

数学科公開授業 1「数学を使い、生み出す」活動の水準を高める手立て」

(事象を数学的に表して考察する)

数学科 内野浩子

国際バカロレア Middle Years Programme は、今年の5月に Next chapter として、これまでのカリキュラムと評価を一新したものを発表した。これにより、本校も来年度から Next chapter の全面実施を予定しているが、今回はその先行研究も兼ねて Next chapter を用いて授業設計とその実際を試みる。

1. 本校カリキュラムでの単元名 TGUISS 数学1 第2章 事象の見方

2. MYP における探究に関する言明 (MYP Statement of inquiry)

事象に横たわるパターンや性質、状況、関係を、数や式、グラフや表などを用いて整理し、事象を数学的に捉えて考察することは、事象に関わる計画実行や問題解決、予測、意思決定をより合理的かつ的確することができる。

3. 単元と課題設定の理由

本校のカリキュラムでは、1年生の数学の第2章に「事象の見方」という単元を設定している。これを設定している目的は、通常、学習指導要領で1年生が学習することが設定されている、比例関数や文字式、方程式を包括的に捉え、それらが現実事象を整理し捉えるためにとっても有効でスマートな手段であるという側面から見ているところから始まる。特に現実事象を数学を用いて、より良くする、問題解決する、発展させる、数学的リテラシーを育成することを目標にしている本校のカリキュラムでは、現実事象をまず設定し、それらを数学的に捉えることからスタートし、数学を活用するという流れに沿うよう、1年生はまず事象を数学的に捉えて考察する、手始め的な構成をとっている。

例えば関数に関しては、現実事象の中の2つの数量関係を表やグラフを使って表す力を養うことに重点を置き、再帰関係にある2つの離散的な数量を数式で表し、具体的な比例や関数式は2年次で学習する。また、文字式や1次方程式も事象の中の数量関係を数学的に捉えるという側面から学習をすすめることにしている。よってこの第2章は、数学的リテラシーの育成を目的とする本校のカリキュラム理念を具現化した、オリジナルの単元の一つとなっている。

1年生はこの章の前の第1章「数の見方」で、数を様々な側面から捉える、扱うということをやってきた。具体的には、素数の性質を知り、素因数分解の良さ、最大公約数や最小公倍数と素因数分解とのかかわり、ユークリッドの互除法の良さ、数を剰余類的な分類法で分けてみる見方、正負の数を用いることの良さを現実場面の探究課題で学習してきた。

そこで今回は、6月下旬までに正負の数の学習をほぼ終える予定であることを考慮して、第1章と第2章のブリッジとしての課題学習を設定した。具体的には、学習した正負の数を用いて、事象の要素を数値化して表し、条件や状況を表などを用いて整理して捉え、数学的に考察

させる場面を設定する。特に今回の課題では、事象の中に变化する数量を含まず、事象そのものを数学的に捉え、考察するという手始めの課題を設定することで、「数の見方」から「事象の見方」への学習のつながりをもたせ、学習の発展と視点の変化をスムーズに行わせたい。

また今回の課題では、表を用いて事象を捉えるという、本校オリジナルテキスト数学1の第2章でもあまり扱っていないものを扱う予定である。

4. 課題のテーマ

「こんなとき数学的にはどのように表現し、考え、決めたらいいの？」

～ゲームを数学的に表現処理し、戦略を数学的に考察する～

今回使用するゲームは、ゲーム理論の中でも基礎となる、ゼロ和ゲームでの事象の数学的処理や問題解決の方法を参考にする。その理由は、まずゼロ和ゲームで使われる数値や記号は、中学1年生でも扱える範囲であり、またゲーム理論自体が事象を数学的に捉えて問題解決と意思決定を行うための学問であるため、その見方や考え方は、事象を数学的に考察する方法例の一つとして、この単元にもふさわしく、生徒にとっても新しい見方となるだろうと考えたからである。

