1　高校数学落穂拾い

1.0.1　忘れてはならない，基本の公式

三角関数にはたくさんの公式が出てきて，かなりまいってしまいます．しかし，その導き方さえ覚えておけば，自分で公式を再現できます．ただし，絶対に忘れてはならない基本の公式が 3 つだけ，あります．

根本公式

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{1}$$

これは，たぶん，三角関数を習った人なら忘れてはいないでしょう．

この公式は，三角関数の定義そのもののようなものなので不必要ともいえますが，一応，考えておきましょう．

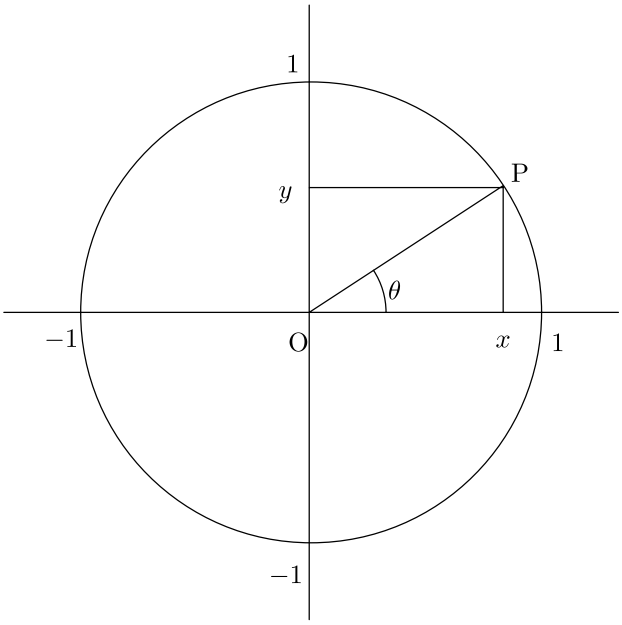

図 1:

図 1 は，原点を中心とする半径 1 の円を描いたものです．x 軸と角度 θ をなす半径 OP の座標を (x, y) とすると，三角関数は

$$\sin\theta = y, \qquad \cos\theta = x \tag{2}$$

で**定義**されます．(定義には符号もふくめていることに注意しなければいけません．) 定義から，OP は円の半径ですから，常に OP=1 です．したがって，$x^2 + y^2 = 1$，ゆえに (1) 式が成り立つ，というわけです．なお，ついでにタンジェントの定義も書いておきましょう．

定義：

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \tag{3}$$

これは，$\tan\theta = y/x$ としても同じです.

なお，定義より，コサインは偶関数，サインは奇関数ということが分かります．ということは，タンジェントは奇関数になりますね.

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta, \quad \cos(-\theta) = \cos\theta, \quad \tan(-\theta) = -\tan\theta \tag{4}$$

次に基本となるのは，

加法定理

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y \tag{5}$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y \tag{6}$$

です．証明は,「行列と 1 次変換」のところ，および「オイラーの公式」のところで与えます．(気になる人は，三角形の図を書いて自分で是非証明を見つけてください．もちろん，高校の教科書には証明が書いてあります．)

根本公式と加法定理の 3 公式を活用することにより，残りの全ての三角関数の公式は導かれるのです.

1.0.2 ラジアン

小学校で，角度は 1 周分を 360 °で表すと習いました．そして，日常生活でも「私の人生は 180 °の方向転換を迫られた」などと使います．しかし，数学的には 1 周分を 360 °で表すよりも便利な単位があります．それは,

1 周分の角度を 2π とする

単位です．これを弧度法といい，単位を「ラジアン」(rad) で表します.

360 °$= 2\pi$ rad (ラジアン)

何が便利なのかというと，この単位を用いると，

半径 r, 中心角が θ である扇形の弧の長さ $= r\theta$

となるからなのです．小学校で習った公式は

半径× 2 ×円周率×中心角÷ 360 $\left(= 2\pi r \times \frac{\theta^\circ}{360^\circ}\right)$

ですから，確かにシンプルになっています．実際,「弧度法」という名前をよく見てください．半径が 1 の扇形の弧の長さを角度の単位とする，という意味が込められているのです.

