平成 26 年度東京学芸大学附属高校情報教育公開研究大会　学習指導案

作図ツールを用いて方程式の見方を養う授業

日　　時　　2014 年 10 月 1 日（水）５限（13：10〜14：00）

授業担当者　東京学芸大学附属高校 数学科教諭　花園 隼人

対　　象　　２年 C 組（44 名）

教　　室　　２年 C 組教室

1.　数学科授業における作図ツールの利用

数学教育における ICT 利用への着目は，国際的には大きなトレンドを生じさせており，数々の実践報告の積み上げがなされているだけでなく，国際的な数学教育学研究の動向においても主要なテーマの一つとされている（Clements et al. (Eds.), 2013）．しかし，杉山（2007）が「わが国では、算数・数学の指導に利用すると考えられがち」（p. .228）と指摘し，また飯島（2010）が「本学会（日本数学教育学会のこと）での取り組みなどをみると，必ずしも主要なテーマになっていないのが現状ではないだろうか」（p. 287，括弧内は引用者）と述べるように，国内においては実践面と研究面の双方で積み上げが不十分であることが懸念されている．本実践ではこのような課題を考慮し，ICT を教師による説明に利用するだけではなく，生徒が数学を考察する道具として利用する実践を念頭に置いている．

数学科授業で用いられる ICT はグラフ電卓や表計算ソフトなど様々あるが，本実践では作図ツールと呼ばれるソフトウェアを利用する．作図ツールとは「一般的に数学的な意味での作図・測定・変形等を行って，図形に関する数学的探究を支援するソフト」（飯島, 2010, p.284）とされており，GC やカブリ，シンデレラなど複数のソフトウェアが知られている．作図ツールを授業実践で利用する効果としては，生徒が数学的対象を直接的に操作できることや，計算の大変さを省くことによって計算結果が「きれいな」数値にならないような対象が扱えること，時間的余裕が生じることで，得られた結果を評価しもとの問題を変更したり発展したりするインターラクティブな数学的探究が可能になることなどが挙げられている（飯島, 2000, pp. 81-82）．

今回の実践で用いる作図ツールの GeoGebra は単なる作図ツールではなく，座標平面上で図形と方程式を関連させて考察することや，関数のグラフを作成すること，計算機によって微分積分などの計算を施すことまでできる，総合的な数学研究のソフトウェアである．特徴的な性能としては，作図した図形を平行移動すると図形の方程式も対応して自動的に変更される点が挙げられ，平面幾何の知識と座標幾何の知識を関連させながらの考察が容易にできる点が挙げられる．また, GeoGebra はフリーソフトウェアであり, Windows と Mac OS の両方の環境下で動作する他, iPad などのタブレット機器でも利用できる．さらに，インターネットに接続できる環境下であれば Google ドライブのアプリケーションとして利用することもできるため，デバイスにインストールする必要がない上に，作成したファイルの共有もクラウド上で容易にできる．

2.　研究課題

本授業実践で扱う題材は，定点を通る　直線 $m(a_1x+b_1y+c_1)+n(a_2x+b_2y+c_2)=0$ であり，授業実践の目標はこの方程式で表される図形の考察を通して方程式の見方を養うことである．この目標を達成するためには，上記の方程式によって定点を通る直線が表されることを理解することが不可欠であるが，そのためには演繹的な理解に先立って，方程式における $a_1x+b_1y+c_1$ および $a_2x+b_2y+c_2$ の部分に様々な２元１次式を代入して変化を観察する操作的活動が有効であると考える．この操作的活動を GeoGebra を利用して行わせることで，紙とペンのみの観察よりも多くの事例に基づいた考察を行わせることや，抽象的な思考や計算を苦手とする生徒にも積極的な参加を促すことが可能なのではないかという仮説を立てた．この可能性の有無を，授業実践を通して見極めたい．

3.　本授業実践の目標

授業実践の目標は，定点を通る直線の考察を通して，図形を表す方程式を「演算過程」と見なす見方を養うことである．本授業が位置づく単元「図形と方程式」における学習を通して，生徒はこれまで，集合を決める条件としての方程式の見方を少しずつ養ってきた．その過程で条件を方程式として表す学習は行ってきたものの，与えられた方程式によって表された条件の意味を考える学習は十分には行ってきていない．自ら立式した方程式や他者から与えられた方程式を多面的に捉えることは，方程式が表す図形も多面的にとらえることにつながり，方程式と図形の双方の理解の深化が期待できる．この目標を達成するため，授業実践では次のような教師による手だてをとる．

