

空間思考の育成に向けて 3

— 正多面体の対称性と双対性，正射影の教材化の試みと実践報告 —

小野田 啓子
数学科

要約

児童・生徒の空間を把握する解析力・思考力の育成を図る教材の開発と指導方法の研究を目的として、①正多面体を制作しその性質を調べる学習を中学1年生の空間図形で行った。^{[1] [2]} その実践の反省点として、正多面体の『双対性』の位置付けが不明確であったことがあげられる。そこで、正多面体の『対称性』に着目して、『双対な立体』同士の対称性が同じであることを見つける授業を行い、『双対性』を『対称性』との関係で学習内容に位置付けることを試みた。同時に、正多面体を『対称性』に着目して分類する見方を養うこともねらいとした。結論として、生徒は、対称性が同じ立体は互いに双対な関係にあることを見つけ、対称性の分類も見通しを立てることが可能であったといえる。

②空間思考を伴う身近な題材で、数学が活用されている地図の図法の教材化を試みた。平面上の図形を球面上に正射影^[3]する方法を、三平方の定理を用いて、計量的に考える授業を中学3年生で行った。問題提示の方法と生徒の活動方法についての、今後の課題と成果について報告を行う。

キーワード 立体の対称性 正多面体の双対性 正射影 三平方の定理の活用

I 正多面体の対称性と双対性

1 単元「立体の対称性」設定の理由

中学1年生の3学期に空間図形の学習として、正多面体を制作しその性質を調べる学習を行った。小学校での図形の学習をもとに、具体的な模型を使って立体をいろいろな観点から観察して、空間思考の育成を図る活動を検討した。具体物の操作・観察と、それを補完する目的で用いたコンピュータによるシミュレーションは、立体の頂点や面の形の動的な変化を考察し理解を深めることに効果的であったといえる。^{[1] [2]}

しかし、その実践の中で、正多面体の面・頂点の数を調べることによって見つけた『双対な立体』の関係について、この関係が何に生きるのか、今後の学習にどのようにつながるのかという位置付けが不十分であった点が課題として残った。

図形の学習は、小学校においては具体物を操作するという体験を通して、形の対称性など数学的

な性質を捉えていくが、中学校では立体を手にとって十分な観察を行い、立体の性質や特徴を学ぶ機会が不足しているのではないかと感じている。そこで、中学1年生の空間図形の学習に続いて、立体の見方を養う段階的な学習ができるとよいのではないかと考えた。

平面図形や立体の特徴を考えるときに重要な見方・考え方として、図形や立体の『対称性』がある。立体の対称性について、実際に模型を手にしていろいろな方向から観察して調べたり考えたりすることは、立体の見方を育てる上で大切な過程である。また、正多面体の『双対性』と『対称性』は密接な関係がある。以前の実践で課題であった、『双対な立体』同士の関係を『対称性』という見方でとらえることをねらいとして本単元を設定した。また、双対な立体同士の対称性が同じことから、正多面体の対称性は3種類に分類されるということにも気付かせたいと考えた。

2 単元計画

中学1年生空間図形における正多面体の授業実践の単元計画を次に掲載しておく。今回の授業は、「2次5. 多面体の性質」の中の双対性に関連した内容で、新たにこの計画に4次として追加したものである。(表中の太字)

次	項目	時間	学習内容
1	1. 正多面体の定義と模型作り	2	正多面体の定義 折り紙による模型作り (正4面体, 正8面体, 正20面体)
	2. 正多面体の模型作り	2	ビーズ球による模型作り (正6面体, 正12面体)
	3. 正多面体の種類	2	立体ができるための条件 正多面体が5種類しかない理由, デカルトの定理
	4. 準正多面体の模型作り	2	準正多面体の定義と種類

