05/29/2000
力学・補助教材 (新田英雄)

テイラー展開

ここでは、ちょっと変わったやり方で、テイラー展開

$$f(x+a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)x^n \tag{1}$$

が成り立つことを示す [1]。

いま，考えている x の範囲（変域）では発散しなくて，何回でも微分できる関数 $f(x)$ があるとする．このような関数は，一般に、次のような x の多項式の無限級数の形に表すことができる:

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m x^m \tag{2}$$

係数 C_m はゼロをとっても構わない．(2) 式を用いると $f(x+a)$ は

$$f(x+a)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m(x+a)^m \tag{3}$$

となる．ここで 2 項定理から

$$(x+a)^m=\sum_{l=0}^{m}\frac{m!}{(m-l)!l!}x^{m-l}a^l \tag{4}$$

だから，式 (3) は

$$f(x+a)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{m}C_m\frac{m!}{(m-l)!l!}x^{m-l}a^l \tag{5}$$

と書き直される．

一方，式 (2) を微分していくと (m 階の微分を $f^{(m)}(x)$ と表して)

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= \frac{d}{dx}\sum_{m=0}^{\infty}C_m x^m \\
&= \frac{d}{dx}(C_0+C_1x^1+C_2x^2+C_3x^3+ \\
&\quad \cdots+C_mx^m+\cdots) \\
&= C_1+C_2\cdot 2x^1+C_3\cdot 3x^2+ \\
&\quad \cdots+C_m\cdot mx^{m-1}+\cdots \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}C_{m+1}(m+1)x^m \\
f^{(2)}(x) &= \frac{d}{dx}f^{(1)}(x) \\
&= \frac{d}{dx}\sum_{m=0}^{\infty}C_{m+1}(m+1)x^m \\
&= \frac{d}{dx}(C_1+C_2\cdot 2x^1+C_3\cdot 3x^2+ \\
&\quad \cdots+C_m\cdot mx^{m-1}+\cdots) \\
&= C_2\cdot 2\cdot 1+C_3\cdot 3\cdot 2x^1+ \\
&\quad \cdots+C_m\cdot m\cdot(m-1)x^{m-2}+\cdots \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}C_{m+1}(m+1)mx^{m-1} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}C_{m+2}(m+2)(m+1)x^m \\
&\cdots \\
f^{(l)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty}C_{m+l}(m+l)(m+l-1)\cdots(m+1)x^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}C_{m+l}\frac{(m+l)!}{m!}x^m
\end{aligned} \tag{6}$$

となる．ただし，1 回微分するごとに和の添え字を上げていって，x のべきが常にゼロからスタートするように調節した．最後の式から

$$f^{(l)}(a)=\sum_{m=0}^{\infty}C_{m+l}\frac{(m+l)!}{m!}a^m \tag{7}$$

が成り立つことがわかる．これから

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}f^{(l)}(a)x^l=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_{m+l}\frac{(m+l)!}{l!m!}a^mx^l \tag{8}$$

という式が得られる．ここで $l=n-m$ と置き換えて，l と m の和を m と n のものに変換すると ($l\geq 0$ だから $m\leq n$ という制限が加わることに注意して), 式 (8) は

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}f^{(l)}(a)x^l=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}C_n\frac{n!}{(n-m)!m!}a^mx^{n-m} \tag{9}$$

となる．この右辺は式 (5) の右辺と一致しているから ($l=n$ とおき直して)

$$f(x+a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)x^n \tag{10}$$

を得る．これは，テイラー展開の公式である．

特に、$a=0$ としたもの

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n \tag{11}$$

はよく用いられる。これをマクローリン展開と呼ぶことがある。

0.1 テイラー展開の例

1.

$$f(x)=e^x \tag{12}$$

$\exp(x)$ は、何回微分しても $\exp(x)$、つまり

$$f^{(n)}(x)=e^x \tag{13}$$

であるから、(11) 式に

$$f^{(n)}(0)=e^0=1 \tag{14}$$

を代入すると、

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \tag{15}$$

を得る。

2.

$$f(x)=\cos x \tag{16}$$

コサインは、一回微分するとサインになり (マイナスがつくが)、サインを一回微分するとコサインになる。この繰り返しで

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= -\sin x, \\ f^{(2)}(x) &= \frac{d}{dx}f^{(1)}(x)=-\cos x, \\ f^{(3)}(x) &= \frac{d}{dx}f^{(2)}(x)=\sin x, \\ f^{(4)}(x) &= \cos x \\ &\cdots \end{aligned} \tag{17}$$

これより、奇数回微分したものはサインに、偶数回微分したものはコサインになり、符号はサイン・コサインが一巡りする毎に代わることが分かる。そこで $f^{(n)}$ を、n が奇数のものと偶数のものに分けて書くと

$$\begin{aligned} f^{(2m)}(x) &= \frac{d^{2m}\cos x}{dx^{2m}}=(-1)^m\cos x \\ f^{(2m+1)}(x) &= \frac{d^{2m+1}\cos x}{dx^{2m+1}}=(-1)^{m+1}\sin x \\ &(m=0,1,2,3,\cdots) \end{aligned} \tag{18}$$

となる。$x=0$ を代入すると

$$\begin{aligned} f^{(2m)}(0) &= (-1)^m\cos 0=(-1)^m \\ f^{(2m+1)}(0) &= (-1)^m\sin 0=0 \\ &(m=0,1,2,3,\cdots) \end{aligned} \tag{19}$$

であるから、(11) 式では $n=$ 偶数 $=2m$ の項だけが残って

$$\cos x=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} \tag{20}$$

となる。(よく分からなくなった人は、(6) 式のように具体的に各項を書き並べて計算してみなさい。)

3.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}} \tag{21}$$

微分していくと

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= \frac{1}{2}(1-x)^{-3/2} \\ f^{(2)}(x) &= \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}(1-x)^{-5/2} \\ &\cdots \end{aligned} \tag{22}$$

となる。マクローリン展開の最初の 3 項までを書くと

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\cdots \tag{23}$$

となることがわかる．

参考文献

[1] 新田英雄「物理と特殊関数」(共立出版) (1997)（有馬朗人・大槻義彦編「物理数学 One Point」第 16 巻）