

数学的モデルを解釈する授業～関数～

東京学芸大学附属国際中等教育学校 成田 慎之介

1. 対象：東京学芸大学附属国際中等教育学校 3年3組 (31名)

2. 指導計画

第1時	<ul style="list-style-type: none"> ・全て定数と仮定し，どちらが得か判断する. ・日数を定数と仮定し，走行距離を変数とし，総費用またはその差額を1次関数のモデルで表す.
第2時	<ul style="list-style-type: none"> ・日数を定数と仮定し，走行距離を変数とし，前時に作成した1次関数のモデルを解釈することによって，走行距離がどのような時どちらが得か判断する. ・日数，走行距離を共に変数とし，総費用またはその差額を2変数関数のモデルで表す.
第3時(本時)	<ul style="list-style-type: none"> ・日数，走行距離を共に変数とし，前時に作成した2変数関数のモデルを解釈することによって，どのような時どちらが得か判断する.

本時の課題，想定している生徒のプロセスの質，手立て等については，別冊の資料に記述してあるため，そちらを参照して頂きたい。

3. 授業の実際(第1時，第2時)

2014年3月11日(月)に第1時と第2時を行った。ただし，どちらの時間もテスト返却等の諸事情により，授業時間は正味35分ずつくらいしか取れなかった。ここでは，その2時間分の概要を示す。

まず第1時では，パワーポイントを用いて導入を行い，課題を提示した。「HPに提示する」という課題だが，まずは「どういう状況の時，どちらが得かを考えよう」ということを共有した。その後，例えば3泊4日，1000kmの場合を考えてみようということになった。その結果，ガソリン代，レンタカー代をそれぞれ計算し，総費用を算出して比較するという方法でプリウスの方が得という結論を出した。ここで第1時が終わる。この時点で，既に指導計画の通りに進んでいない。そこで，第2時では1変数