			準正 32 面体 (サッカーボール型) 制作
2	5. 多面体の性質	2	多面体がもつ諸数量を調べる 面・辺・頂点の間に成り立つ関係 オイラーの定理 双対性 多面体と準正多面体の関係 3D-GRAPES を用いたシミュレーション
3	6. 立体ができる理由と条件	2	5 角形と 6 角形で作れる立体の構造 オイラーの定理の活用
4	7. 正多面体の対称性(実践授業)	1	正多面体の対称性と双対性の関係

3 授業の概要

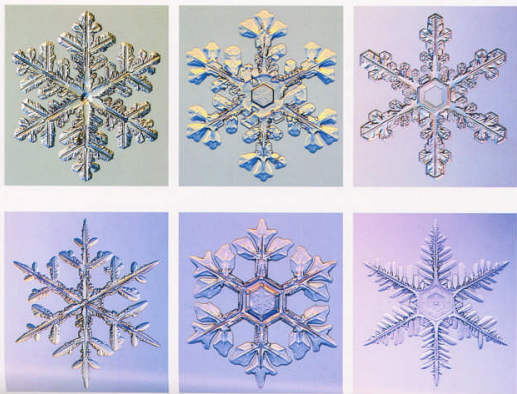

(1) 授業のねらい

- ① 平面図形と比較しながら、立体図形の対称性を考える。
- ② 立方体と正 8 面体の対称面の数を調べる。
- ③ 立方体と正 8 面体の対称面の数が同じであることから、双対性と対称性との関係を考える。

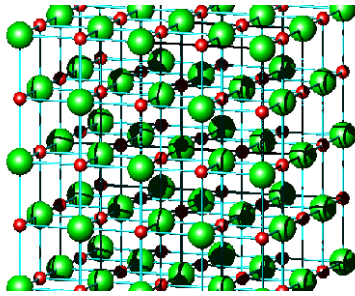
(2) 対象クラスと実施時期

本来は、中学 1 年生の空間図形の中の正多面体の単元の一部として実施することを考えているが、今回の授業は 1 年生で多面体の授業を受けた生徒たちが、中学 2 年生になってから 1 学期末

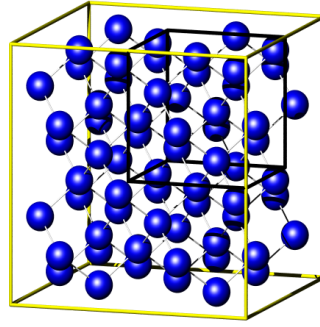
(4) 実際の授業の展開

授業の流れ	○教師の問いかけと指導内容, ・生徒の発言, 課題 板書事項	★留意点・支援 ◇評価の観点
1. 導入	<p>○1 雪の結晶の形や西洋の庭園の例をスクリーンに提示して、どんな感想を持ちますかと問う。</p> <p>・きれいな形。</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;">  </div> <p>[資料] 雪の結晶 著者: ケン・リブレクト (矢野真千子=訳) 河出書房新社</p>  <p>[資料] 世界の歴史教科書シリーズ9 フランスIII 原著者: ピエール=ミルザ, セルジュ=ベルスタン, J.-L.モスロン 帝国書院</p>	<p>★身のまわりにある対称・非対称なものから受ける印象をひきだすことから、対称的なものを考える動機付けを行う。</p> <p>★正多面体の形は、人工的な例ではなく自然界にあるものを提示する。</p> <p>◇関心・態度</p>

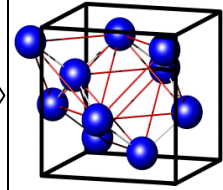
- 2 形の特徴についていえることは何ですか。
 - ・雪の結晶や西洋の庭の形は左右対称。
- 3 立体にも左右対称な形というのはあるのでしょうか。
 - ・あると思う。
- 4 どんな立体が思いうかびますか。
 - ・立方体や直方体や円柱
- 5 対称性のある立体の例を自然界の中から提示する。身の回りの物質の構造として、NaCl, ダイヤモンドの構造をCG (POV-Ray)で提示する。



