平成 10 年度力学及び演習 I(担当：新田) 試験問題 解答例

試験も大事な学習の一環である。一生懸命考えた問題だから、解答例に対する理解も必ずいつもより深いはずである。どうかじっくり目を通し、できなかった問題、選択しなかった問題に関しては、是非ペンを持って計算を確認して欲しい。

1.Newton の運動の 3 法則を述べよ。

- **第 1 法則 (慣性の法則)**: 力を受けていない物体は、等速直線運動か、静止を続ける。
- **第 2 法則 (運動方程式)**: 物体の加速度は、力に比例し、質量に反比例する。(もしくは、物体の運動量の時間変化は、力に比例する。)
- **第 3 法則 (作用反作用の法則)**: ある物体が他の物体に力を及ぼすとき、その物体は他の物体から大きさが等しく向きが反対の力を受ける。

2. 質量 m_1,m_2 である 2 質点が力を及ぼしあっている。外力は加わっていない。Newton の運動の 3 法則から、この 2 物体間に運動量保存則が成り立つことを示せ。

m_1 の速度を $\mathbf{v}_1$、m_2 の速度を $\mathbf{v}_2$、m_1 が m_2 に加える力を $\mathbf{F}_{1\to2}$、m_2 が m_1 に加える力を $\mathbf{F}_{2\to1}$ と表す。m_1 に対する運動方程式 (Newton の運動の第 2 法則) は

$$m_1\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{F}_{2\to1} \tag{1}$$

m_2 に対する運動方程式は

$$m_2\frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mathbf{F}_{1\to2} \tag{2}$$

作用・反作用の法則 (Newton の運動の第 3 法則) より

$$\mathbf{F}_{2\to1} = -\mathbf{F}_{1\to2} \tag{3}$$

(1) 式と (2) 式を (3) 式に代入して

$$\begin{aligned} m_1\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} &= -m_2\frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \\ \frac{d(m_1\mathbf{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\mathbf{v}_2)}{dt} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2\right) &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

$dX(t)/dt = 0$ が恒等的に成立する場合、$X(t) =$ 一定 であるから、

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = \text{一定} \tag{5}$$

となり、2 物体の運動量の和は一定である。つまり、保存する。

3. 質量 m の物体が、ポテンシャル $V(x)$ による力を受けて、一次元的に運動している。このとき、エネルギー保存則が成り立つことを、Newton の運動の 3 法則から示せ。ただし、$V(x)$ による力 F は、$F = -dV/dx$ によって与えられる。

物体に対する運動方程式 (Newton の運動の第 2 法則) は

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= F \\ &= -\frac{dV}{dx} \end{aligned} \tag{6}$$

両辺を x で積分して

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} m\frac{dv}{dt}dx &= -\int_{x_1}^{x_2}\frac{dV}{dx}dx \\ &= -\int_{V(x_1)}^{V(x_2)} dV \\ &= V(x_2) - V(x_1) \end{aligned} \tag{7}$$

一方、(7) 式の左辺は

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} m\frac{dv}{dt}dx &= m\int_{v_1}^{v_2}\frac{dx}{dt}dv \\ &= m\int_{v_1}^{v_2} v dv \\ &= m\int_{v_1}^{v_2}\frac{1}{2}d(v^2) \\ &= \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right) \end{aligned} \tag{8}$$

となる。(7) 式と (8) 式を合わせて、エネルギー保存則

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 &= V(x_2) - V(x_1) \\ \frac{1}{2}mv_1^2 + V(x_1) &= \frac{1}{2}mv_2^2 + V(x_2) \end{aligned} \tag{9}$$