5. 「逆向き設計」から設定する到達目標の焦点化

MYP Next chapter では、数学の到達目標として、以下の4つを設定している。

- 到達目標 A: 知ることと理解すること
- 到達目標 B: パターンを探究すること
- 到達目標 C: コミュニケートすること
- 到達目標 D: 現実世界の文脈において数学を応用すること

今回の課題は、第1章と第2章のブリッジとなる課題であり、また第1章で学習した正負の数を活用し、身近な事象を数学的に捉え、考察することを目標とするため、本校研究テーマである「逆向き設計」に基づき、まずはMYPにおける到達目標を、Year 3の到達目標 C: コミュニケートすること、到達目標 D: 現実世界の文脈において数学を応用すること、の2つに焦点を当てる。この課題における具体的な到達目標を以下に示す。

Year 3 到達目標 C: コミュニケートすること	
到達水準	本課題での具体的到達水準
i. 適切な数学的言語を口述説明でも記述説明でも用いることができる。	・ 数学的言語を用いながら相互の利得や戦略を口述でも記述でもできる。
ii. 情報を示す際に適切な数学的表現形式を用いることができる。	・ 正負の数を用いて利得を数値化できる。
iii. 異なる数学的な表現形式間を行き来することができる。	・ 異なる立場からみた利得表の違いを理解し、読み取ることができる。
iv. 数学的推論の流れを完全にかつ理路整	・ 相互の利得から最適解を選ぶに至るゲーム戦略について数学的に推論し、他者に理路整然と説明できる。

然と伝えることができる。 v. 情報を、論理的構造を用いて整理できる。	・ゲームの利得を表に整理して、表すことができる。
--	--------------------------

Year 3 到達目標 D：現実世界の文脈において数学を応用すること	
到達水準	本課題における到達水準
i. 実際の現実場面の状況に関連する要素を特定することができる。 ii. 実用的な現実場面の状況を解決する際に適切な数学的方略を選択することができる。 iii. 解または解決策に至る数学的方略を選択し、うまく応用することができる。 iv. 解または解決策の正確さの度合いを説明することができる。 v. 解または解決策が実際の現実場面の文脈において整合性がとれているかどうか説明することができる。	・ゲームにおける利得の状況を特定することができる。 ・ゲームにおける利得が関係する状況で意思決定する際に、互いの利得を数学的な方法で分析し、解決策を選択することができる。 ・意思決定をする際に、数学的に利得を考え、最適解とは何かを求めていくことができる。 ・意思決定したその内容の根拠を説明できる。 ・見出した方策が、ゲームで得をするために最適かどうかを説明することができる。

6. 特に引き上げたい活動の水準の焦点化

身近な問題解決の活動場面で、事象を数学的に捉え、その構造を整理し明らかにする力と、それらを用いて数学的に考察する力の水準を引き上げたい。

7. 「逆向き設計」から設定する評価課題

1) 授業中の課題

- ① 授業の課題をもとに、さらに自ら事象を設定し、数学的に表現し考察できるか？
- ② ある現実事象を数学的に捉え、意思決定について考察できるか？

2) 授業後の課題

- ① 授業を振り返り、授業の課題と類似の事象を現実場面に見出し、応用できるか？

3) 学年末テスト

- ① 事象を数学的に捉えて、考察を説明できるか？

8. 対象クラス

1年4組（男子11名，女子25名 計26名）

9. 指導計画

	指導内容	時間
1	日常生活の中の身近な場面に設定されたゼロ和的ゲームを実際体験し、そのゲームに勝つ戦略について考察する。	1

2	ゲームの利得に着目し、表を使って数学的に整理し、その表を使いながら利得をもとに戦略を数学的に考察する（本時）	1
---	--	---

10. 使用する課題

『クラスのレクリエーションで、班ごとにポイント制のゲームを考え、みんなですべてのゲームを行って、ポイントラリーを楽しむことになった。しょうたさんの2班では、カードを用いた対戦ゲームを、下のように考案した。このゲームの数学的攻略とはどのようなものだろうか？』

