電磁気学　レポート課題（出題:2005年11月2日）解答

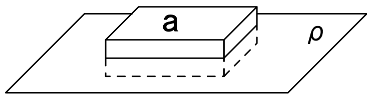
担当教員:新田英雄，レポート担当：永田祐吾，　クラス:理1 24,25　.

1. 一様に帯電した平面のつくる静電場を求めよ．ここで電荷面密度を ρ とする．

（解答例）＼＼任意の閉曲面 S に対してガウスの法則の積分形

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS = \frac{Q_S}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

が成り立つ。ここに Q_S は S 内の電荷、$\boldsymbol{E}$ は電場ベクトル、$\boldsymbol{n}$ は面の法線ベクトルである。下図の小さな直方体 (円柱等でも可) を S にとる。対称性から明らかに電場は



平面に垂直な成分しかない。直方体の側面においては $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{n}$ であるから $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} = 0$。よって (1) の積分で残るのは上底と下底に関する項のみで，これらの面に対しては $\boldsymbol{E} \parallel \boldsymbol{n}$ であるから $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} = E$ であり，また対称性から上底・下底上の電場は一定。したがって，上底と下底の面積を ΔS とすると

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS = 2E\Delta S \tag{2}$$

一方，S 内部の全電荷量は

$$Q_S = \rho \Delta S \tag{3}$$

である。(2) 式と (3) 式を (1) 式に代入して

$$2E\Delta S = \frac{\rho \Delta S}{\varepsilon_0}$$

となる。以上より，求める電場の大きさは $E = \rho/2\varepsilon_0$ で，向きは平面に対して垂直で外向きである。（大きさと向きを答えること。）

2. 下図（省略）のような半径 a の導体球 A と、同心で内半径 b で外半径 c の中空の導体球 B がある $(a < b < c)$．それ以外の領域は真空である．導体球 A に電荷 Q を、導体球 B に電荷 -Q' を付与したときの静電場を適宜場合分けをして求めよ．

（解答例）＼＼
球の中心からの距離 r を用いて考える。

(a) 「導体」の定義より，範囲 $r < a$、$b < r < c$ の導体球内では電場は存在しない。よって $E = 0$ となる。

(b) 範囲 $a < r < b$ では、ガウスの法則を用いて電場を求める。導体球で電荷を付与すると、対称性から，それらは導体球表面上に一様に分布する。そこで閉曲面として半径 r の球を考える。対称性から球表面上での電場の大きさは各点で等しく、方向は球の中心より放射状で外向きである。よって $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} = E$ であるので、(1) 式の左辺は

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS = 4\pi r^2 E \tag{4}$$

となる。一方，(1) 式の右辺は，球内にある電荷が Q なので、Q/ε_0 となる。これらから

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

となる。

(c) 範囲 $c < r$ では、同様にして半径 r の球を考えると、球内の電荷は $Q - Q'$ であるので、

$$E = \frac{Q - Q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

となる。方向も同様に放射状で外向きである。

コメント：
導体内で電子は自由に動けるため、電荷は内部に電場が生じないように分布する。直感的には、例えば導体球に多数の電子を付与した場合、互いに反発し合って、球表面に一様に分布することによって落ち着くことになる。正電荷でも同じ[1]。電荷の分布の仕方は、まず導体球 A に電荷 Q を付与すると A の表面上に電荷 Q が集まる。すると導体球 B の内側の表面（内表面）に $-Q$ が誘起され、さらにそれを打ち消すため B の外側の表面（外表面）に Q が誘起する（電荷の総量は保存する）。次に電荷 $-Q'$ を B に付与すると、A の場合と同様に、B の外表面に $-Q'$ が分布する。すると外表面には合わせて $Q - Q'$ が分布する。まとめると、A の表面に電荷 Q、B の内表面に電荷 $-Q$、外表面に電荷 $Q - Q'$ が分布することになる。なお，球で無い（対称性の悪い）場合、一般に電荷は一様に分布しない。

[1] 正電荷を付与することは，現実的には電子を取り除くことによって実現される。

3. $\phi = (x-1)^2 - yz^2$、$\boldsymbol{A} = (2xz^2, y^3, -3x^2 z)$ として、以下の式 $(a) \sim (d)$ を求めよ．ここで $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ である。

$$(a)\ \nabla\phi \quad (b)\ \nabla\cdot\boldsymbol{A} \quad (c)\ \nabla\times\boldsymbol{A} \quad (d)\ \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\phi)$$

(解答例)

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad \nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\ \frac{\partial\phi}{\partial y},\ \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = (2(x-1), -z^2, -2yz) \\
&(b) \quad \nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 2z^2 + 3y^2 - 3x^2 \\
&(c) \quad \nabla\times\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = (0, 10xz, 0) \\
&(d) \quad \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\phi) = 4xz^2(x-1) - y^3z^2 + 6x^2yz^2
\end{aligned}
$$

コメント：
勾配 (grad) をとった結果，スカラー関数はベクトル関数になる。発散 (div) をとると，ベクトル関数はスカラー関数になる。回転 (rot) をとると，ベクトル関数はベクトル関数になる。発散を取った結果がベクトル関数になっているようなミスを犯してはならない。なお，外積の符号に注意すること。