NaCl 結晶構造図



ダイヤモンド構造図



資料をスクリーンに提示

2. 展開①

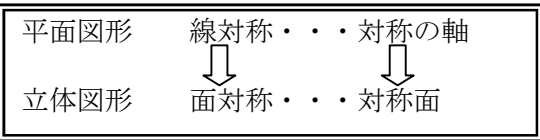
- 6 この中にどのような立体図形が見つかりますか。
 - ・NaCl の方は立方体の形, ダイヤモンドは規則性があるようだがよくわからない (正4面体)。
- 7 今日は立体の対称性について勉強していきます。物質を作る構造にも出てきた立方体にはどんな対称的な性質があるか考えてみよう。

立方体のなかにある対称性について調べてみよう。

- 8 復習です, 「平面図形」には何対称がありましたか。
 - ・線対称や点対称。
- 9 では, 立方体にはどんな対称性があるでしょうか。
 - ・左右対称。
 - ・点対称もあるのではないかな。等
- 10 左右対称とはどういうことですか。
 - ・立方体では直線ではなくて, 平面をはさんで左右が同じ形ということ。(生徒に投影機で提示してもらう。)
- 11 平面はどのように決まるのですか。
 - ・立方体の向かい合う正方形の面の辺の中点を直線で結ぶと, 上と下の面にできる2直線は平行な直線なのでそれを含む平面が1つに決まる。(下線部: 授業後の追加部)



【定義】ある平面をはさんで左右が対称な関係にあるときこの立体図形は面対称な図形であるといい, その平面を対称面という。



★以前の実践^①で, 面対称ということばが生徒から出ていたので, 今回その定義をきちんと行う。

★面対称の定義は文献[4]を参考に脚注1)を踏まえて定義をする。ただし, 生徒の状況に応じて具体的に理解できればよいとする。

◇数学的な考え方

◇知識・理解

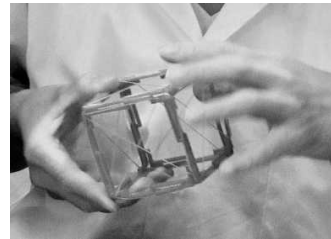
○12 立方体の対称面がいくつあるか調べてみよう。けれどその前に、直方体の対称面がいくつあるか考えてみよう。分かるかな。
 ・辺の中点を結んだ場合。(生徒に、模型に対称面の輪郭をかいて投影機で提示してもらおう。)



〔直方体の対称面〕

○13 直方体の対称面は3つですね。この対称面は、立方体の場合にもあてはまりますか。

・あてはまる。
 ○14 立方体には他に対称面はありますか。あれば、いくつあるか調べてください。互いに平行な2直線によって対称面がきまるので、輪ゴムを模型にかけて対称面を考えることにしてみてください。そして、対称面がいくつあるか、どのように数えたら分かりやすいのかも考えてみてください。(生徒:模型を使って調べる。輪ゴムを使って面を作る。下線部は、授業後の追加部分。)



〔輪ゴムをかけて対称面を探す〕

・他に6つ。(投影機で提示してもらおう。右写真のスクリーン。)

〔立方体の対称面の求め方について〕(生徒説明)

立方体の向かい合う2つの面を1組と見て考えると、

a 正方形の辺の中点を通る面が各組に2つ。3組では、重なりがあるので、 $2 \times 3 \div 2 = 3$ 個。(直方体も同じ)(図2の **a**)

b 正方形の頂点を通る面が各組に2つ。
 3組では重なりはないから、 $2 \times 3 = 6$ 個。(図2の **b**)