2班 『Which is lucky?』 ゲーム

<ルール>

- ・ 2人で対戦する
- ・ 以下のような数字が書かれた4枚組のカードがA, Bの2セットある

A	7	-4	-6	2
B	5	-3	2	-8

- ・じゃんけんで勝ったほうが、4枚組のカード2セットのうちから先に一つを選び、もう一方のカードのセットを他方が取る
- ・互いに「Which is lucky?」と言うと同時に、一枚カードを選んで自分の前に出す
- ・相手と自分のカードの数の積が正だったら、Aがその数字の分だけポイントをBからもらい、逆にカードの積が負だったらBがAからその数字の分だけポイントをもらうこととする
- ・対戦は1相手につき3回行う
- ・ポイントラリー用紙に対戦記録とポイントを残して次のゲームにまわる

Good luck!

11. 到達目標へ水準を引き上げるための手立ての計画

- 1) 現実場面の文脈の中にゲームと課題を設定する。
- 2) ゲームを実際に数回体験させることで、特徴、条件、ゲームの雰囲気を理解させる。
- 3) 初めはゲームの戦略を考えることなく、単にゲームを楽しませることで、ゲームの体験の仕方に生徒間で違いがあるかどうか状況を見る場面を後で設定する。
- 4) ゲームの結果を記録させる用紙を準備し、後でゲーム戦略の考察に用いさせる。
- 5) ゲーム体験の様子を考慮しながら、ゲームの戦略を考えることに思考を方法づけるような発問をする。その際、必ずプレーしたAまたはBの立場に立って考えさせる。

- 6) ゲーム戦略を個々に考える場面と、グループでシェアする場面、クラス全体でシェアする場面を作り、個々が他者とのディスカッションの中で絶えずフィードバックをさせる。
- 7) ゲームを数学的に整理してみる方法を生徒が作成したものをいくつか取り上げ、分類、統合、分析を練り上げで行っていく。その際、利得表を5×5の表で表わすとき、Aから見た利得表、Bからみた利得表、A・Bの利得を同時に表示した利得表の3つには必ず触れるようにする。
- 8) ゲームの攻略について、できるだけ損をしないためには？という発想から攻略を考える生徒がいないか、チェックしておく。もし出てこない場合には、指導者からそちらに思考を向けさせるような発問を行う。
- 9) 利得表をどのように読み取ったら、ゲーム攻略の最適解が得られるのか、
- 10) A、Bのそれぞれの立場から利得を考えたとき差があるかどうかという視点から、このゲームを考える生徒がいないか、チェックしておく。もしない場合には、指導者からそちらに思考を向けさせるような発問を行う。

12. 評価規準

規準 C: コミュニケートすること

	Level descriptor	Indicator
0	以下のいずれにも達していない。	
1-2	<ul style="list-style-type: none"> i. 限られた数学的言語を用いることができる。 ii. 情報を示す際に限られた形式での数学的表現を用いることができる iii. 推論の流れを伝えることができるが、解釈するのが難しい。 	<ul style="list-style-type: none"> ・限られた数学的言語を用いながら相互の利得や戦略を表すことができる。 ・ゲームの利得の一部を表現することができる。 ・ゲームの戦略をどのように考えたのか説明はするが、解釈するのが難しい。
3-4	<ul style="list-style-type: none"> i. いくつかの適切な数学的言語を用いることができる。 ii. 情報を示す際に異なる数学的な表現形式を適切に用いることができる iii. 推論の流れ理解できるように伝えることができるが、必ずしも明確であるとは限らない。 iv. 論理的構造を用いて、情報を的確に整理することができる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・いくつかの適切な数学的言語を用いながら相互の利得や戦略を表すことができる。 ・ゲームの利得を数値化できる。 ・ゲームの戦略をどのように考えたのか、理解できるように説明できるが、明確であるとは限らない。 ・相互の利得から最適解を選ぶに至るゲーム戦略について数学的に推論することはできる。
5-6	<ul style="list-style-type: none"> i. 適切な数学的言語を大抵は用いることができる。 ii. 情報を示す際に異なる数学的な表現形式を大抵は正しく用いることができる iii. 異なる数学的な表現形式間を行き来することができる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・適切な数学的言語を用いながらおおむね相互の利得や戦略を口述でも記述でもできる。 ・正負の数を用いて利得を正しく数値化でき、A、Bの利得を合わせて表現したりすることも試みる。 ・異なる立場からみた利得表の違いを理解し、

