

## 図形の性質の拡張

東京学芸大学附属小金井中学校  
3 年 D 組(男子 20 名, 女子 20 名)  
授業者 川村栄之

### 1 単元名 相似な図形

### 2 単元の目標

(数学への関心・意欲・態度)

- 相似な図形の性質や平行線と線分の比の性質を具体的な場面で活用することを通して、数学の実用性やよさについて理解を深め、関心をもつ。

(数学的な見方や考え方)

- 既習事項を使いながら、相似な図形に関する性質をつくっていくことを通して、数学的な推論のしかたについて理解を深める。

(数学的な技能)

- 相似な図形をかいたり、相似条件、中点連結定理等を用いて証明をかいたりすることができる。

(数量、図形などについての知識・理解)

- 拡大図と縮図の性質、相似な図形の性質、三角形の相似条件、平行線と線分の比、中点連結定理がわかる。

### 3 単元設定の理由

第 3 学年の相似な図形の学習では、図形の性質を見つけたり、それを論証したりすることを通して数学的な考え方を育てたい。例えば、ある図形について成り立つ性質を帰納または類推により見つけ、それを、相似条件などを用いて演繹的に証明し確かめるといのように、数学的に推論することについての理解を深めたい。また、本単元はこの他にも数学的な考え方を育てていく題材が豊富にある。その一つとして、筆者は拡張の考えを育てていきたい。

図形の性質の拡張について、清宮俊雄(1988)では「自然な拡張」という呼び方で、次のような拡張の方法を述べている。「拡張の型の決まっている図形の場合、その型にしたがって仮定の条件をゆるめて、結論がそのままなりたつか、あるいはそれに多少の修正をほどこしたものがなりたつかなどを研究すると、もとの定理の 1 つの拡張を得るであろう。」(p.108)

合同と相似は特殊・一般の関係にある。この関係を拡張の型として利用していこうという研究は中川裕之(2005)などで詳しくされている。この研究の考え方をもとに、図形の性質の証明の場面で合同と相似を対比させながら単元を通して指導をしていく。これによって、生徒が図形の性質を証明した際に、根拠として合同を使ったならば、この図形の性質が相似を使うような性質に拡張できないかと、自ら図形の性質をみつけていけるようにしていきたい。

### 4 研究主題との関わり

#### 4.1 思考力・判断力・表現力等

研究主題「思考力・判断力・表現力等を育成するための指導とその評価～学び合いにおけるキーパーソンを見出し、活かす指導法の追究～」をうけて、数学科では「生徒の課題意識を高め思考をうながす数学科の指導」について研究してきた。

先に述べたように、数学科では「思考力・判断力・表現力等」の関係について、これらをひとまとめのものととらえ、その中心は思考をすることであると考えた。この思考の出発点として課題意識を高め

ておくことが必要であることから、数学科ではどのようにして生徒の課題意識を高めるかを研究している。このように、「思考力・判断力・表現力等」の関係をとらえた上で、「思考力・判断力・表現力等」を「数学を使い、創る過程において必要となる力」とした。また、それが育成されたことの評価としては、授業を通して獲得した「新たな見方」や「新たな概念」、「新たな考え方」をもとに、問を振り返ることができるようになっていくかどうかということを観点とする。

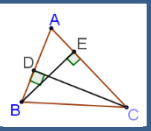
本単元では、単元を通して合同と相似の特殊・一般の関係をもとに、図形の性質や証明を対比させながら学習を進めていく。この学習を通して、生徒が「合同」を「相似」に置き換えて問題を拡張できないかという視点で、問題や証明を振り返ることができるようになっていけば「数学を使い、創る過程において必要となる力」を身に付けられたと考える。

#### 4.2 「数学を使い、創る過程において必要となる力」を育成するための指導

上述の力を生徒が身に付けられるようにするために、本単元を通して、合同と相似を対比させながら指導を進めていく。例えば、相似を利用した証明の練習問題として教科書では、次の問題が掲載されている。