立方体の対称面	面の対角線方向に頂点を通る面で6つ
	辺の中点を通る面で3つ
合計	9つ

3. 展開②

○15 正8面体の対称性についても調べてみよう。

正8面体の対称性についても考えてみよう。

○16 正8面体も面対称な図形といえますか。

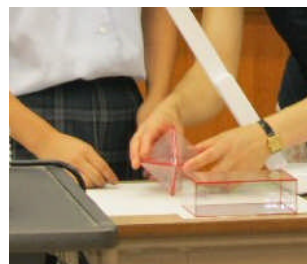
・いえる。

○17 どんな対称面がありますか。

・(投影機で生徒説明。右写真。)

○18 ひとつずつ調べていきましょう。このような対称面はあといくつありますか。(頂点を通る面をさして)

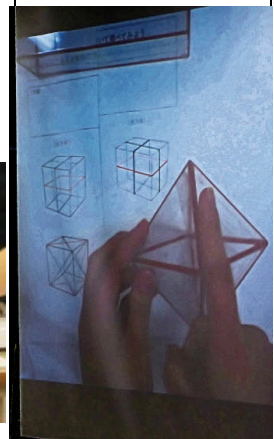
・3つ。(生徒に提示してもらおう。スクリーン写真。)



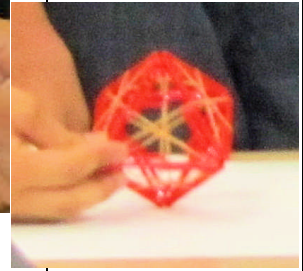
◇数学的な考え方
 ◇表現・処理



◇数学的な考え方
 ◇表現・処理



- 19 これ以外にいくつ対称面がありますか。いくつあるのかをどのように考えると分かりやすいですか。
- ・ 6つ
 - ・ 分かりにくい



[正 8 面体の対称面] (生徒説明)
 【その 1】正 8 面体の向かい合う 2 つの頂点を 1 組と見て考えると、頂点の組は 3 組。①頂点から見て頂点のまわりの 4 つの正三角形の辺の中点を通る面が各組に 2 つ。3 組では、 $2 \times 3 = 6$ つ。(図 4 の b)
 ②頂点を上から見て正三角形の頂点を通る面が各組に 2 つ。3 組では重なりがあるから、 $2 \times 3 \div 2 = 3$ つ。
 【その 2】①正 8 面体の向かい合う 2 つの正三角形の面を 1 組と見て考えると、正三角形の辺の中点を通る面が各組に 3 つ。4 組あり、重なりがあるから、 $3 \times 4 \div 2 = 6$ つ。②頂点を通る面は 3 つ。(図 4 の a) (太字部分：生徒の授業中多かった考え方)

正 8 面体の対称面	頂点を通る面で 3 つ
	辺の中点を通る面で 6 つ
合計 9 つ	

4. 展開③

- 20 立方体と正 8 面体の対称面の数を調べて何か気づくことはありませんか。
- ・ 対称面の数が同じ。
 - ・ 立方体の辺の中点と正 8 面体の頂点を通る対称面の数が同じで、立方体の頂点と正 8 面体の辺の中点をとおる対称面の数が同じ。
- 21 偶然でしょうか。それとも何か理由がありますか。
 (考えがでない場合：斜体部分を聞く↓)
- 22 立方体と正 8 面体の関係で何か思い出すことはありませんか。
- ・ 双対な立体。
- 23 立方体と正 8 面体の関係は、模型で示すとこのような関係でしたね。(立方体の中に正 8 面体を入れ子にした模型を提示) (図 7 参照)
- ・ **立方体の辺の中点を結んでできる対称面と正 8 面体の頂点を通る対称面は同じ平面である。また、立方体の頂点を通る正方形の対角線のできる対称面と正 8 面体の正三角形の辺の中点を通る対称面も同じ平面で、9 つ全部が重なっている。**
- 24 他に双対な関係にある立体は何がありますか。
- ・ 正 12 面体と正 20 面体。
 (・正 4 面体は自分自身。)
- 25 正 12 面体と正 20 面体も調べてみると対称面の数が同じになるかな。
- ・ なると思う。
- 26 では、やれそうな人はいくつあるか調べてみてください。
- 27 それから、正多面体は 5 種類あるけど、立方体と正 8 面体は対称面の数が同じだった。正 12 面体と正 20 面体も同じだろうとすると、正多面体は対称性に注目してみると、3 種類に分けられることになるね。
- 28 立方体と正 8 面体の対称性についていえることは何ですか。
- ・ 面対称な立体である。
 - ・ 対称面はどちらも 9 つ。
- 29 今日の学習の感想を書いてください。
- ・ 互いに双対な関係にあることから、対称面が重なることがわかる。