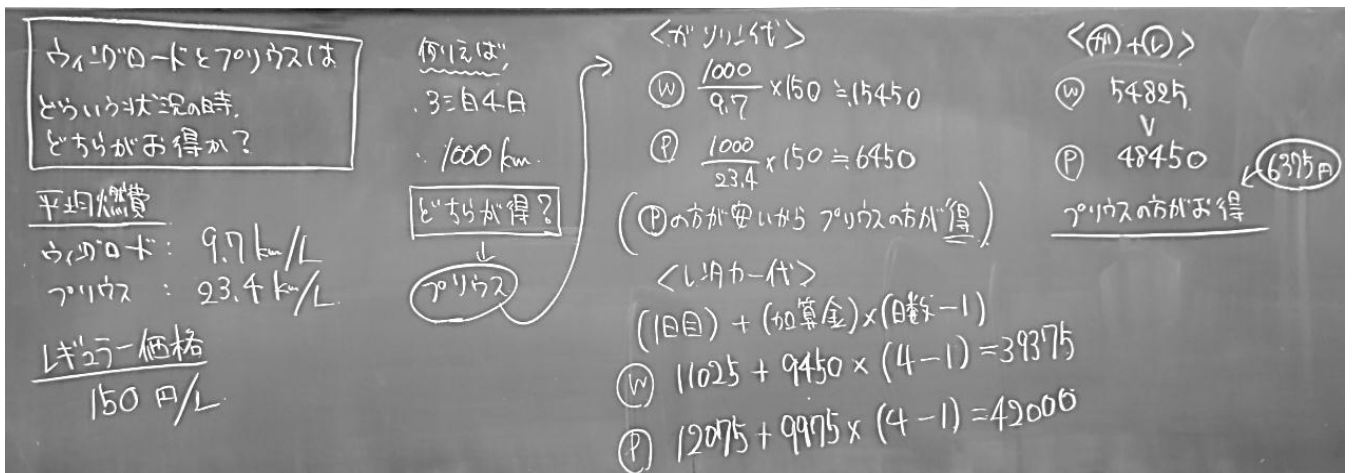


図1 第1時の板書

の場合を扱わないということも考慮にいれながら授業を行うことにした。

第2時ではまず，第1時の活動を振り返って，変数が日数と走行距離であることを確認し，日数を x (日)，

走行距離を $y(\text{km})$ とすることを全体で共有した。その後、「どのように考えるか」を問うたところ、ガソリン代とレンタカー代をそれぞれ x と y を使って、第1時の時と同様に計算し、式に表すことが提案された。そして、実際に行った。その後、それぞれの車の総費用を表す式を算出し、その差額を算出した。そして、その差額の式を M とすることが共有され、その M が正の時はプリウスの方が得で、負の時はウイングロードの方が得という結論が導かれた。

この結論が導かれた後に、生徒からは、「その式をホームページに載せておけばいいじゃん」、「 x と y っていうのを作っといて、そこに代入できるようにしておけばいい」という発言が出された。クラス全体がそれで問題が解決されたというような雰囲気になった。確かに課題に対する解は得られたかもしれないが、先述した通り、質の高い問題解決とはなっていない。そこで、 $M=0$ のときが、2車の総費用が等しいときなので、その (x, y) の組を探してみようということをお願いした。その結果、 $M=0$ とした式を「 $y=$ 」の形に変形させた式が出てきた。第2時はここで終了した。

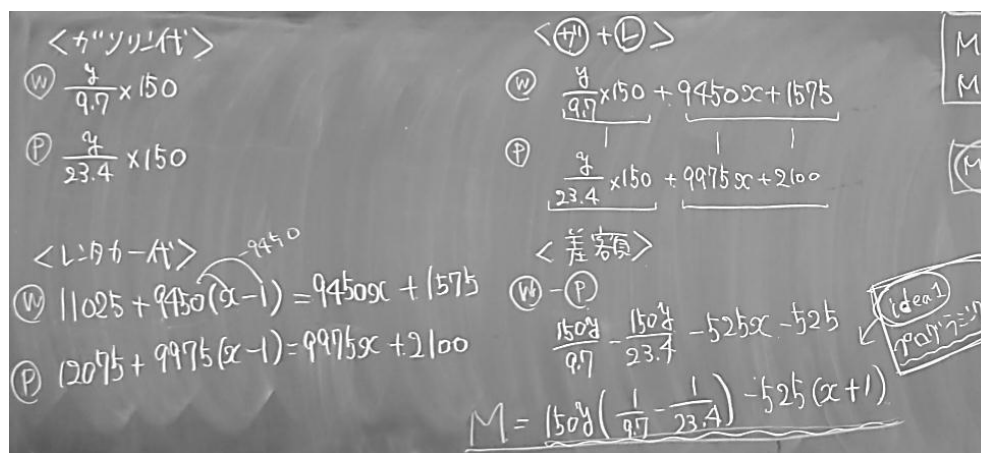


図 2 第2時の板書(1/2)

