線を選択しているのか？などである．この活動はモデルを作った時点で行われることもあるだろうし，数学的モデル化サイクルを 1 周した時点でも行われるであろう．

また，「数学的モデル」を解釈するというプロセスも大切である．「現実の世界」の問題を「定式化」して「数学的モデル」を作成したものの，そのモデルの構造を的確に把握しないまま，「数学的作業」に移り，既知のアルゴリズムによって「数学的結論」を得ることができてしまい，それを感覚的に「解釈」することによって「現実の世界」の結論としてしまうことは，往々にしてあり得ることである．さらには，その結論がもっともらしいことも十分にありえる．しかし本当は，「現実の世界」の結論を出す以前に，どこかの時点で「数学的モデル」の構造を的確に捉え，それに基づいて，すなわち的確な数学的根拠に基づいて「現実の世界」の結論を出す必要がある．この活動を行うことによって，「現実の世界」の結論が，この活動をせずに出した結論よりも妥当性，信頼性を増し，精緻化されることになる．

ここで挙げた例は，数学的モデル化のプロセス一つ一つの質を高める視点の一例に過ぎない．しかし，ある程度数学的モデル化を経験した生徒に対しては，このような授業を行う必要があるのではないかと考える．本校では，現実の問題を解決することを通して数学的概念を獲得し，さらにそれを発展させたり，別の現実の問題に活用するという手法をとっている．本時の対象となる生徒は，3 年間そのような授業を受けてきている．すなわち，数学的モデル化を何度も遂行してきていることになる．しかし，そのような授業において，数学的モデル化のプロセス一つ一つに十分に焦点をあてることができているわ

けではない．

そこで本時では，数学的モデル化における一つのプロセスに焦点をあてる．すなわち，「数学的モデルを解釈する」ということに焦点をあてる．そのために，「数学的モデルを解釈する」必要性のある教材を用いて，そのこと自体が議論の対象となる授業を組み立てる．

2. 本教材について

2.1 本教材の課題

本教材は，事象を 2 変数関数のモデルに置き換え，それを解釈するものである．

筆者はしばしばレンタカーを借りる機会があり，その都度迷うことがある．それは，プリウスのような燃費の良い車を借りた方が得なのか，フィットのようなレンタカー代が比較的安めの車を借りた方が得なのかということである．

レンタカーを借りる際，それにかかる費用は，レンタカー本体のレンタル費用と，行程中のガソリン代である．すなわち，レンタカーを借りる際の総費用は，

$$(\text{総費用}) = (\text{レンタカー代}) + \frac{(\text{走行距離})}{(\text{燃費})} \times (1\text{L あたりのガソリン代})$$

というモデルによって算出される．レンタカー代が安くても燃費が悪ければ高くかかってしまうし，逆に，レンタカー代が高くても燃費が良ければ総費用を抑えることができる．このことを考えると，プリウスのような燃費の良い車を借りた方がいいのではないかと考えられる．しかし，プリウスはレンタカー代が高めに設定されているのである．表 1 に，あるレンタカー会社の車種別のレンタル代を示す．

表 1　レンタカー代(円)

	1 日	(以降 1 日ごとに)	2 日間	3 日間	4 日間	5 日間	6 日間
ヴィッツ	7350	6300	13650	19950	26250	32550	38850
フィット	8400	6825	15225	22050	28875	35700	42525
カローラ	9975	8400	18375	26775	35175	43575	51975
ウィングロード	11025	9450	20475	29925	39375	48825	58275
フィット Hybrid	9975	8400	18375	26775	35175	43575	51975
アクア	10500	8925	19425	28350	37275	46200	55125
プリウス	12075	9975	22050	32025	42000	51975	61950

例えば，2 泊 3 日の旅行に行く際，ウィングロードを借りた場合，レンタカー代は 29925 円であるのに対して，プリウスを借りると 32025 円になる．しかし，ウィングロードの平均燃費は 9.7km/L であるのに対して，プリウスは 23.4km/L と大きな違いがある．このような時，どちらを借りるべきなのか迷うのである．当然，旅行にはそれなりの目的があることが多く，その目的によっては車種が限定されることもあるだろう．しかし，レンタカーを借りる人は様々であり，必ずしも車種が限定される場合ばかりではない．そこで，本教材では，ウィングロードとプリウスの 2 車に限定し，どのような状況のとき，