を得る。ここに v_1 及び v_2 は、それぞれ位置 x_1、x_2 における速度である。

4. 以下の問いに答えよ。

1. 宇宙空間に静止していた宇宙飛行士が、質量 m の金属球を速度 $-u$ で投げたとするとき、宇宙飛行士の速度 V_1 を求めよ。金属球と宇宙飛行士を合わせた全質量を M とする。
2. 宇宙飛行士が、さらに質量 m の金属球を先ほどと同じ方向に、相対速度 (宇宙飛行士を基準にした速度)$-u$ で投げたとすると、このときの宇宙飛行士の速度 V_2 を求めよ。2 個目の金属球と宇宙飛行士を合わせた全質量は $M-m$ となっていることに注意せよ。
3. N 個の金属球を、相対速度 u で同じ方向に投げ続けたときの宇宙飛行士の速度 V_N を求めよ。

1) 運動量保存則より、

$$\begin{aligned} 0 &= (M-m)V_1 + m(-u) \\ V_1 &= \frac{m}{M-m}u \end{aligned} \tag{10}$$

となる。

2) 再び運動量保存則より、

$$\begin{aligned} (M-m)V_1 &= (M-2m)V_2 + m(V_1 - u) \\ (M-2m)V_2 &= (M-2m)V_1 + mu \\ V_2 &= V_1 + \frac{m}{M-2m}u \end{aligned} \tag{11}$$

(10) 式を代入して、

$$\begin{aligned} V_2 &= V_1 + \frac{m}{M-2m}u \\ &= \frac{m}{M-m}u + \frac{m}{M-2m}u \\ &= \left(\frac{1}{M-m} + \frac{1}{M-2m}\right)mu \end{aligned} \tag{12}$$

3) (12) 式の計算を繰り返すと

$$\begin{aligned} V_N &= V_{N-1} + \frac{m}{M-Nm}u \\ &= \left(\frac{1}{M-m} + \cdots + \frac{1}{M-Nm}\right)mu \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{m}{M-km}u \end{aligned} \tag{13}$$

を得る。

Note! これは、ロケットの問題と同じである。実際、$m \to \Delta m$,$N \to t/\Delta t$ と置き換えると、$V_N \to V(t)$ と書き直せ、(13) 式は

$$V(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{m}{M - k(\Delta m/\Delta t)(k\Delta t)}u \tag{14}$$

となる。したがって、$N \to \infty$, $\Delta t \to dt$ の極限では、$\Delta m/\Delta t \to dm/dt$(これは単位時間当たりに失う質量である) と書き直せることに注意して

$$\begin{aligned} V(t) &= u\int_0^t \frac{1}{M-(dm/dt)t}\frac{dm}{dt}dt \\ &= u\int_0^t \frac{1}{M(dm/dt)^{-1} - t}dt \\ &= u\left[-\log(M(dm/dt)^{-1} - t)\right]_0^t \\ &= u\log\left(\frac{M}{M-(dm/dt)t}\right) \end{aligned} \tag{15}$$

を得る。これは、教科書 p.88 で、初速度を 0 とおいたものである。

5. 質量 m の雨粒が、重力と、速度に比例する大きさ μv の空気抵抗を受けて落下している。時刻 $t=0$ のときの速度を $v(0)=0$ とするとき、 時刻 t における落下速度 $V(t)$ を求めよ。また、そのグラフを描け。

下向き (重力方向) を正にとる。運動方程式は

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= F_{gravity} + F_{friction} \\ &= mg - \mu v \end{aligned} \tag{16}$$

すなわち、

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{m}\left(v - \frac{mg}{\mu}\right) \tag{17}$$

である。$u = v - mg/\mu$ と置くと、これは

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\mu}{m}u \tag{18}$$

と書き直せる。この微分方程式の解は、両辺を積分して

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{du/dt}{u}dt &= -\frac{\mu}{m}\int_0^t dt \\ \log\left(\frac{u(t)}{u(0)}\right) &= -\frac{\mu}{m}t \\ u(t) &= u(0)\exp\left(-\frac{\mu}{m}t\right) \end{aligned} \tag{19}$$

となる。$u(t)$ を $v(t)$ に戻し、$v(0)=0$ とすると

$$v(t) = \frac{mg}{\mu}\left[1 - \exp\left(-\frac{\mu}{m}t\right)\right] \tag{20}$$

となる。図は省略する。