[問題]右の図の△ABCで、点B、Cから辺AC、ABにそれぞれ垂線CD、BEをひきます。

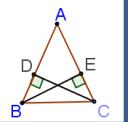
このとき△ABEの△ACDとなることを証明しなさい。



この性質を扱う際も、先に次の問題を生徒に与え、合同を相似に変えるためには問題の仮定をどのように変えればよいかを考える活動とする。

[問題]右の図の二等辺三角形ABCで点B、Cから辺AC、ABにそれぞれ垂線BE、CDをひきます。

このとき△ABE≡△ACDとなることを証明しなさい。



この問題と似た問題で仮定の点D、Eの位置が中点で結論は $BE=CD$ とした性質を、第2学年の合同を使った証明の学習ですでに証明している。しかもその時に仮定の条件を変えて問題を拡張することを行っている。その時に△ABCを一般三角形に一般化した生徒もいた。このときには、相似の知識が必要となるため授業では保留にした。この時の経験とこの問題をつなげることで、いきなり上の問題を解くよりも生徒の課題意識は高まるものと考えられる。

このように、常に合同と相似の特殊・一般の関係に基づいて問題や証明を見直す活動をしていくことで、4.1で述べた力をつけていけるのではないかと考える。

#### 4.3 学び合いにおけるキーパーソンについて

4.2で述べたような学習活動において、たとえば、証明を振り返り合同を使っているところを、相似に変えられるのではないかと自ら考え始める生徒がいれば、その考えをもとに図形の性質を拡張することができる。つまり、数学を使い、創る活動につながる。その意味で、そのような生徒がこの指導におけるキーパーソンとなるのではないかと考えている。

また、扱う性質の結論が長さに関するもの場合は、合同を相似に変えると、結論を「長さが等しい」から、「比が等しい」に変える必要が出てくる。このとき、結論の修正が必要であることに気づき、どのように修正したらよいかという議論のきっかけを作れる生徒も、キーパーソンといえるであろう。

本単元では、このようなキーパーソンを見出し、活かしていけるよう、教材研究をおこない、できるだけ多くのキーパーソンの姿を想定して授業に臨むようにしたい。

### 5 単元の指導計画(全20時間)

- 第1次 相似な図形の意味..... 2時間
- ・ 拡大図と縮図、図形の拡大と縮小、相似の中心(1時間)
  - ・ 相似な図形の意味、性質、相似比(1時間)
- 第2次 三角形の相似条件..... 6時間

- ・ 三角形の相似条件とその意味(1 時間)
- ・ 相似な三角形を見つけること(0.5 時間)
- ・ 三角形の相似条件を利用した証明(本時 3 時間目 / 4.5 時間)

第 3 次 平行線と比 ..... 6 時間

- ・ 三角形と比(4 時間)
- ・ 平行線と比, 中点連結定理(2 時間)

第 4 次 面積比・体積比や相似な図形の性質の利用 ..... 6 時間

- ・ 相似な図形の面積比と体積比の関係(2 時間)
- ・ 相似な図形の性質を活用した問題解決(4 時間)

## 6 本時の指導

### 6.1 本時の目標

- ・ 証明を見直して, その根拠に合同を用いている場合に, 相似に置き換えられないか考えるという考え方を理解する。

### 6.2 本時の教材について

#### 6.2.1 本時で扱う題材について

本時で扱う題材は以下の図形の性質である。

[性質 1] 「 $\triangle ABC$  において半直線  $BC$  上に点  $D$  をとり,  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$  となるように点  $E$  をとる。このとき, 点  $D$  を  $BC$  上で動かしていくと点  $E$  の軌跡は直線になる。」

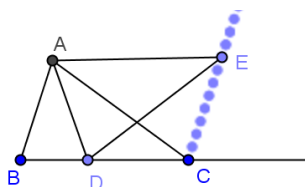


図 1

この性質の証明は, 例えば以下の方法で証明できる。1 つは,  $\triangle ABD \sim \triangle ACE$  から  $\angle ACE$  が常に  $\angle B$  と等しくなることを示すものである。もう 1 つは,  $\angle ACB = \angle AED$  から 4 点  $A, E, C, D$  の共円を示し,  $\angle ADE = \angle ACE$  から  $\angle ACE$  が不変であることを示すものである。ただし, 後者の証明は点  $D$  が線分  $BC$  の外部に出ると円周角の定理を用いた部分が円に内接する四角形の性質や, 接弦定理に変わる。したがって, 後者の証明を扱うのは, 円周角の定理とその他の 2 つの定理の関係について考察することを目的とするのならよいであろう。しかし, 本実践の目的は三角形の合同と相似の関係について理解し使えるようになっていくことであるので, 後者の証明をする生徒もいるとは思われるが, 証明の根拠に用いる定理の変化については深入りしないこととする。

