

デルタ関数 [1]

1 デルタ関数の定義

デルタ関数は、次の 2 式で定義される：

$$\begin{aligned} x \neq 0 \text{ のとき } \delta(x) &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) &= 1 \end{aligned} \quad (1)$$

この定義から、デルタ関数は原点以外はいつでも 0 なのに、その面積が 1 になっているという、とても奇妙な関数だということがわかる。

これでは具体的なイメージがわからないので

$$\delta_{\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & (|x| > \frac{1}{2\alpha}) \\ \alpha & (|x| < \frac{1}{2\alpha}) \end{cases} \quad (2)$$

という関数を考えると $\alpha \rightarrow \infty$ の極限で $\delta_{\alpha}(x) \rightarrow \delta(x)$ になっていると考えてよいだろう¹。この極限を考えれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x) = f(0) \quad (3)$$

または原点をずらしたデルタ関数を考えた式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - a) = f(a) \quad (4)$$

が成り立つことが納得できる。

なお、公式 (4) の積分をはずして、単に

$$f(x) \delta(x - a) = f(a) \quad (5)$$

と書く場合が多いが、あくまでこれは積分の元でのみ意味を持つ式であることを忘れてはならない。デルタ関数の満たす公式全ては積分の中で用いるという前提の元で成立する。

デルタ関数が満たす重要な公式は沢山ある。例えば、

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (a \neq 0) \quad (6)$$

が成立する。これは、積分の元で変数変換を用いて簡単に証明できる。他の例としては

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} [\delta(x - a) + \delta(x + a)] \quad (a > 0) \quad (7)$$

¹ 厳密な数学的定義においては、関数 $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \delta_{\alpha}$ は存在しない。デルタ関数は超関数として扱わねばならない [3]。

(積分の元で成立することを証明してみよ。)

点電荷の電荷密度はデルタ関数で表せる [2]。量子力学ではもっと本質的な役割を果たす。

2 フーリエ級数とデルタ関数

フーリエ級数とデルタ関数は切っても切れない関係にある。

まず、フーリエ級数展開についてまとめておく。

定義域 $-L/2 \leq x \leq L/2$ で定義された「性質のよい」関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k_n) e^{ik_n x} \quad (8)$$

($k_n = 2\pi n/L$) のように表すことができる。このような展開をフーリエ級数展開という。ここに $\hat{f}(k_n)$ はフーリエ係数とよばれるもので

$$\hat{f}(k_n) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx f(x) e^{-ik_n x} \quad (9)$$

で与えられる。ここでいう性質のよい関数には「不連続な部分が有限個で極値の数も有限個であるような関数」が含まれるそうなので、私たちが扱うたいの関数はフーリエ展開できるといえる。

式 (8) のような展開が存在することは簡単には示せないが、このように展開できるならば係数は式 (9) の右辺に式 (8) を代入してみるとちゃんと $\hat{f}(k_n)$ になることが

$$\frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-i(k_n - k_m)x} = \delta_{nm} \quad (10)$$

に気をつけると確かめられる。ここで、 δ_{nm} はクロネッカーのデルタと呼ばれる記号で、 $n \neq m$ のときは 0、 $n = m$ のときは 1 を表わす。また、 $f(x)$ が実関数のときは $\hat{f}^*(k_n) = \hat{f}(-k_n)$ となることがわかる。

ここで $f(x)$ としてデルタ関数をとると式 (9) から

$$\hat{\delta}(k_n) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx \delta(x) e^{-ik_n x} = \frac{1}{L} \quad (11)$$

となる．これを式 (8) に代入すると

$$\delta(x) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik_n x} \quad (12)$$

を得る．

$\Delta k = 2\pi/L$ において式 (12) を書き直すと

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta k e^{ik_n x} \quad (13)$$

となる．極限 $L \rightarrow \infty$ をとると n の和は k の積分になって，デルタ関数の積分表現

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \quad (14)$$

を得る．積分の中で x を $-x$ と置き換えても， k を $-k'$ などと置き換えれば結局同じ式に戻るので，デルタ関数は偶関数になっている．

積分表現によるデルタ関数を用いても公式を証明することができる．例えば、(7) は，式 (14) で x を ax に置き換えて，さらに $ak = k'$ と変換して積分すれば導ける．

参考文献

- [1] 新田英雄「物理と特殊関数」(物理数学 One Point 16) (共立出版) に依る．
- [2] 例えば、砂川重信「電磁気学」(物理テキストシリーズ 4) (岩波書店)．
- [3] 超関数のよい入門書としては，州之内治男「関数解析入門」(サイエンス社) がある．