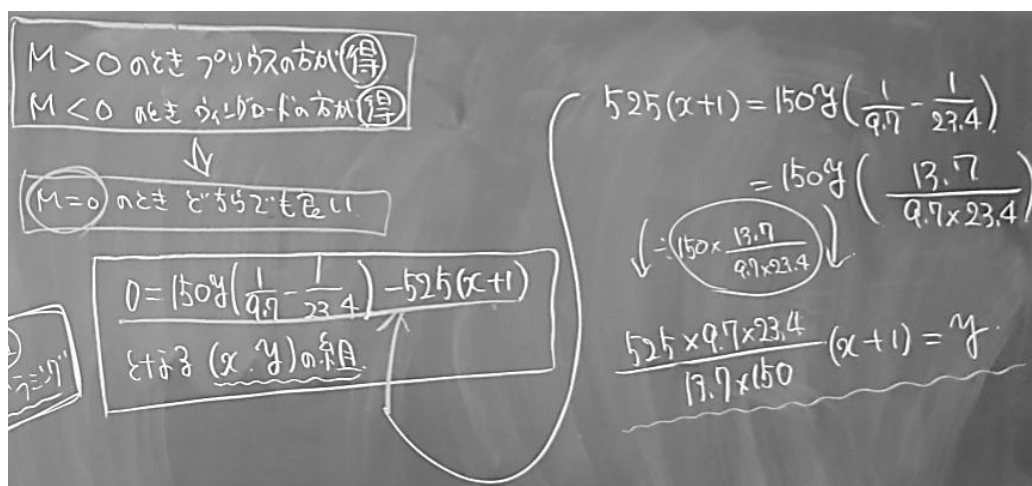


図 3 第2時の板書(2/2)

4. 第3時の手立て

第1時と第2時では、1変数で考えるという活動が欠けてしまった。そのため、解釈の質を高めるために予定していた大きな手立てが1つない状態で第3時に臨むことになる。そこでここでは、再度全体を見直し、新たな手立てを考えたい。

解釈の質を水準4まであげるためにはいくつかの手立てが必要となる。

一つは、「式をグラフで表す」という発想を導くことである。一般に、式からグラフをかきたいと考

えるきっかけとしては、変化の様子を視覚的に、全体的に捉えたい、複数の関数の相互関係を知りたいというようなことが考えられる。そこで、境界周辺では2車の総費用にどのくらい違いがあるのか、総費用の関係はどのように変化するのかということを考えさせる。旅行をする際の走行距離は、当初の予定と実際との間に差があるのが通常であろう。そこで、境界の周辺の様子を調べておく必要性を生徒に感じさせる。このことによって、表やグラフを用いて考えるという発想を想起させたい。

二つ目は、変数を1つ固定して考えるということである。本教材の文脈の場合、日数を固定するのが自然であろう。その考えをいかに引き出すかが問題となる。しかし、境界周辺の様子を問うことによって表の考えが出てくれば、その表をみる際に、日数を固定してみるという見方が出てくるだろう。そのことによって、グラフを考える際も、日数を固定すればよいのではないかという考えにつなげていきたい。

5. 本時の目標

- (1) 数学的モデルを、グラフと式を対応させながら構造を的確に捉えて解釈している。
- (2) 多変数関数について、変数を制御して考える良さを実感することができる。

6. 本時案

	学習活動(主な発問, 予想される生徒の反応)	留意事項										
導入 10分	<p>1. 前時までの確認</p> <p>T: 前回は何をやりましたか?</p> <p>S: 日数を x(日), 走行距離を y(km)として式をたてた</p> <p>S: 差額を M として式をつくった</p> <p>S: $M=0$ の時の式を考えた</p> <p>S: $M=0$ の時の式を「$y=$」の形にした</p> <p>T: $y = (x+1) \times \frac{525 \times 23.4 \times 9.7}{150 \times 13.7}$ の式は何を表す式ですか?</p> <p>S: M が 0 の状態</p> <p>S: ガソリン代とレンタカー代の総額が等しい状態</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・ $M=0$ となる (x, y) の組が総費用が入れかわる境界であることを抑える 										
展開 35分	<p>具体的に、どのような状況の時、どちらの方が得だろうか?</p> <p>2. 数学的結論から現実的結論を導く</p> <p>S: $y = (x+1) \times \frac{525 \times 23.4 \times 9.7}{150 \times 13.7}$ の (x, y) の値は,</p> <p>(1, 115.97…), (2, 173.96…), (3, 231.95…),</p> <p>(4, 289.93…), (5, 347.92…)なので,</p> <p style="text-align: center;">表 1</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>日帰り</td> <td>1泊2日</td> <td>2泊3日</td> <td>3泊4日</td> <td>4泊5日</td> </tr> <tr> <td>116</td> <td>174</td> <td>232</td> <td>290</td> <td>348</td> </tr> </table>	日帰り	1泊2日	2泊3日	3泊4日	4泊5日	116	174	232	290	348	<ul style="list-style-type: none"> ・ワークシートを配布 ・具体的な数値を用いて答えさせる ・境界を表にまとめる
日帰り	1泊2日	2泊3日	3泊4日	4泊5日								
116	174	232	290	348								