#### 6.2.2 教科書で扱われている問題との関連

教科書を見るとこの性質に関連のあるものとして, 次のような問題が扱われている。(藤井斉亮・俣野博ほか, 2012, p.146)

- 3 右の図のように,  $\triangle ABC$  の辺  $BC$  上に点  $D$  をとり,  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$  となるように点  $E$  をとります。点  $E$  と  $C$  を結ぶとき  $\triangle ABD \sim \triangle ACE$  となることを証明しなさい。

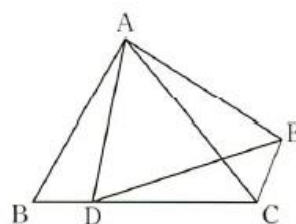


図 2

この他にも 1 社, 点  $D$  が  $BC$  上にない, より一般的な場合を扱っているものもあった。

この問題で $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ が証明できれば、 $\angle ACE = \angle ABD$ (一定)なので、点Eは一直線上を動くことが分かる。

### 6.2.3 本時の指導について

本時の題材は、 $\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ が相似であるように点Eをとっていくが、これらの三角形をより特殊な形である正三角形にして、導入することにした。すなわち、次の性質2から導入する。

[性質2]「正三角形ABCの辺BCをCの方向に延長する。半直線BC上に任意の点Dをとり、正三角形ADEをかく。このとき点Eの軌跡は直線になる。」

この題材を正三角形から始める理由は、作図のしやすさと、証明に合同を使えることである。

作図がしやすいので、できるだけ多くの正三角形を作図することで、生徒は点Eが一直線上に並ぶことを発見できる。それと同時に、このことを証明しようとしたときに必要になってくる性質も一緒に発見することができる。例えば、点Eの軌跡の直線(CE)のBCに対する傾き具合が $60^\circ$ であることやそれとともに、 $\angle ACE = 60^\circ$ でもあることなどである。

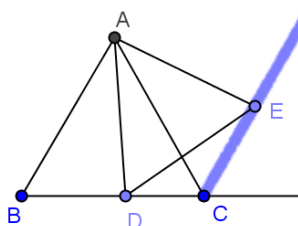


図 3

そこで、まず $\angle ACE = 60^\circ$ であることの証明から行い、それによって点Eが一直線上にあることの証明にもなっていることに気付かせていきたい。

この時の証明として、 $\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ が合同であることを利用する生徒も多いと思われる。したがって、この性質を拡張する過程で、この証明に使った $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ という関係がどう変わっていくかを考察する。そして、ここでも性質の拡張によって、根拠として用いた合同が相似に一般化されていることに気付かせてたい。

では、この性質を実際に生徒に拡張させたとなると、おそらくこれまでの経験から生徒は正三角形という仮定の条件に正三角形とあるので、正多角形にしたり、二等辺三角形や一般三角形にしたりすると考えられる。それは、これまでも二等辺三角形を一般三角形にするなどをしてきているからである。したがって、まず正三角形という条件から単純に正多角形や二等辺三角形へと条件を一般化する。そして、二等辺三角形からさらに、一般三角形へと拡張していく。ただし、この過程で、証明がどのように変化していくのかを対比しながら拡張していく。おそらく、二等辺三角形にするという生徒の中には、仮定の条件を一部しか使っていないことに気付いている生徒もいると思われる。したがって、二等辺三角形にしたところで、なぜ二等辺三角形にしようと考えたかを問う。

次に、一般三角形に拡張したところで、証明はどのように変化するかを問う。この問いによって、合同を根拠としていたところが、相似に置き換わっていることに気付かせ、単に仮定だけを見て拡張していくのではなく、証明を振り返ることで、ある程度根拠をもって拡張していくこともできそうだという感覚を得させたい。