5. まとめ

6. 学習を振り返り、

★対称面の数、軸の数が等しいことの原因を明らかにして進むようにする。

◇数学的な考え方

★発展課題とし、具体的には調べてみたい生徒の課題とする。

◇数学的な考え方
 ◇表現・処理

◇学習内容をふり返り、自分の考えを書いている。

感想をまとめる。

脚注1)

面対称の定義^[4]: 1つの空間図形が、ある平面 α に関する対称移動により、自分自身に重ね合わせられるとき、この図形は α に関して面対称であるといい、 α を対称面という。

対称移動の定義^[4]: 1平面 α が存在して、 α 上の点は動かない。 α 上でない点Pとその対応する点P'を結ぶPP'は、 α に垂直で中点で交わる。この移動を対称移動という。

4 授業の考察

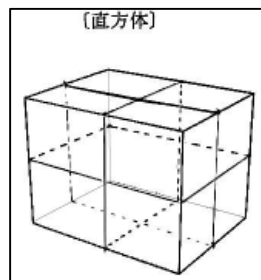
生徒は、○1や○2を受けて、○3や○4は直ぐに答えを返してきた。○5では、自然界に正多面体のような基本的な形をしたものがあることを紹介しておきたいと考えてこの例にした。2年生の1学期では、まだ原子や元素記号が未習であったため、補足説明等の必要があった。

立方体の対称性について質問した○10において、生徒は平面図形の線対称の対称軸にあたるものとして、立体の場合は「軸」が「面」となることを考えることができた。しかし、ここで対称面(平面)が何故1つに決まるのかということの根拠を確認せずに進んでしまった点が、実際の授業展開時における反省点である。この点を、東京学芸大学中村光一先生にご指摘いただき、○11は授業後に追加をした。平面が1つに決まる場合として、4つの条件があるが、そのどの条件にあてはまり、対称面ができるのかは、生徒に確認させる必要があると考える。

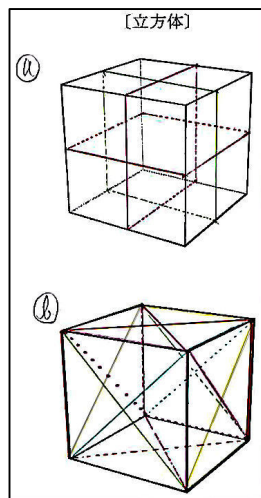
○12で直方体の対称面を問うと、多くの生徒は答えることができた。生徒のワークシートは(図1)の通りである。○14の立方体の対称面の求め方についての生徒の説明は、aとbを区別して行うことができた。(図2)のaとbの求め方を、生徒は(図3)のようにワークシートにまとめた。

〔立方体の中にひく線〕
 ①のパターン 3本 } 計 9本
 ②のパターン 6本 }
 (試) $6(\text{面}) \div 2 \times 2 = 6$ 1つの面に交差する方に
 向かう面を1セットとする。

(図3)