まず第一に，作図ツールを利用した考察を行わせる．この手だてのねらいは上述の研究課題の項で述べた．理論的な根拠は飯島（2000）である．PC は生徒２名に１台用意し，操作方法を話し合いながら取り組めるようにする。

続いて，方程式が定点を通ることが観察を通して実感できたら，その定点を求める課題を設ける．この課題への取り組みによって，直線が通る定点が２直線の交点であることを明確にさせる．さらにここで交点を求めるために解く連立方程式を，加減法を連想させる係数に設定することや，加減法の計算過程を板書として明示することで，方程式 $m(a_1x+b_1y+c_1)+n(a_2x+b_2y+c_2)=0$ を「連立方程式の加減法」と見なすための素地としたい．

なお, まとめとして方程式 $m(a_1x+b_1y+c_1)+n(a_2x+b_2y+c_2)=0$ で表される直線が, 2 直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$ の交点を通る理由を説明する中で，m，n についての恒等式という見方も確認する．

以下に観点別の評価規準を示す.

関心・意欲・態度	数学的な思考・表現	技能・表現	知識・理解
・ 方程式が表す条件の意味を多様に捉えようとする。 ・ 方程式（条件）を様々に変えて規則を探ろうとする。	・ 事象の背景を集合でとらえる。 ・ 方程式が表す条件を多様に捉える。	・ $m(a_1x+b_1y+c_1)+n(a_2x+b_2y+c_2)=0$ の形式で表される直線を, 作図ツールを用いて表現できる。	・ $m(a_1x+b_1y+c_1)+n(a_2x+b_2y+c_2)=0$ で表される図形が２直線の共有点を通る直線である理由を理解している。

4.　教材

方程式 $m(a_1x+b_1y+c_1)+n(a_2x+b_2y+c_2)=0 \cdots(*)$ で表される図形が，２直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$ が共有点をもつ場合にはその共有点を通る直線になることは, 連立方程式 $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ の解が $x=x_0$，$y=y_0$ であるとすると，$a_1x_0+b_1y_0+c_1=0$，$a_2x_0+b_2y_0+c_2=0$ であることから，任意の m，n に対して $m(a_1x_0+b_1y_0+c_1)+n(a_2x_0+b_2y_0+c_2)=0$ が成り立つことで説明できる。このように，方程式 $(*)$ を m，n の恒等式として見る見方を理解することで，括弧の中身が x，y の１次式ではない場合についても，同様に考えることができる。また，方程式 $(*)$ が連立方程式 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$ の解を加減法によって求めている「演算過程」という見方をすることによって，恒等式という考え方に慣れない生徒にとっても，中学校の既習事項に基づいて，同様な見方を理解することができると考える。

この見方の論理は生徒にとっても難しくはないと想定できるが，数学を得意とする生徒以外は対応する図形をイメージできず，論理は納得できても意味は理解できないと考えられる。このイメージをするためには，具体的に様々な多項式を括弧の中に代入することが有効であると考えるが，数学が得意でない生徒にとってはその作業すら流暢に行うことは困難であり，イメージに至り難い。そこで本実践においてはこの作業を作図ツールで簡略化することによって，多くの事例に基づいて考えたり自分で代入した多項式（方程式）と対応する図形の関係を自分自身で反省したりする機会となることを期待する。また，このような作図ツールを用いた考察方法自体も学習内容として位置づける。