どちらが得なのかについて探究する．

ヴィッツやフィットは燃費も良く，レンタカー代そのものも安いため，プリウスよりも総費用が安く抑えられることは明白である．しかし，車体が比較的小さいため，安全性という面で不安がある．それに比べて，ウィングロードやプリウスはボンネットがあり，車体も比較的しっかりしている．そのようなことを授業の導入において議論することによって，ウィングロードとプリウスの 2 車に対象を絞っていく．

また，ただ単にどちらが得かを比較するだけでは，その目的が希薄である．レンタカーという題材だけで生徒の実感は薄いことが想定される．そこで，問題を解決する必要感を少しでも出すために，「どういう状況の時どちらが得かをホームページに掲示する」という文脈を設ける．そのことによって，汎用性のある提示をする必要が生まれる．すなわち，○○日借りる場合は，○○km 以上走行するならば○○の方が得だという状況を出来るだけ多く考えるということである．

以上のことを踏まえ，本教材における課題を以下のように設定する．

レンタカー会社の立場にたって，HP に，ウィングロードとプリウスでは，どのような状況の時，どちらが得なのかをわかるように提示しよう．

2.2　問題の構造

以下に，本課題の構造を簡単に記述する．

まず変数として，日数，走行距離，燃費，1L あたりのガソリン代(以下，レギュラー価格)が挙げられる．4 変数では中学 3 年にとっては難易度が高すぎる．一方で，1 変数では単なる 1 次関数の問題となってしまう．そこで，変数を 2 つに絞り，2 変数関数として扱うことにした．

まず，レギュラー価格は昨今大きく変動はしていないため，定数とすることにした．日数と走行距離は，レンタカーを借りる人によって様々であるため，これを定数とすることは不適切である．燃費も，速度や運転手の技量によって変化するのであるが，カタログ燃費がメーカーから提示されていたり，データを集めて平均燃費を算出しているサイト(http://kuru-ma.com/nenpi.html など)もあることから，平均燃費を用いて定数とすることにした．

以上のことから，定数と変数を以下のように仮定する．

レンタカー使用日数	: x(日)
レンタカー使用中の総走行距離	: y(km)
ウィングロードの平均燃費	: 9.7km/L
プリウスの平均燃費	: 23.4km/L
レギュラー価格	: 150 円/L

これらの仮定と表 1 から，ウィングロードの総費用(Z_W)と，プリウスの総費用(Z_P)はそれぞれ，

$$z_w = 11025 + 9450(x-1) + \frac{y}{9.7} \times 150$$

$$z_p = 12075 + 9975(x-1) + \frac{y}{23.4} \times 150$$

となる．ただし，x は正の整数，y≧0 である．

これら 2 つの平面の交線が，$Z_W = Z_P$ となる点の集合である．よって，正の整数である各 x に対して，走行距離が交線上の y の値よりも大きくなるならばプリウスの方が得であり，小さいならばウィングロードの方が得ということになる．

3. 指導計画の概要

第 1 時	・全て定数と仮定し，どちらが得か判断する． ・日数を定数と仮定し，走行距離を変数とし，総費用またはその差額を 1 次関数のモデルで表す．
第 2 時	・日数を定数と仮定し，走行距離を変数とし，前時に作成した 1 次関数のモデルを解釈することによって，走行距離がどのような時どちらが得か判断する． ・日数，走行距離を共に変数とし，総費用またはその差額を 2 変数関数のモデルで表す．
第 3 時(本時)	・日数，走行距離を共に変数とし，前時に作成した 2 変数関数のモデルを解釈することによって，どのような時どちらが得か判断する．

多変数関数を扱う際，変数を制御するというアイデアが大切である．しかし，最初から 2 変数で操作しようという生徒も多いのではないかと予想される．そこで，まずは具体的な数値から初めて，徐々に変数を増やしていくという考え方を想起させる．すなわち，①具体的な数値による解決，②1 変数のモデルによる解決，②2 変数のモデルによる解決という順で考えていく．これを三輪(1983)の数学的モデル化のプロセスと照合すると，①が 1 周目，②が 2 周目，③が 3 周目と考えることができる．