ラジアンに出会うと，最初は皆，戸惑います．これは当然で，慣れていた単位以外の単位に出会うとみなそうなります．ただ，よく考えてみると，なぜ 1 周分の角度が 360 °でなければならないのでしょうか．別に，100 という単位でもいいじゃないですか．小学校のとき，先生にそういうギモンをぶつけて，先生を困らせた人はいませんか．そう，360 °を使うのは，単に歴史的な理由に過ぎません．だったら，公式が簡単になる角度を新しく導入したくなるのは，数学者の合理主義からして当然だったといえましょう．ただ，やはり日常生活で「それは，私の人生を，π 方向転換する出来事だった」と言ったりすると，意味が通じないかアブナイ人だと思われるので，数学の世界で止めておいたほうがよいでしょう[1]．

例題:

いくつかの基本的な角度をラジアンを使って表してみましょう．角度の変換公式は

$$\theta\ (rad)\ = \theta^\circ\ \times \frac{2\pi}{360} \tag{7}$$

ですから，

$$30^\circ = \frac{\pi}{6},\ 45^\circ = \frac{\pi}{4},\ 60^\circ = \frac{\pi}{3},\ 90^\circ = \frac{\pi}{2},\ 180^\circ = \pi \tag{8}$$

となります．これらを覚えている人は，ラジアンを使いこなしているといっていいでしょう．そうでない人は，必ず，公式で確認してください．

1.0.3 よく使う公式

サインとコサインの入れ替え公式

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \tag{9}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \tag{10}$$

倍角の公式

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x \tag{11}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{12}$$

これらは，加法定理からただちに導けます．

[1]「π」というタイトルの映画があります．アブナイ数学者が出てくる名作？です．

半角の公式

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \tag{13}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos(2x)+1}{2} \tag{14}$$

これは，(12) 式と根本公式を利用することにより導けます.

積和・和積の公式

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right] \tag{15}$$

$$\sin X - \sin Y = 2\sin\frac{X+Y}{2}\sin\frac{X-Y}{2} \tag{16}$$

その他，いろいろな組み合わせの積和・和積の公式がありますが，ここでは割愛します.

問題:

上の公式を証明せよ.

1.1 数列の和

1.1.1 1 から n までの整数の和

$$S_n = 1+2+3+\cdots+n \tag{17}$$

を求めます. 順番をひっくり返した和を加えて

$$\begin{aligned} & 2S_n \\ = \; & [1+2+3+\cdots+(n-1)+n]+[n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1] \\ = \; & (1+n)+[2+(n-1)]+[3+(n-2)]+\cdots+[(n-1)+2]+(n+1) \end{aligned}$$

これは，n 個の $n+1$ の和ですね.

$$2S_n = n(n+1) \tag{18}$$

したがって，

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{19}$$

となります. $\sum$(シグマ) の記号を使ってカッコ良く書くならば，次のようになります.

自然数の和の公式

$$\sum_{m=1}^{n} m = \frac{n(n+1)}{2} \tag{20}$$

1.1.2　べき乗の和

$$S_n = 1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^n \tag{21}$$

を求めます．xS_n を考えて S_n から引き算することがテクニックです．

$$\begin{aligned} S_n - xS_n &= (1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^n) - (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n+1}) \\ &= 1 - x^{n+1} \end{aligned} \tag{22}$$

打ち消しあいを工夫してつくっているわけですね．これより，

$$(1-x)S_n = 1 - x^{n+1} \tag{23}$$

すなわち，

$$1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \tag{24}$$

を得ます．まとめです．

等比数列の和

$$\sum_{m=0}^{n} x^m = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \tag{25}$$

1.1.3　数列の収束と発散

一定の規則を与えられた数の列を数列といいます．その規則を $\{\}$ に入れてあらわすことにします．たとえば，数列 $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ を具体的に書きくだすと，

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \cdots \tag{26}$$

という数列をあらわします．この数列は，n が大きくなればなる程，その値は急速に 0 に近づいていきます．

一般に，数列 $\{a_n\}$ の項の値が，n が大きくなるにつれて，ある値 α に限りなく近づくとき,「この数列は α に収束する」といいます．記号的には,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

とか

$$a_n \to \alpha \qquad (n \to \infty)$$

のように表します．例えば，$\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ の場合,

$$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$$

と表せるわけです.

収束しない数列の場合，その「数列は発散する」といいます．たとえば，数列 $\{2^{n-1}\}$ は，無限に数が大きくなっていくので発散します．これを,

$$\lim_{n\to\infty} 2^{n-1} = \infty$$

と表すこともあります．絶対値がどんどん大きくなっていく数列ではない数列，例えば $\{(-1)^n\}$ のように永遠に 1 と-1 の 2 つの値を繰り返すような数列も，発散すると言うことに注意しましょう.