	<p>iv. 推論のながれを明確に伝えることができるが、必ずしも筋が通っている、もしくは完全であるとは限らない。</p> <p>v. 論理的構造を用いて、おおむね整理された取組みを示すことができる。</p>	<p>読み取ることができる。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ゲームの戦略をどのように考えたのか、明確に説明できるが、筋が通っているとは限らない。 ・相互の利得から最適解を選ぶに至るゲーム戦略についておおむね整理して数学的に推論し、結論づけられる。
7-8	<p>i. 適切な数学的言語を首尾一貫して用いることができる。</p> <p>ii. 情報を一貫して示す際に異なる数学的な表現形式を正しく用いることができる。</p> <p>iii. 異なる数学的な表現形式間を効果的に行き来することができる。</p> <p>iv. 推論のながれを完全にかつ理路整然と伝えることができる。</p> <p>v. 論理的構造を用いて、矛盾なく整理された取組みを示すことができる。</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・適切な数学的言語を用いながら常に相互の利得や戦略を口述でも記述でもできる。 ・正負の数を用いて一貫して利得を正しく数値化でき、A、Bの利得を合わせて表現したりできる。 ・異なる立場からみた利得表の違いを理解し、効果的に読み取ることができる。 ・ゲームの戦略をどのように考えたのか、完全に理路整然と説明できる。 ・相互の利得から最適解を選ぶに至るゲーム戦略について矛盾なく整理して数学的に推論し、結論づけられる。

規準 D: 現実世界の文脈において数学を応用すること

	Level descriptor	Indicator
0	以下のいずれにも達していない。	
1-2	<p>i. 真正の現実場面の状況においていくつかの要素を特定することができる。</p> <p>ii. 少しうまくいくぐらいではあるが、真正の現実場面の状況で、ある解を見出す数学的方略を適用することができる。</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・ゲームにおけるいくつかの利得の条件を特定することができる。 ・限られた範囲であるが、とにかく数学的に利得を考え、戦略をみつけようとすることができる。
3-4	<p>i. 真正の現実場面の状況において関連する要素を特定することができる。</p> <p>ii. 真正の現実場面の状況をモデル化するために、いくつかの適切な数学的方略を限られた範囲で選択することができる。</p> <p>iii. 真正の現実場面での状況で、ある解に到達する数学的方略を適用することができる。</p> <p>iv. 真正の現実場面の文脈において、解の整合性がとれているか述べることができる。</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・ゲームにおける利得に関連する条件を特定することができる。 ・ゲームにおける利得が関係する状況で意思決定する際に、限られた範囲で互いの利得をいくつかの大体良い数学的な方法で分析し、解決策を選択することができる。 ・数学的に利得を考え、戦略を見い出すことができる。 ・見出した戦略が、真正のゲームで得をするために最適かどうかを述べることができる。
5-6	i. 真正の現実場面の状況において関連する	・ゲームにおける利得に関連する条件を特定す

	<p>要素を特定することができる。</p> <p>ii. 真正の現実場面の状況をモデル化するために、おおむね適切な数学的方略を選択することができる。</p> <p>iii. 真正の現実場面の状況で、有効な解に到達する数学的方略を選択し適用することができる。</p> <p>iv. 解の正確さの度合いを述べることができる。</p> <p>v. 真正の現実場面の文脈において、解の整合性がとれているか議論することができる。</p>	<p>ることができる。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ゲームにおける利得が関係する状況で意思決定する際に、互いの利得をおおむね良い数学的な方法で分析し、解決策を選択することができる。 ・数学的に利得を考え、有効な戦略とは何かを求めていくことができる。 ・意思決定したその内容の根拠を説明できる。 ・見出した方略が、ゲームで得をするために最適かどうかを議論することができる。
7-8	<p>i. 真正の現実場面の状況において関連する要素を特定することができる。</p> <p>ii. 真正の現実場面の状況をモデル化するために、妥当な数学的方略を選択することができる。</p> <p>iii. 真正の現実場面の状況で、正しい解に到達する数学的方略を選択し適用することができる。</p> <p>iv. 解の正確さの度合いを説明することができる。</p> <p>v. 真正の現実場面の文脈において、解の整合性がとれているか説明できる。</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・ゲームにおける利得に関連する条件を特定することができる。 ・ゲームにおける利得が関係する状況で意思決定する際に、互いの利得を妥当な数学的な方法で分析し、解決策を選択することができる。 ・数学的に利得を考え、ミニマックス戦略的な見方で戦略を求めていくことができる。 ・意思決定したその内容の根拠を説明できる。 ・見出した戦略が、ゲームで得をするために最適かどうかを説明することができる。