本時では，前時で作成した 2 変数関数のモデルを用いて判断する．その際，その数学的モデルを解釈することを通して，構造を的確に捉えさせ，確実な判断を行わせる．そこで，数学的プロセスを高めていく．

4. 本時における「数学的プロセス」の質の高まり

ここでは，本時における「数学的プロセス」の質，すなわち「2 変数関数のモデルを解釈する」質の高まりについて記述する．そのために，まずは 2 変数関数のモデルを用いて生徒がどのように解決するかを予想する．次に，生徒の「数学的プロセスの質」を想定する．最後に，その質を高めるために手立てについて記述する．

4.1　2 変数関数のモデルを用いた解決における予想される生徒の反応

2 変数における本課題を解決するにあたり，生徒は以下のモデルを作ることが予想される．

<u>(S1)　2 車の総費用を算出するモデル</u>

＜レンタカー代＞

ウィングロード：$11025+9450(x-1)$

プリウス　　　：$12075+9975(x-1)$

＜ガソリン代＞

ウィングロード：$\dfrac{y}{9.7}\times 150 \fallingdotseq 15.5y$

プリウス　　　：$\dfrac{y}{23.4}\times 150 \fallingdotseq 6.4y$

＜総費用＞

ウィングロード：$z_w = 11025+9450(x-1)+\dfrac{y}{9.7}\times 150$

プリウス　　　：$z_p = 12075+9975(x-1)+\dfrac{y}{23.4}\times 150$

(S2)　レンタカー代とガソリン代のそれぞれを算出するモデル

＜レンタカー代の差額＞

(プリウス)－(ウィングロード)

｛12075+9975(x－1)｝ － ｛11025+9450(x－1)｝ = 525x+525

＜ガソリン代の差額＞

(ウィングロード)－(プリウス)

$$\frac{y}{9.7}\times 150-\frac{y}{23.4}\times 150=\frac{13.7\times 150}{23.4\times 9.7}y$$

(S3)　総額の差額を算出するモデル

(プリウス)－(ウィングロード)

$$z_d=525x+525-\frac{150\times 13.7\times y}{23.4\times 9.7}$$

本課題で問題となるのは，どこでウィングロードとプリウスにかかる費用が入れかわるかということ，すなわちその境界がどこかということである．そこで，これらのモデルに対して，総額が等しくなるとき, レンタカー代とガソリン代の差額が等しくなるとき, 総額の差額が 0 になるときを考えるであろう．

(S1.1)　総額が等しくなるとき，すなわち $Z_W = Z_P$ となる場合

$$11025+9450(x-1)+\frac{y}{9.7}\times 150=12075+9975(x-1)+\frac{y}{23.4}\times 150$$

$$\Leftrightarrow y=(525x+525)\times\frac{23.4\times 9.7}{150\times 13.7}$$

(S2.1)　レンタカー代とガソリン代の差額が等しくなる場合

$$525x+525=\frac{y}{9.7}\times 150-\frac{y}{23.4}\times 150$$

$$\Leftrightarrow y=(525x+525)\times\frac{23.4\times 9.7}{150\times 13.7}$$

(S3.1)　総額の差額が 0 になる場合

$$525x+525-\frac{150\times 13.7\times y}{23.4\times 9.7}=0$$

$$\Leftrightarrow y=(525x+525)\times\frac{23.4\times 9.7}{150\times 13.7}$$

どの場合も，全て　$y=(525x+525)\times\frac{23.4\times 9.7}{150\times 13.7}$　に帰着する．これは先述の通り，境界を表すモデルである．そこで，本稿ではこのモデルを「境界モデル」と呼ぶことにする．

境界モデルから，x=1，2，3，4…に対応する(x，y)の組は，(1，115.97…)，(2，173.96…)，(3，231.95

…)，(4，289.93…)，…となる．このことから，生徒は，各日数に対して，この y の値よりも走行距離が長い場合はプリウスの方が得であり，短い場合はウィングロードの方が得であるという結論を導くであろう．