1.1.4 等比級数

先ほどの，等比数列の和で，もし x が $|x| < 1$ を満たすならば,

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

になりますね．したがって,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} x^m = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} \tag{27}$$

となります．このような，無限項の数列の和を級数と呼びます．また，記号的には $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n}$ を $\sum_{m=0}^{\infty}$ と書きます．よって

等比級数の和: $|x| < 1$ なる x に対して

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1 - x} \tag{28}$$

1.2 微分

1.2.1 三角関数の微分

公式にしたがって，

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sin x}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x-\sin x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\left(\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}\right)\sin x+\left(\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right)\cos x\right] \qquad (29)
\end{aligned}
$$

この先の計算には

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} \qquad (30)$$

の値が必要になります．分母も分子も 0 に限りなく近づきますから，極限値が収束している可能性があります．というか，収束していないと，$\sin x$ の微分が存在しないことになってしまうじゃないですか．実際,

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1 \qquad (31)$$

となります．その証明は，図形を利用します．図 2 を見てください．△ OPQ と

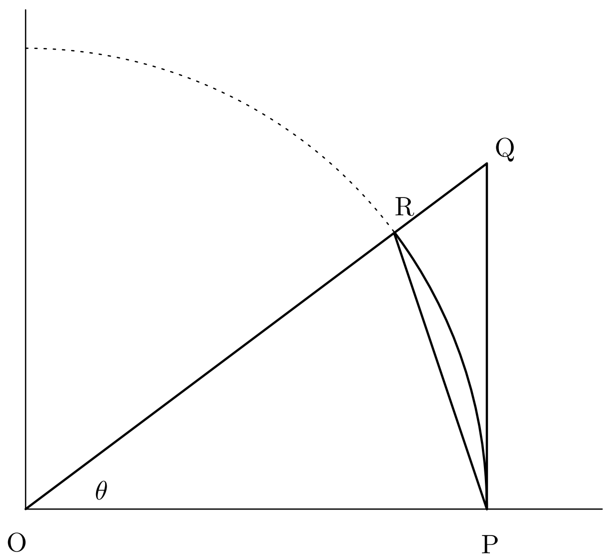

図 2:

扇形 OPR と△ OPR の面積を比較します．OP の長さを r とすると，各々の面積は，△ OPQ= $\frac{1}{2}$OP$\cdot$PQ $=\frac{1}{2}r^2\tan\theta$，扇形 OPR= $\frac{1}{2}r^2\theta$，△ OPR= $\frac{1}{2}r^2\sin\theta$ となります．面積の大きさの順番は，図を見れば明らかなように

$$\triangle\ \mathrm{OPR} < \text{扇形 OPR} < \triangle\ \mathrm{OPQ} \qquad (32)$$

したがって，

$$\frac{1}{2}r^2\sin\theta < \frac{1}{2}r^2\theta < \frac{1}{2}r^2\tan\theta \tag{33}$$

$\frac{1}{2}r^2\sin\theta$ で割って，

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta} \tag{34}$$

この不等式で $\theta\to 0$ の極限をとると，$\cos\theta\to 1$ ですから 1 と 1 でサンドイッチされるので

$$\frac{\theta}{\sin\theta} \quad \to 1 \qquad (\theta\to 0) \tag{35}$$

でなければならない．ひっくり返した式になっいますが，(31) 式を証明できました．

では，(29) 式に戻って，$\sin x$ の微分の計算の続きをしましょう．公式 $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$ を用いると，(29) 式の第 1 項は

$$\frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x} = \frac{\sin^2(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \tag{36}$$

と変形できます．こうすると，(31) 式を使うことができて

$$\frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x} = \left[\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\right]\sin(\Delta x/2)\to 0 \tag{37}$$

となりますね．つまり，(29) 式の第 1 項は 0 です．したがって，

$$\begin{aligned}\frac{d\sin x}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\left(\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right)\cos x\right]\\ &= \cos x\end{aligned} \tag{38}$$

となります．

$\sin x$ の微分さえできれば，コサイン, タンジェントの微分もできます．

$$\begin{aligned}\frac{d\cos x}{dx} &= \frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\ &= \frac{d\sin y}{dy}\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\ &= \cos y(-1)\\ &= -\sin x\end{aligned} \tag{39}$$

という具合です．ただし，途中で公式 (10) を用い，さらに $y=(\pi/2-x)$ とおいて合成関数の微分公式を用いました．

$\tan x$ の微分は，次のように積の微分と合成関数の微分を使います[2]．

$$\frac{d\tan x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$$

[2]いわゆる商の微分の公式は，積の微分と合成関数の微分を毎回用いるのと手間は大して変わりませんので，ここでは一貫して使いません．

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d\sin x}{dx}\cdot\frac{1}{\cos x}+\sin x\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right) \\
&= \cos x\cdot\frac{1}{\cos x}+\sin x\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y}\right)\frac{d\cos x}{dx} \\
&= 1+\sin x\cdot\frac{-1}{\cos^2 x}\cdot(-\sin x) \\
&= 1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (40)
\end{aligned}
$$