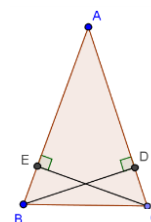
### 6.2.4 本時までの指導について

<2次1時間目>

1時間目の授業では初めに以下の性質を証明した。

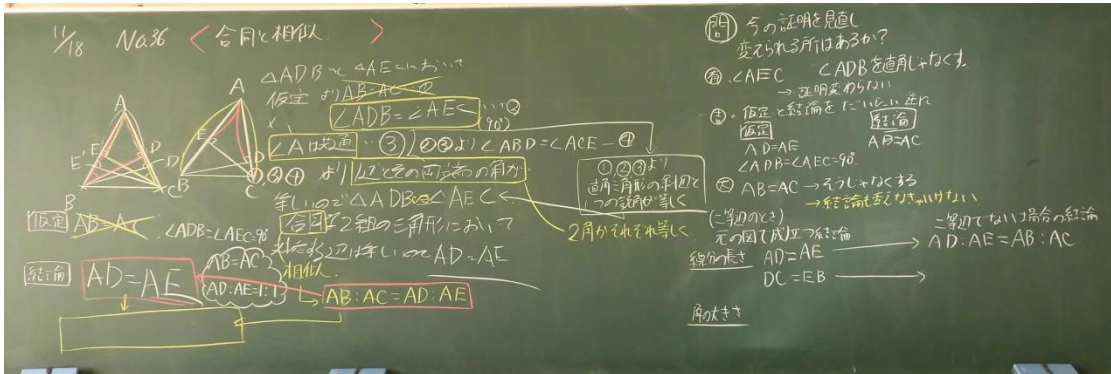
「 $AB = AC$ である二等辺三角形ABCの点B, Cから対辺に垂線BD, CEをおろす。このとき、 $AD = AE$ を証明しなさい。」

これに対して、多くの生徒は $\triangle ADB \cong \triangle AEC$ を示し、その対応する辺が等しいことか



ら結論を導いた。

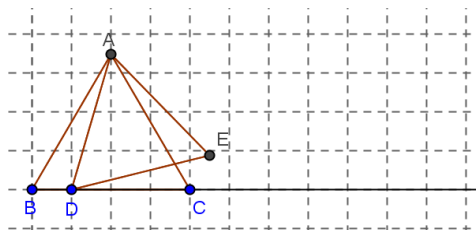
この後、「証明を見直して、変えられそうなところはあるか?」と発問した。この発問に対して、すぐにあった反応は、 $\angle ADB$  と  $\angle AEC$  を直角ではない角度にすることである。これによって、証明は変わらないことを確認し、他の意見を聞いた。この他には、仮定の一部と結論を入れ替えることや、二等辺ではなくすることが挙げられた。これを受けて、 $AB=AC$  という仮定を消し、その結果として、証明の  $AB=AC$  も消し、これによって、証明や結論はどのように変わるかを生徒に聞いた。すると、先に用いていた「1 辺とその両端の角がそれぞれ等しい」という合同条件が使えなくなり、「2 組の角がそれぞれ等しい」という相似条件に置き換わり、 $\triangle ABD \equiv \triangle ACE$  が  $\triangle ABD \sim \triangle ACE$  となることや、その結果、結論は  $AB:AC=AD:AE$  に修正しなくてはならないということになった。



<2 次 2 時間目>

2 時間目と計画していた内容であるが、実際には 2 時間かかっている。はじめに、次の作業を行った。

「正三角形  $ABC$  の辺  $BC$  を点  $C$  の方向に延長する。半直線  $BC$  上に点  $D_1, D_2, D_3, \dots$  と点をとる。 $AD_1$  を一辺とする正三角形  $AD_1E_1$  をつくる。以下同様に、 $\triangle AD_2E_2, \triangle AD_3E_3, \dots$  と正三角形を作っていく。」