しかし，その場合の数学的根拠は何であるのか．それを問うことによって，(S1)から(S3)のモデルを解釈する必然性が生まれると考える．

4.2 想定される「数学的プロセス」の質

前節で記述した「数学的根拠」を求めて，生徒は(S1)から(S3)のモデルを解釈することになるだろう．では，その解釈の質はどのように想定されるだろうか．表 2 に，想定される解釈の質を水準化したものを示す．水準 1 が最も低く，水準 4 が最も高い．

表 2 本課題における数学的モデルを解釈する質の水準

水準の上昇

水準 4	グラフと式を対応させて，構造を的確に捉えて解釈している
水準 3	グラフを用いて解釈している
水準 2	表を用いて解釈している
水準 1	具体的数値を代入して解釈している

水準 1 は，具体的な数値を代入する水準である．例えば x=2，y=200 を代入すると，

<u>(S1.2) 2 車の総費用を算出するモデル</u>

$$z_w = 11025 + 9450(2-1) + \frac{200}{9.7} \times 150 = 23567.78\cdots$$

$$z_p = 12075 + 9975(2-1) + \frac{200}{23.4} \times 150 = 23332.05\cdots$$

<u>(S2.2) レンタカー代とガソリン代のそれぞれを算出するモデル</u>

＜レンタカー代の差額＞

(プリウス)−(ウィングロード)

525×2+525=1575

＜ガソリン代の差額＞

(ウィングロード)−(プリウス)

$$\frac{13.7 \times 150}{23.4 \times 9.7} \times 200 = 1810.73\cdots$$

<u>(S3.2) 総額の差額を算出するモデル</u>

$$z_d = 525 \times 2 + 525 - \frac{150 \times 13.7 \times 200}{23.4 \times 9.7} = -235.73\cdots$$

となり，プリウスの方が総額，差額が低いため得であると結論付ける．しかしこの解釈は，この数値の時のみ断定できることであって，一般性は保証されていない．

水準 2 は，表を用いて解釈する水準である．例えば，日数と走行距離の 2 次元表を用いることが考えられる．

(S1.3)

表 3　Z_wのモデルの表

	1	2	3	4	5
100	12571.39	22021.39	31471.39	40921.39	50371.39
150	13344.59	22794.59	32244.59	41694.59	51144.59
200	14117.78	23567.78	33017.78	42467.78	51917.78
250	14890.98	24340.98	33790.98	43240.98	52690.98
300	15664.18	25114.18	34564.18	44014.18	53464.18
350	16437.37	25887.37	35337.37	44787.37	54237.37
400	17210.57	26660.57	36110.57	45560.57	55010.57
450	17983.76	27433.76	36883.76	46333.76	55783.76

表 4　Z_Pのモデルの表

	1	2	3	4	5
100	12716.03	22691.03	32666.03	42641.03	52616.03
150	13036.54	23011.54	32986.54	42961.54	52936.54
200	13357.05	23332.05	33307.05	43282.05	53257.05
250	13677.56	23652.56	33627.56	43602.56	53577.56
300	13998.08	23973.08	33948.08	43923.08	53898.08
350	14318.59	24293.59	34268.59	44243.59	54218.59
400	14639.1	24614.1	34589.1	44564.1	54539.1
450	14959.62	24934.62	34909.62	44884.62	54859.62

(S2.3) (S3.3)

表 5　レンタカー代とガソリン代のそれぞれを算出するモデルの表

Z_dのモデルの表

	1	2	3	4	5
100	144.6339	669.6339	1194.634	1719.634	2244.634
150	−308.049	216.9508	741.9508	1266.951	1791.951
200	−760.732	−235.732	289.2678	814.2678	1339.268
250	−1213.42	−688.415	−163.415	361.5847	886.5847
300	−1666.1	−1141.1	−616.098	−91.0983	433.9017
350	−2118.78	−1593.78	−1068.78	−543.781	−18.7814
400	−2571.46	−2046.46	−1521.46	−996.464	−471.464
450	−3024.15	−2499.15	−1974.15	−1449.15	−924.148

表を縦に見たとき，網掛けの間が「境界」であり，それよりも走行距離が長ければプリウスの方が得であることと結論づける．この解釈は，水準 1 よりは一般性が保証されているが，y が 100 未満の時や