13. 本時の展開

学 習 活 動	T	指導上の留意点	その他
<p>《学習の振り返り》</p> <p>1. 前時の活動を振り返る。</p>	5	<p>どのようなゲームの戦略案がでていたか整理しながら提示していく。</p> <p>A, B それぞれのプレイヤーの獲得ポイント数を累積したものを提示する。</p>	
<p>[手立て]</p> <p>① 戦略が心理的なものに依存している場合、もっと数学的に戦略が立てられないか指摘して、全体を整理して捉えてみることの必要性が生徒の中のでてくるようにする。</p> <p>② 生徒の中に A, B のカードに有利、不利があるのかどうかを考える視点を持たせる。</p>			
<p>《学習の焦点化》</p> <p>2. 本時の学習活動を理解する。</p>	2	ワークシートを配布する。	

ゲームのポイント獲得をどのように整理したら、ゲーム自体を捉えやすくなるだろうか？
整理する方法を考えよう。

3. ゲームのポイント獲得全体を各自で整理する方法を考え、書き表してみる。

5

どのような表現方法ができてきているか把握する。

4. グループで自分の表し方をシェアし互いにフィードバックする。

7

グループでシェアするよう促す。
タイプ別に表現方法をピックアップして、それぞれ黒板に書かせる。

[手立て]

③A, Bの両方の立場を考えて整理している生徒をピックアップし、板書させる。また、A, Bの立場それぞれを考えて整理することを悩んでいる生徒、気づいていない生徒に対して考えるポイントを指摘するか、生徒の中から声を拾って紹介する。

5. 全体でいろいろな表し方をシェアし、どの方法がわかりやすいか検討する。

5

板書した生徒に、どのように考え整理したか補足説明させる。

[手立て]

④整理したものが互いにとっての利得を表していることを指摘し、損得をはっきり意識させる。

6. 利得表をもとに、各自もう一度戦略をA, Bそれぞれの立場で考えてみる。

3

利得表を利用して、もう一度A, Bそれぞれの立場で、どのような戦略をとったらよいか考えよう

7. グループでシェアする。

5

[手立て]

⑤各グループで自分の戦略のポイントをはっきりと述べることを注意しておく。また、できるだけ損をしないという価値観から戦略を考えている生徒がいるかチェックする。

8. 全体でシェアする。	18	各グループで話し合ったことを発表してもらおう。	
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>[手立て]</p> <p>⑥できるだけ損をしないという考え方が出てこない場合、それぞれの戦略のリスクについて考えさせる。</p> </div>			
9. 次時の予告	1		

14. 参考文献

- 1) IB0 : MYP: From principles into practice, (2014)
- 2) IB0 : Mathematics guide, (2014)
- 3) 小島 寛之, 松原 望 : 戦略とゲームの理論 (東京図書, 2011)
- 4) 松原 望 : 社会を読み解く数学 (ペレ出版, 2009)
- 5) トニー・クリリー : 知ってる? 人生に必要な数学 (近代科学社, 2009)
- 6) 東京学芸大学附属大泉中学校数学科・附属高校大泉校舎数学科 : 東京学芸大学附属国際中等教育学校 (仮称) 数学科カリキュラム案, 東京学芸大学附属大泉中学校研究集録47集