5. 授業の展開

分	指導内容と発問	生徒の学習活動
0	〈PC の配布〉	
9	（学習課題への導入）〈１問１答形式〉 Q.$2(x-2)=3(y+2)$ はどんな図形を表すか？その理由は？ T：コンピューターで表示して下さい。 Q.$4(x-2)=-5(y+2)$ では？ Q.$m(x-2)=n(y+2)$ では？ ［GeoGebra のスライダーの使い方を確認］ Q.$m(x+3)=n(2y-1)$ は？	〈全体〉 S：直線／点 $(2,-2)$ を通る直線／傾きは $\frac{2}{3}$ S：$(2,-2)$ を満たす１次方程式だから／直線 $2x=3y$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -2 だけ平行移動した直線だから S：同じ理由で点 $(2,-2)$ を通る傾き $-\frac{4}{5}$ の直線 S：同じ理由で点 $(2,-2)$ を通る直線／傾きは m や n 次第 S：同様に考えて，点 $\left(-3,\frac{1}{2}\right)$ を通る直線
1	（学習課題の提示） Q.次の方程式で表される図形はどんな図形か．コンピュータで表示して考えよう．理由も考えよう． （1）$m(2x+3y+1)=n(x-3y+2)$　（2）$m(2x-3y-4)+n\left(-x+y+\frac{5}{3}\right)=0$	
15	（自力解決⇒机間指導）〈ペア学習〉 ・ コンピュータの使い方がわからない ・ 直線になること以外の予想が立たない⇒他の多項式の場合も試させる ・ 定点を通る直線であることの予想が立つが，理由がわからない⇒定点の座標を求めさせる ・ 恒等式の見方で説明できる／連立方程式の交点を通る直線になることを，２直線もコンピュータで表示して説明できる⇒括弧の中の多項式を変えて考えることを促す（平行な直線や直線以外の図形も自由に考えさせる）	
15	（共有と練り上げ） ・ 結果の共有（生徒による説明） ・ 任意の m，n に対して定点を通ることから，交点の座標を求めることは m, n についての恒等式となるための条件を求めることと同じであることを伝える ・ 生徒の板書を振り返り，もとの方程式が連立方程式の加減法の形式をしていることを意識化させる ・ 同じ見方で (1) $m(a_1x+b_1y+c_1)+n(a_2x+b_2y+c_2)=0$ (2) $mx+ny=0$ についても解釈，説明させる	（全体）〈板書やスクリーンでの生徒による説明〉 （1）連立方程式 $2x+3y+1=0$，$x-3y+2=0$ の解は，$(2x+3y+1)+(x-3y+2)=0$ より $x=-1, y=\frac{1}{3}$ であるが，この解は方程式 $m(2x+3y+1)=n(x-3y+2)$ の解でもあるので，この図形は点 $\left(-1,\frac{1}{3}\right)$ を通り，またこの方程式は１次方程式なので，図形は直線になる． （2）連立方程式 $2x-3y-4=0$，$-x+y+\frac{5}{3}=0$ の解は，$(2x-3y-4)+3\left(-x+y+\frac{5}{3}\right)=0$ より $x=1, y=-\frac{2}{3}$ であるが，この解は方程式 $m(2x-3y-4)+n\left(-x+y+\frac{5}{3}\right)=0$ の解でもあるので，この図形は点 $\left(1,-\frac{2}{3}\right)$ を通り，またこの方程式は１次方程式なので，図形は直線になる． (1) 連立方程式 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$ の交点を通る直線 (2) 連立方程式 $x=0$，$y=0$ の交点を通る直線

10	（まとめと発展と評価課題の実施） ・　方程式 $m(a_1x+b_1y+c_1)+n(a_2x+b_2y+c_2)=0$ は２直線 $a_1x+b_1y+c_1=0, a_2x+b_2y+c_2=0$ の交点を通る直線を表している． ・　方程式 $m(a_1x+b_1y+c_1)+n(a_2x+b_2y+c_2)=0$ は連立方程式 $a_1x+b_1y+c_1=0, a_2x+b_2y+c_2=0$ の加減法を表しているとも見られる． ・　２直線が平行だと共有点をもたないが直線は存在する（生徒発表）・・・今後の課題 ・　括弧の中の方程式を変えると円なども考えられる（生徒発表）・・・今後の課題 （評価課題の実施）５分

6. 評価課題

(1) 課題

方程式 $m(x^2-6x+y^2+5)+n(x^2+y^2-4)=0$ はどんな図形を表すか。その理由も説明せよ。

(2) 評価規準

A	恒等式の見方や「演算過程」の見方で正しい答えを説明できる。
B	具体的な m，n の値に対応する図形を用いて説明できる。
C	説明はできないが条件を満たす図形は答えられる。
D	条件を満たす図形がわからない。

7. 参考文献

飯島康之.(2000).「算数・数学教育におけるテクノロジー」.日本須学教育学会誌 82(7・8). pp.81-82.

飯島康之.(2010).「§11 コンピュータ活用」. 日本数学教育学会(編).『数学教育学研究ハンドブック』.東洋館出版社. pp.282-291.

M. A. (Ken) Clements et al. (Eds.).(2013) Third international handbook of mathematics education (pp. 303-325). New York: Springer.

杉山吉茂.(2007).「中学校数学教育の新しいカリキュラム」.小寺隆幸, 清水美憲(編著).『未来への学力と日本の教育⑦ 世界をひらく数学的リテラシー』. 明石書店. pp.224-241.

矢野健太郎(2010)『基礎数学選書２　平面解析幾何学』.裳華房.

GeoGebra 日本　https://sites.google.com/site/geogebrajp/