450 より大きいときも同様の傾向が続く保証はない．

水準 3 は，グラフを用いて解釈する水準である．例えば，x=1，2，3，4…のとき，y−z 平面を考える．これらのグラフから，z は y の 1 次関数となり，図 2 では直線同士の交点が，図 3 では直線と y 軸の交点が「境界」であり，それよりも走行距離が長ければ，Z_P＜Z_W または Z_d＜0 となり，プリウスの方が得であると結論づける．この解釈は水準 2 よりは高い水準であろう．グラフをかいたという点で，y と z の関係を連続的にみている．しかし，x の変化によるグラフの変化については言及していない．その点についても言及している水準が水準 4 である．

(S1.4)　2 車の総費用を算出するモデル

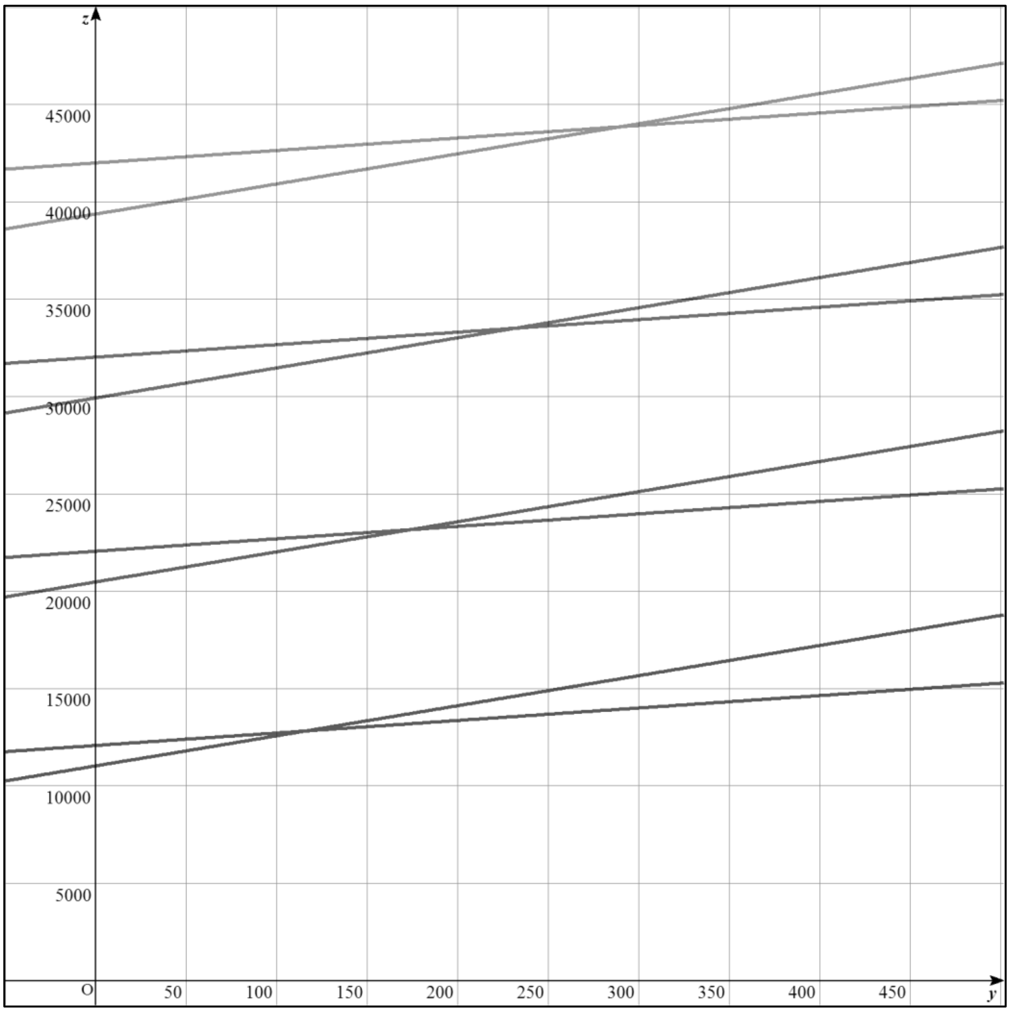


図 3　x=1，2，3，4 の Z_W，Z_P のグラフ