旅行日数に対して、走行距離が上の表の値よりも大きいならば、プリウスの方が得ということになる。

3. 数学的モデルの解釈

T：旅行に行く際、走行距離は予定よりもずれるのが現実ですよ。だから、境界の周辺や全体の傾向を把握できるといいですよ。

日数と走行距離が変化するとき、2車の総費用の関係はどのように変化するのだろうか？

S：(境界周辺の数値を代入する)

S：(総額の表をつくる)

Z_w と Z_p の表をつくる

$$z_w = 11025 + 9450(x-1) + \frac{y}{9.7} \times 150$$

	1	2	3	4	5
100	12571.39	22021.39	31471.39	40921.39	50371.39
150	13344.59	22794.59	32244.59	41694.59	51144.59
200	14117.78	23567.78	33017.78	42467.78	51917.78
250	14890.98	24340.98	33790.98	43240.98	52690.98
300	15664.18	25114.18	34564.18	44014.18	53464.18
350	16437.37	25887.37	35337.37	44787.37	54237.37
400	17210.57	26660.57	36110.57	45560.57	55010.57
450	17983.76	27433.76	36883.76	46333.76	55783.76

$$z_p = 12075 + 9975(x-1) + \frac{y}{23.4} \times 150$$

	1	2	3	4	5
100	12716.03	22691.03	32666.03	42641.03	52616.03
150	13036.54	23011.54	32986.54	42961.54	52936.54
200	13357.05	23332.05	33307.05	43282.05	53257.05
250	13677.56	23652.56	33627.56	43602.56	53577.56
300	13998.08	23973.08	33948.08	43923.08	53898.08
350	14318.59	24293.59	34268.59	44243.59	54218.59
400	14639.1	24614.1	34589.1	44564.1	54539.1
450	14959.62	24934.62	34909.62	44884.62	54859.62

境界に近いと総額の差は小さいが、境界から遠ざかると、大きくなる。

・差額の表を作っている生徒がいれば、そちらの方をとりあげる

・差額の表を作っていない生徒がいなければ、総額の表をとりあげる

・総額の表だと、2つの表を対応させてみなければならぬので、比較しづらいことを抑え、差額の表を想起させる

S : (総額の差を表にする)

レンタカー代とガソリン代の差額を表にすると

$$M = 150y \left(\frac{1}{9.7} - \frac{1}{23.4} \right) - 525x - 525$$

	1	2	3	4	5
100	-144.634	-669.634	-1194.63	-1719.63	-2244.63
150	308.0492	-216.951	-741.951	-1266.95	-1791.95
200	760.7322	235.7322	-289.268	-814.268	-1339.27
250	1213.415	688.4153	163.4153	-361.585	-886.585
300	1666.098	1141.098	616.0983	91.09833	-433.902
350	2118.781	1593.781	1068.781	543.7814	18.78139
400	2571.464	2046.464	1521.464	996.4644	471.4644
450	3024.148	2499.148	1974.148	1449.148	924.1475