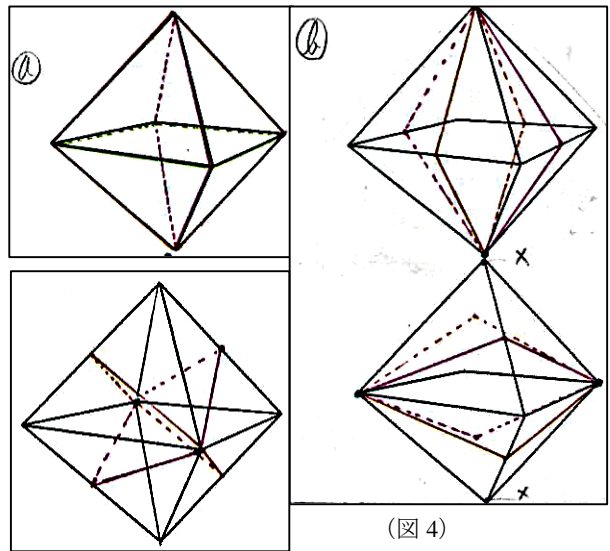
(図1)



(図2)

○18○19の正8面体の対称面については、展開部に太字で表わした考え方が生徒からでた考え方であった。生徒は、立方体に比べて説明の方法に

困っていたが、立方体を参考にしてまとめていた。



(図4)

生徒のワークシートにかかれた図は(図4)、その説明は(図5)である。

〔正8面体の中にひく線〕 計 9本
 ①のパターン 3本 }
 ②のパターン 6本 } 8つの面のうち、上下の面を1セットとして
 互いに向かい合う面に1本ずつひく。8=2=4、4=2=2で2本の線がひける。
 (試) $6(\text{点}) \div 2 \times 2 = 6$ 頂点と対点と反対側の点を1セットにする。

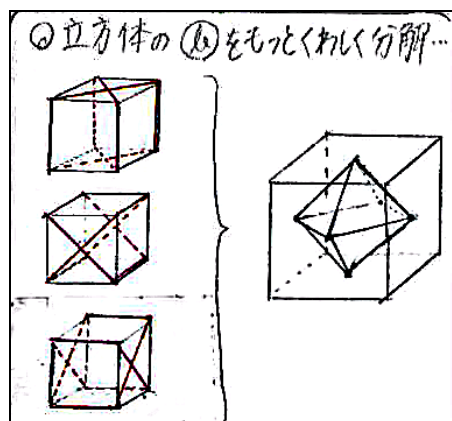
(図5)

展開③の○20であるが、立方体、正8面体の対称面を調べてきたことによって、生徒の方からこのことに気付き、何故なのかという疑問が起こってもおかしくはない。授業時に教師の側から聞いてしまったことが反省点である。具体的に教師が配慮することとして、調べた結果をワークシートにかいて提示するのではなく、板書しておくことがあげられる。重要なことがらを、いつでも生徒が確認できるように板書しておくことは大切な配慮である。実際に時間はかかったが板書が多かったクラスと、ワークシートに記入して書画カメラで提示をしたクラスでは、議論の活発さに差があった。板書の工夫が必要であった。本時の展開では、○23の模型の提示がイメージをつかむのに有効であった。(図6)は生徒が書いたまとめである。(図7)は立方体のbの対称面が正8面体の場合の

対称面と同じになることを考えている図である。

〔まとめ〕
立方体と正8面体の対称性の共通点として、立体の中にひける線の本数が9本ということがある。理由として、立方体の面の数と正8面体の点の数が等しいことがあげられる。正8面体の1辺の半分のところに点をうち、点を結ぶと立方体になる。すると、立方体の線の引き方と、正8面体の線の引き方は全く同じであることが言える。

(図6)



(図7)

以上のことから、本実践において、生徒は立体図形の面対称という性質を見つけ出して、正多面体の対称面を見つける活動を行うことができた。そして、立方体と正8面体の対称面が同じ数である理由を、2つの図形が双対な立体であることを考えて説明することができた。正多面体の対称性を考えることで、生徒にとって双対の関係が大きな意味を持つことになったと考える。また、正多面体の中で他に双対な関係にある立体は、正12面体と正20面体であるからこれらの対称性も同じになるかどうかは、○26のように発展課題とした。しかし、見通しとして同じ対称性があるであろうという予想を生徒は立てることができた。授業を行った後になるが、数学室で模型を手にして対称面を数えている生徒が何名かいた。興味を持った生徒にとっては、適当な課題であると感じた。○27のように、最後に話だけとなってしまったが、正多面体という基本的な立体は5種類あるが、対称性という見方でさらに少ない3種類に分類することができることになるという見方が、正多面体や準正多面体、いろいろな立体を分類するとき生きるかもしれないと考えた。