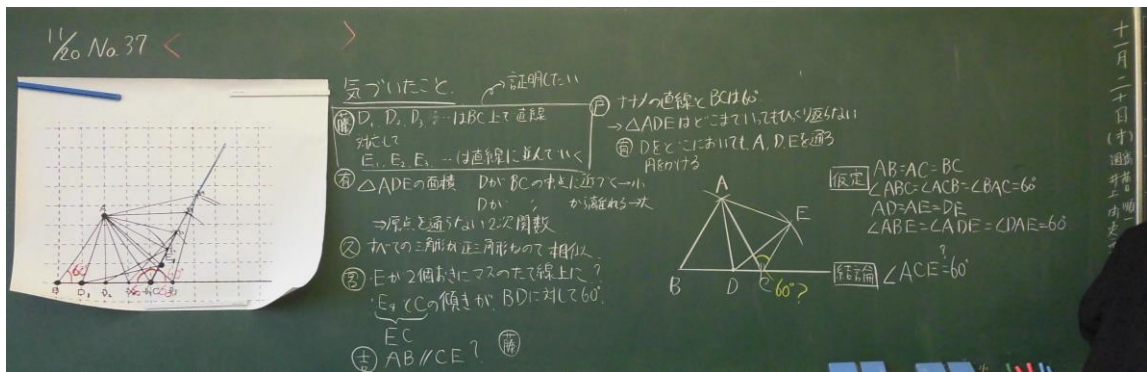
この作業で、正三角形をたくさんかき、気づくことを挙げた。生徒が気づいたこととしては、やはり、点  $E_1, E_2, E_3, \dots$  が一直線上に並ぶことが挙げられた。また、この直線に関連して、この直線は  $BC$  に対して  $60^\circ$  の角をなすことや、 $AB$  と平行になりそうだという事も挙げられた。この意見が出たところで、教師から同じところに集まる角で  $\angle ACE$  の角度についても質問し、 $\angle ACE$  も  $60^\circ$  になりそうだという事も付け加えた。また、この他にも、 $\triangle ADE$  の面積の変化に着目した生徒もいた。

これらの中から、まずは  $\angle ACE=60^\circ$  になることを証明するように、教師が指示をして、証明に入った。ここの流れに関しては、教師が無理矢理進めてしまっており、点  $E$  が一直線上にあることを示すためには、何が言えたらよいのか生徒に議論させるべきであった。

この証明としては、 $\triangle ABD \equiv \triangle ACE$  を使ったものと、円周角の定理を使ったものの 2 通りの方法におおよそ 2 分された。したがって、これら 2 つの方法を発表させ、さらに、点  $D$  が線分  $BC$  内部にあるか外部にあるかで、証明が変化することを確認した。

この授業の後での生徒の学習感想では、「今度は正三角形ではなく二等辺や直角三角形で挑戦してみたいです」というものや、「仮定がこんなにたくさんあるのに使うものは少なかったなと思いました」など、次の展開のキーパーソンとなりうる感想を書いている生徒がいる。これらの生徒が、実際にキーパーソンとして働くかどうかは机間巡視をしながら見極めていきたいが、このような生徒を活かしながら、

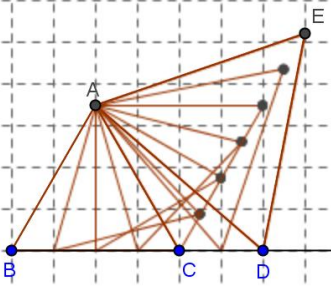
この性質を拡張していきたい。



### 引用・参考文献

- 清宮俊雄(1988), 『モノグラフ 幾何学—発見的な研究法— 改訂版』, 科学新興社
- 中川裕之(2005), 「類比に基づいて命題を発展させる教材研究—合同と相似といった特殊と一般の関係の活用—」, 数学教育論文発表会論文集 38, pp.541-546
- 中川裕之(2007), 「合同な図形に関する学習を生かした相似な図形の学習について—合同条件を用いて考察した図形の性質を発展させることを通して—」, 数学教育論文発表会論文集 40, pp.625-630
- 中川裕之(2008), 「類比の関係を活用した発展的, 創造的な図形の学習指導について—どのような観点において類比かを意識することを通して—」, 数学教育論文発表会論文集 41, pp.585-590
- 中川裕之(2009), 「相似な図形の学習における中点連結定理の位置付けについて—三つの関係に着目した学習内容の考察を通して—」, 数学教育論文発表会論文集 42, pp. 589-594