(S2.4)　レンタカー代とガソリン代のそれぞれを算出するモデル

(S3.4)　総額の差額を算出するモデル

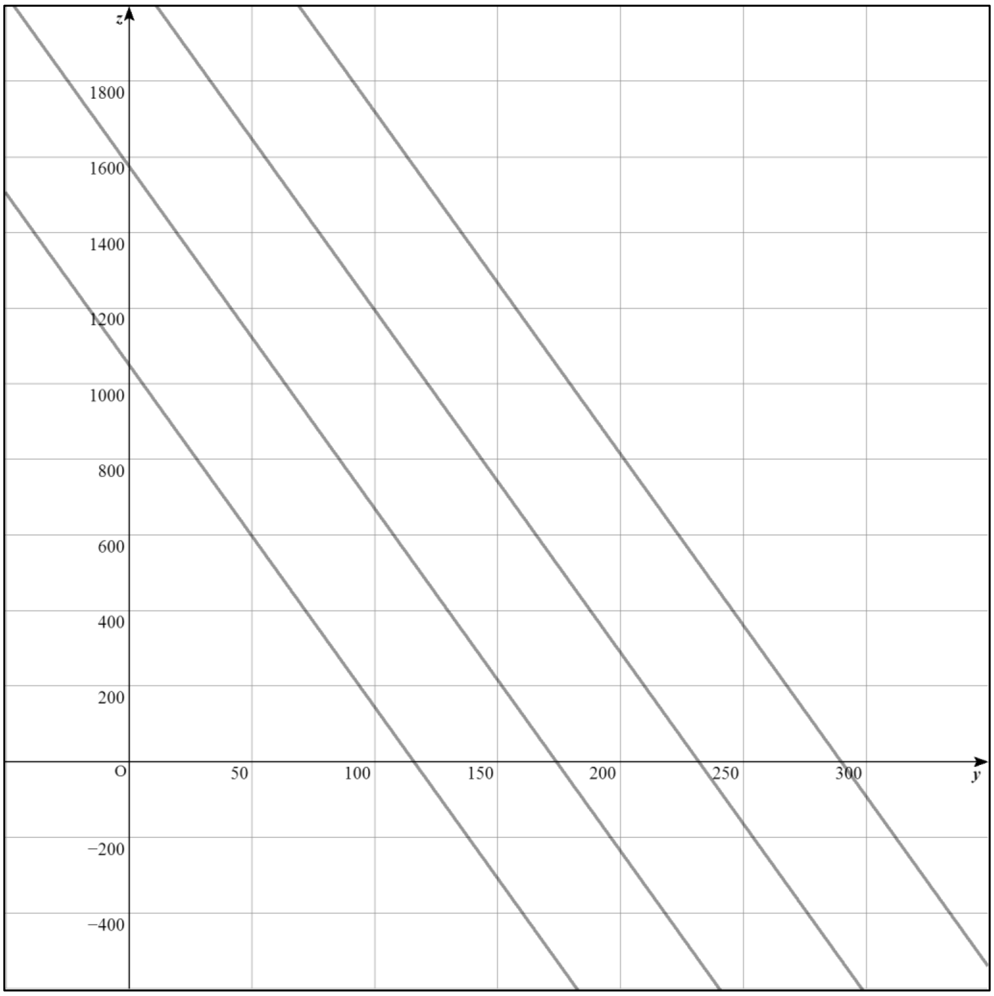


図 4　x=1，2，3，4 の Z_d のグラフ

先述の通り，水準 4 では，図 2 または図 3 を用いて，グラフと式を対応させることによって，x=1，2，3，4 以外の時についても言及している水準である．x を 1，2，3，4…と変化させたとき，それぞれについて z は y の 1 次関数となり，x の変化によってグラフは y 軸方向に平行移動しているだけである．このことを踏まえて，境界よりも y の値が大きいとき，$Z_P<Z_W$ または $Z_d<0$ となり，プリウスの方が得であると結論づける．この水準は，一般性が保証され，構造を的確に捉えている．2 変数関数のモデルの解釈として非常に高い水準にあるといえるだろう．