もっとも，私は記憶力が悪いので，$\tan x$ の微分は毎回計算して導いていますが．

まとめです．

基本的な三角関数の微分公式

$$
\frac{d\sin x}{dx}=\cos x,\quad \frac{d\cos x}{dx}=-\sin x,\quad \frac{d\tan x}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x} \qquad (41)
$$

1.2.2　対数関数の微分

「数 III」的指数関数の微分の導出は，ちょっと面白いのです．まず，対数関数の微分を考え，その逆関数微分として指数関数の微分を導くのです．その際に，自然定数 e の定義も現れます．それでは，その流れにそって見ていきましょう．

ではまず，対数関数を，定義に基づいて微分します．

$$
\begin{aligned}
\frac{d\log_a x}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) \\
&= \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \qquad (42)
\end{aligned}
$$

と計算されます．ただし，途中で $p\log q=\log q^p$ という対数関数の性質を使いました．　$x/\Delta x=n$ とおくと，$\Delta x\to 0$ のとき $n\to\infty$ となりますから

$$
\frac{d\log_a x}{dx} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (43)
$$

となります．ここに現れた極限は，3 よりすこし小さい無理数に収束します：

$$
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.718281828459045\cdots \qquad (44)
$$

この値を，昔は，フナヒトハチフタハチヒトハチフタハチシゴクオシイと覚えたものです．というのも，今のように電卓やパソコンがないので，筆算する機会がどうしても多かったから，数字を覚えていないと困ることが多かったからです．上の極限値を e と書いて，自然定数と呼びます．自然界を表す数式に，π と共にもっとも多く現れる定数ですから，その名にふさわしい定数といえます．

なお，光速 c やプランク定数 $\hbar$ も自然界における定数ですが，これらは実験によって定数であることが現在到達できる範囲で定数であることが確認されているものです．もしかしたら，未来の理論や実験によって，定数でないことが見出されるかも知れません．このような,「現在の理論や実験に基づくと定数である数」を，π や e などの数学的に定まる定数と区別するために，**物理定数**と呼びます．

本題に戻りましょう．(43) 式に e を用いると，

$$\frac{d\log_a x}{dx} = \frac{1}{x}\log_a e \tag{45}$$

であることが分かります．特に，底を e とした対数を単に log とか，ln と書いて，自然対数と呼びます．$\log_e e = 1$ ですから，

自然対数の微分公式

$$\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{x} \tag{46}$$

(例題)

$dx^n/dx = nx^{n-1}$ となることは，2 項定理さえ知っていれば，導関数の定義から導けました．では，n が自然数でない場合はどうなるでしょうか．実は，やはり同じ形の公式が成り立つのです．

$x > 0$，p は任意の実数とする．

$$\frac{dx^p}{dx} = px^{p-1} \tag{47}$$

(証明)

$y = x^p$ の両辺の対数をとってから x で微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{d\log y}{dx} &= \frac{d\log x^p}{dx} \\
\frac{d\log y}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} &= \frac{d(p\log x)}{dx} \\
\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} &= \frac{p}{x} \qquad (48)
\end{aligned}$$

よって,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{x}y = px^{p-1} \tag{49}$$

(証明終)

この証明は，数 III のテキストでは皆同じように与えられています．両辺を微分して合成関数の微分を用いたりして，なかなか，小粋な証明のしかたですね．

1.2.3 指数関数の微分

それでは，自然定数を底とする指数関数 e^x を微分係数を求めましょう．

$$y = e^x \tag{50}$$

は，自然対数の逆関数

$$x = \log y \tag{51}$$

ですね．したがって,「逆関数の微分」公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \tag{52}$$

を $x = \log y$ に対して用いると，$dx/dy = 1/y$ ですから，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1/y} = y \tag{53}$$

よって $y = e^x$ を代入して，次の公式を得ます.

指数関数の微分公式

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \tag{54}$$

問題：次の導関数を求めよ．$(a > 0)$

$$\frac{d}{dx}a^x \tag{55}$$

この資料を読んで，分かりにくかったこと，もっと知りたかったことをお知らせ下さい．
皆さんのご意見を取り入れて，どんどん改良したいと思います．是非とも，ご協力をお願いします．
研究室：自然館 2F 新田研究室
e-mail: nitta@u-gakugei.ac.jp