### 6.3 本時の展開

学習過程	教師の指導	予想される生徒の反応	・指導上の留意点 ○評価の観点
導入	<p>正三角形 <math>ABC</math> の辺 <math>BC</math> を <math>C</math> の方向に延長し、半直線 <math>BC</math> 上に点 <math>D_1</math> をとる。このとき <math>AD_1</math> を一辺とする正三角形 <math>AD_1E_1</math> をかく。以下同様に、半直線 <math>BC</math> 上に点 <math>D_2, D_3, \dots</math> をとり、正三角形 <math>AD_2E_2, AD_3E_3, \dots</math> をかいていく。すると、点 <math>E_1, E_2, E_3, \dots</math> は一直線上に並ぶ。</p> <p>この性質について、正三角形 <math>ABC</math> をかき、半直線 <math>BC</math> 上に点 <math>D</math> をとって、正三角形 <math>ADE</math> をかき、次のように証明しました。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>証明</p> <p><math>\triangle ABD</math> と <math>\triangle ACE</math> において</p> <p>仮定より <math>AB=AC \dots \textcircled{1}</math></p> <p style="padding-left: 2em;"><math>AD=AE \dots \textcircled{2}</math></p> <p style="padding-left: 2em;"><math>\angle BAD = \angle BAC - \angle DAC</math></p> <p style="padding-left: 4em;">(点 <math>D</math> が外に出るとたすことになる)</p> <p style="padding-left: 2em;"><math>= \angle DAE - \angle DAC</math></p> <p style="padding-left: 2em;"><math>= \angle CAE \dots \textcircled{3}</math></p> <p>よって、2 辺とその間の角がそれぞれ等しく</p> <p><math>\triangle ABD \equiv \triangle ACE</math></p> <p>よって、<math>\angle ABD = \angle ACE</math> なので点 <math>E</math> は辺 <math>AC</math> に <math>60^\circ</math> の角度で交わる直線上にある。</p> </div> <p>・ この証明を見直したうえで、どこか変えられそうなところはありますか？</p>	 <p>・ 正三角形 <math>ABC \rightarrow</math> 正方形 <math>ABCD</math></p> <p>・ 正三角形 <math>ABC \rightarrow</math> 二等辺三角形 <math>ABC</math></p> <p>・ 正三角形 <math>ABC \rightarrow</math> 一般の三角形 <math>ABC</math></p> <p>・ 証明では合同が使われているので相似に変える。</p>	<p>・ 前時の発表では、別の黒板に書いて発表させ、その黒板を残しておく。</p> <p>○ 証明を見直し、仮定の条件をより一般的なものに変えてみようとしているか。</p> <p>・ 前々回では、証明の中に合同があるとき、その問題を一般化すると、証明に用いた合同な三角形が相似に置き換わることがあることをやっている。この考え方は、</p>
展開	[正三角形 $ABC \rightarrow$ 正方形 $ABCD$ ]		

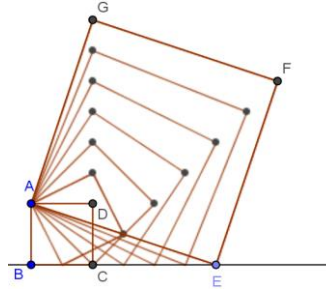
- 正三角形を正方形にしたらどうなるでしょうか？

[正三角形 ABC → 二等辺三角形 ABC]

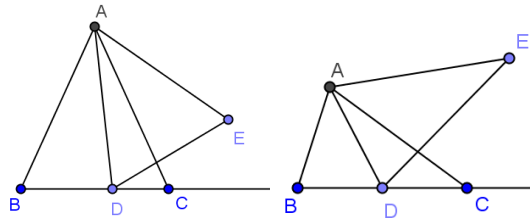
- では二等辺三角形で同じようにかいてみましょう。  
(いくつか図をかく時間をとる)  
ところで、二等辺三角形とだけ言われて、疑問に思うことはないですか？

- (ア)のようにすると証明や結論はどうなりますか？
- (イ)のようにすると証明や結論はどうなりますか？

- 点 G と点 F がそれぞれ一直線上に並ぶ。



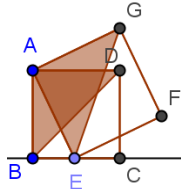
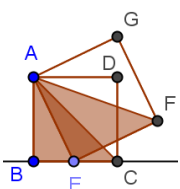
- 頂角または、底角が等しいものをかかなければいけない。
- 形が同じ二等辺三角形でないといけない。  
→相似
- 同じ形の二等辺三角形でも、向きが違う場合がある。  
(ア) (イ)



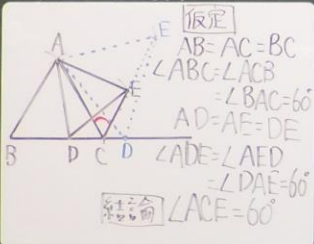
- もとの証明を見ると、 $AB=AC$ ,  $AD=AE$ ,  $\angle BAC=\angle DAE$  を使っているのだから、アのようにしても証明や結論は同じ。
- $\angle BAC=\angle DAE$  だけど、 $AB \neq AC$ ,  $AD \neq AE$  なので証明が変わってくる。