2 変数関数というこれまでに出会ったことのない関数を解釈の対象としていることから，何の手立てもない状態のとき，想定される生徒の水準は，水準 1 または手が付けられないという状態がほとんどなのではないだろうか．しかし，変数を制御して，順序良く考えていけば，水準 4 に達することも難しくはないと考える．そこで次節では，そのための手立てについて記述することにする．

4.3　「数学的プロセス」の質を高めるための手立て

まず，2 変数関数のモデルを解釈する以前に，1 変数関数のモデルを用いた解決の際に同様の活動を行っておくことが必要不可欠な手立てであると考える．すなわち，1 変数関数モデルを解釈した時点で，その質を表 2 の水準 4 に挙げておく必要がある．

対象となる生徒は昨年度に 1 次関数は学習済である．さらに，2 学期に種々の関数やそのグラフについて学習している．そこでは，2 乗に比例する関数を中心に，冪関数，分数関数，無理関数のグラフの平行移動，対称移動，拡大縮小等を行い，グラフと式を対応させる見方を重視した．さらに，2 次関数，3 次関数を中心に，関数の式を関数同士の和や積とみてそのグラフを予測するという活動も行った．これらの見方が身についていれば，1 変数関数モデルの解釈は自然と水準 4 に到達するのではないかと考える．

しかし，解釈の対象が 2 変数関数となると，生徒にとっての困難性は大きくなる．そこで，1 変数と 2 変数関数のモデルを解釈する際の共通の発問を用意しておくことにする．

(T1)　数学的根拠はなんですか？

(T2)　より一般性のある解釈をするためには，どのように解釈すればよいですか？

(T3)　正確に表現すると？

(T4)　x，y の値が変化すると，グラフはどのように変化するだろうか？

(T5)　x，y の値が変化すると，z の値はどのように変化するだろうか？

これらの発問を適宜使うことによって，1 変数関数の時と同様の活動を促すのである．

また，2 変数関数の場合，変数を制御する必要性がでてくる．発問の(T4)(T5)には，それを促す要素も含まれているであろう．

以上のことから，2 変数関数モデルの解釈の質を高めるための手立てとして，

1）1 変数関数モデルの解釈の時点で，水準 4 まで高めておくこと

2）1 変数，2 変数関数モデルの解釈をする場面で，共通の発問を用意しておくこと

3）変数を制御する発問を用意しておくこと

の 3 つを考えた．

5. さらなる「数学的プロセス」の質の高まり

本稿では，想定される「数学的プロセス」の質として，4 つの水準を挙げた．ここでは，補足的なこととして，水準 5 を想定してみたい．

水準 5 として，3 次元の直交座標系による解釈が想定できるだろう．その解釈の 1 つには，平面を想定して解釈することが考えられる．しかし，紙面上に平面のグラフを複数かくことは難しい．そこで，Z_W や Z_P，Z_d のモデルにおいて，x=1，2，3，4…の直線を 3 次元直交座標系にかくのである．そうすることによって，境界モデルも含め，全てのモデルを 1 つの空間に表すことができる．この水準の解釈ができれば，全てのモデルの関係が，ガウス平面上での解釈よりも明確になり，構造をより的確に捉えることができるだろう．本時の対象生徒にとっては高すぎる水準であるだろうが，適切な時期にこの課題を課せば，その価値はあるのではなだいろうか．

また，3 次元直交座標系の創出という視点からも本教材をみることができるのではないかと考えている．

【参考文献】

OECD(2013),*PISA 2012 Assessment and analytical Framework : Mathematics , Reading , Science , Problem Solving and Financial Literacy*, OECD Publishing

国立教育政策研究所(2013)『平成 25 年度　全国学力・学習状況調査　解説資料』

文部科学省(2008)『中学校学習指導要領解説　数学編』，教育出版

三輪辰郎(1983)「数学教育におけるモデル化についての一考察」，筑波数学教育研究，2，pp.117-125
西村圭一(2012)『数学的モデル化を遂行する力を育成する教材開発とその実践に関する研究』，東洋館
浜田兼造(2010)「数学的モデル化のサイクルを実現する授業に関する研究：「ガソリンの割引カード」を例にして」，日本数学教育学会誌，92(9)，pp.11-18
http://www.nipponrentacar.co.jp/index.html　最終閲覧日 2014 年 3 月 10 日