境界に近いと総額の差は小さいが、境界から遠ざかると、大きくなる。

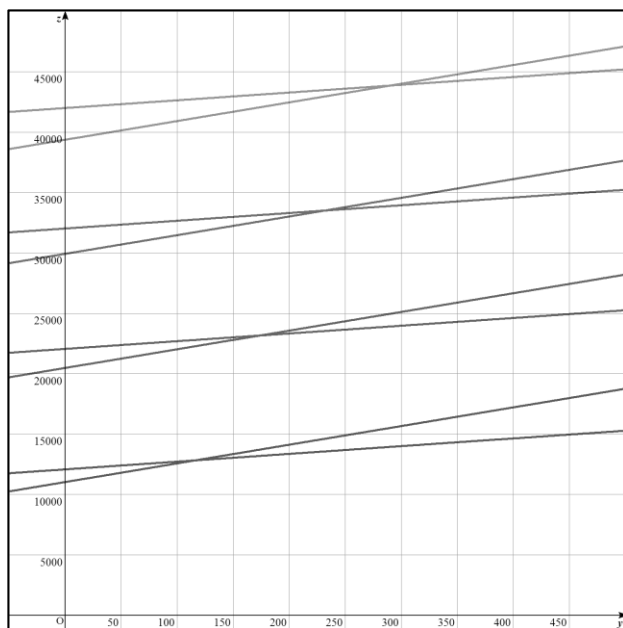
S : (x を固定してグラフに表し、総額の式をよむ)

総額が

$$z_w = 11025 + 9450(x-1) + \frac{y}{9.7} \times 150$$

$$z_p = 12075 + 9975(x-1) + \frac{y}{23.4} \times 150$$

なので、x=1, 2, 3, 4 のとき、z は y の 1 次関数になる。それをグラフにすると、



交点は総額が等しくなる点を表している。境界に近いと 2 車の総額の差は小さいが、境界から遠ざかると、差は大きくなる。

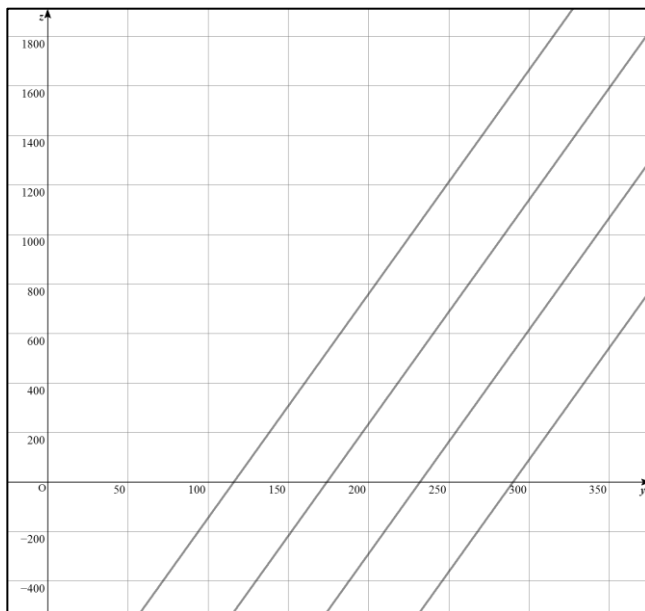
・距離が離散的であること、変化の様子がもっと視覚的に捉えられるように表現する方法はないかを問い、グラフにつなげる

・時間がなければ、グラフの考えをとりあげてしまう。

S : (x を固定して総額の差の式をよむ)

$$M = 150y \left(\frac{1}{9.7} - \frac{1}{23.4} \right) - 525x - 525$$

なので, $x=1, 2, 3, 4$ のとき, z は y の 1 次関数になる. それをグラフにすると,



y 軸との交点が $z=0$ すなわち差額が 0 になる点. 境界に近いと総額の差は小さいが, 境界から遠ざかると, 大きくなる.

T : 今日の解決を踏まえて, どのように HP に掲載するか考えてみましょう.

・総額のグラフと差額のグラフが両方でれば, 必ずどちらもとりあげ, その関係性を考えさせる.

・HP に掲載するためのワークシートを配布して, 宿題とする.

まとめ
5分

・変数が多いときは, 一つ一つ変数を制御して考えると考えやすい
・数学的結論から現実的結論を導く際に, 的確に数学的根拠を用いて, その構造を理解(今回の場合は, 総額を表す式, 差額を表す式を解釈)したうえで説明することが大切である.