- まだ生徒にはなじんでいないと思われるので、まずは問題の条件を変えてみてどうなるかを考える方向で授業を進めていく。
- 正方形の場合を考えるのは少し複雑になるので、後で見直すという立場で、ここでは、成り立つ事実だけ確認し、証明はしない。

- 二等辺三角形にするというアイデアがあれば、ためしにやってみる。ただし、ここでは2つのことについて、議論が必要と思われる。1つは、点 A が頂角のところにある場合と、底角のところにある場合の2通りが考えられるということである。もう1つは、頂角のところを点 A としたときに、頂角の大きさを一定にしたまま回転させなくてはならないことである。頂角が等しい二等辺三角形でないといけないこと、つまり、相似な三角形をかいているのだということを意識させたい。相似な三角形をかいていることは、正三角形の時点で意識している生徒もいたのだから、このような生徒はこの場面でキーパーソンとなる

<p>まとめ</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>では、イの場合に証明はどのように変わるのか、その結果、結論は修正すべきか、修正しなくてもよいのか、考えてみましょう。</li> </ul> <p>[一般三角形の場合や正方形の場合]</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>イのような二等辺三角形の向きで証明について考えましたが、この証明は二等辺三角形である必要があったでしょうか？</li> <li>そのような見方から、正方形の場合を見直すと、正方形の点Cと点Dがそれぞれ一直線上に並んでいることも、説明がつかないでしょうか？</li> <li>学習感想を書いてください。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>結論も変わるかもしれない。</li> <li>結論は変わらない。</li> <li>元の証明の①と②が <math>AB:AD=AC:AE</math> になり、<math>\triangle ABD</math> と <math>\triangle ACE</math> が合同ではなく、相似になる。</li> <li><math>\triangle ABD \sim \triangle ACE</math> なので、<math>\angle ACE = \angle ABD</math> で一定になるので、結論は変わらない。</li> <li>等辺じゃない三角形でもよかった。</li> <li><math>\triangle ABC</math> と <math>\triangle ADE</math> が相似であれば何でもよかった。</li> <li>正方形は書き方の違う2種類の直角二等辺三角形の場合だった。</li> </ul> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">   </div>	<p>と思われる。</p> <p>[手だて]このことに、気づきやすくするために、二等辺三角形の向きに関して示唆を含まない書き方で、図の書き方を指示し、いくつか図をノートにかかせる。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ 二等辺三角形にするというアイデアを証明に基いて出したのか、仮定の条件から考えたのか。</li> <li>できれば、この発問をする前に、イの場合を考えている時点で生徒が二等辺三角形であることに意味がないことに気付いてほしい。(キーパーソン)</li> <li>○ 二等辺三角形であることの必要性に疑問をもつか。</li> </ul>
------------	--	---	---

11/22 No.39



E, E<sub>2</sub>, E<sub>3</sub> は直線?

AC 決まると E だけ動く

angle ACE = 60 degrees -> E は同じ軌道

(内, 外)

二等辺三角形

angle BAC を一定に

AD=AE  
 にはよるとはか  
 angle ADC? -> E<sub>1</sub> が  
 定まらない

AB=AC, angle BAC = angle DAE

AD=AE

結論 angle ABD = angle ACE

[証明は?]

angle BAC = angle DAE = 60 degrees

angle ABD = angle ACE = 60 degrees

この証明を見直した上で

変えられその所は?

① 長さ AD ≠ AE

② 正三角形 -> 二等辺

③ (ADE)

④ angle A の角度が等しい二等辺

angle BAC = angle DAE

triangle ABD と triangle ACE において

AB=AC (仮定) ①

AD=AE (仮定) ②

angle BAC = angle DAC = angle CAE

angle DAE = angle DAC = angle CAE

angle BAC = angle DAE = 60 degrees より

angle BAD = angle CAE ③

①-③ より

二辺とその間の角がそれぞれ等しいので

triangle ABD ≅ triangle ACE

合同な三角形の対応する角は等しいので

angle ABD = angle ACE = 60 degrees

