運動量保存則とロケットの推進

ロケットの推進原理は、Newton の運動方程式に基づいて説明されている。しかし、ここでは運動量保存則の立場から考える。

1. 宇宙空間に静止していた宇宙飛行士が、質量 m の金属球を速度 $-u$ で投げたとするとき、宇宙飛行士の速度 V_1 を求めよ。金属球と宇宙飛行士を合わせた全質量を M とする。
2. 宇宙飛行士が、さらに質量 m の金属球を先ほどと同じ方向に、相対速度 (宇宙飛行士を基準にした速度)$-u$ で投げたとすると、このときの宇宙飛行士の速度 V_2 を求めよ。2 個目の金属球と宇宙飛行士を合わせた全質量は $M-m$ となっていることに注意せよ。
3. N 個の金属球を、相対速度 u で同じ方向に投げ続けたときの宇宙飛行士の速度 V_N を求めよ。

1) 運動量保存則より、

$$\begin{aligned} 0 &= (M-m)V_1 + m(-u) \\ V_1 &= \frac{m}{M-m}u \end{aligned} \tag{1}$$

となる。

2) 再び運動量保存則より、

$$\begin{aligned} (M-m)V_1 &= (M-2m)V_2 + m(V_1-u) \\ (M-2m)V_2 &= (M-2m)V_1 + mu \\ V_2 &= V_1 + \frac{m}{M-2m}u \end{aligned} \tag{2}$$

(1) 式を代入して、

$$\begin{aligned} V_2 &= V_1 + \frac{m}{M-2m}u \\ &= \frac{m}{M-m}u + \frac{m}{M-2m}u \\ &= \left(\frac{1}{M-m} + \frac{1}{M-2m}\right)mu \end{aligned} \tag{3}$$

3) (3) 式の計算を繰り返すと

$$\begin{aligned} V_N &= V_{N-1} + \frac{m}{M-Nm}u \\ &= \left(\frac{1}{M-m} + \cdots + \frac{1}{M-Nm}\right)mu \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{m}{M-km}u \end{aligned} \tag{4}$$

を得る。

Note! これは、ロケットの問題と同じである。実際、$m \to \Delta m$,$N \to t/\Delta t$ と置き換えると、$V_N \to V(t)$ と書き直せ、(4) 式は

$$V(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\Delta m}{M - (\Delta m/\Delta t)(k\Delta t)}u \tag{5}$$

となる。したがって、$N \to \infty$, $\Delta t \to dt$ の極限では、$\Delta m/\Delta t \to dm/dt$(これは単位時間当たりに失う質量、すなわち燃料として噴射する質量である) と書き直せることに注意して

$$\begin{aligned} V(t) &= u\int_0^t \frac{1}{M-(dm/dt)t}\frac{dm}{dt}dt \\ &= u\int_0^t \frac{1}{M(dm/dt)^{-1}-t}dt \end{aligned} \tag{6}$$

を得る。

もし、単位時間あたりに噴射する燃料が一定で $dm/dt = \alpha$(定数) とおけるならば (6) 式は積分できて

$$\begin{aligned} V(t) &= u\int_0^t \frac{1}{(M/\alpha)-t}dt \\ &= u\left[-\log(M/\alpha - t)\right]_0^t \\ &= u\log\left(\frac{M}{M-\alpha t}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

これは、初速度 $V(0)=0$ であるロケットの速度を与える。$M-\alpha t$ は t だけ時間が経った時のロケットの質量である。したがって、ある値以下にはならないことに注意しよう。全ての燃料を消費したら、ロケットの加速は止み、等速直線運動を行う。

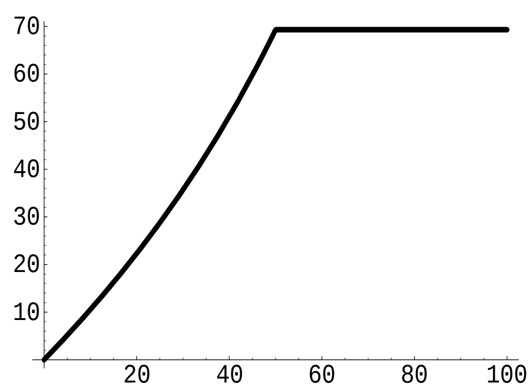

図 1: ロケットの速度