II 正射影の教材化の試みと実践報告

1 「球面への射影」設定の理由

昨年度は、模型を用いて空間図形の構造やその中に現れる数量を調べる学習の指導計画を立て、

実践を行った。その報告[1]のVI (5)に書いたように、身のまわりで活用されている数学に着目し、空間(3次元)における解析的な思考を助ける、コンピュータによる効果的な図表示(シミュレーション)の可能性を検討してきた。しかし、コンピュータはあくまで補助的な道具であることを確認しておく。

この実践を初めて行ったとき(2008)には、多くの生徒にとって苦手と感じる空間概念を身近に感じてもらおう試みとして、3D-GRAPES^[5]を使って、平面上の図を球面上に射影^[3]することをを行い、数学を活用する体験をしてもらいたいと考えた。(対象は高校3年生であった)^[6]

射影は、日常使っている地図に代表されるように、身近なところで使われている数学である。地球儀を平面的な地図に書き換えるためには、数学が必要である。ここでは、その逆の平面上にかいた図を、球面上に「正射図法」、「心射図法」等で射影する方法を考えてみたいと思った。これらの射影が、中学や高校で学ぶ数学を用いて表せることから、空間における解析的な思考力を育てる教材になるのではないかと考えた。

以上のことより、2008年の実践を振り返って、中学生の段階にあった空間思考を育てる目的で、身近な題材であり、数学が活用されている地図の図法の教材化を試みた。平面上の図形を球面上に正射影する方法を、中学3年生で学習する三平方の定理の活用という位置付けで、計量的に扱う授業を行った。問題提示の方法と生徒の活動方法についての、今後の課題と成果について報告を行う。

2 授業の概要

(1) 授業のねらい

- ① 地図の図法に使われている数学に関心を持つ。
- ② 平面から球面への正射影を考え、三平方の定理を使って、空間における点と点の対応関係を解析的に考える力を養う。
- ③ コンピュータを使って、平面上にかいた図形を球面に正射影した図をかき、球面上での形を捉える。

(2) コンピュータ活用のねらい

本授業では、様々なグラフや図形を素早くかくことができ、3次元というイメージしにくい対象を視覚的にわかりやすく提示することができるコンピュータのよさを活用した。瞬時に描画が可能な点は、図形の形を変えたらどうなるか調べてみようという生徒の活動を容易にし、数学的な性質を調べてみようという興味や関心に繋がると考える。

今回用いた3D-GRAPESは、生徒が容易に式を入力したりパラメータを変えたりする等の操作ができ、かいた図を回転させたり視点を変えたりし

て、いろいろな方向から観察をすることができる点が優れている。条件を様々に変えて、瞬時にグラフや図を描くことができるコンピュータの活用は、生徒にとって発展的、探求的な学習活動を可能にしてくれる有効な手段であるとする。

(3) 対象クラスと実施時期

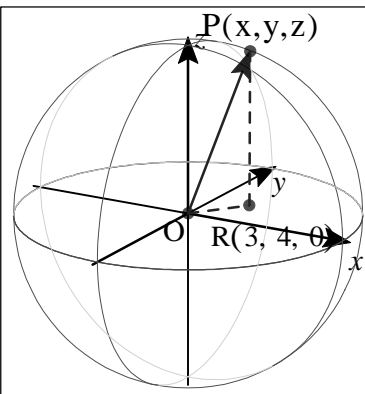
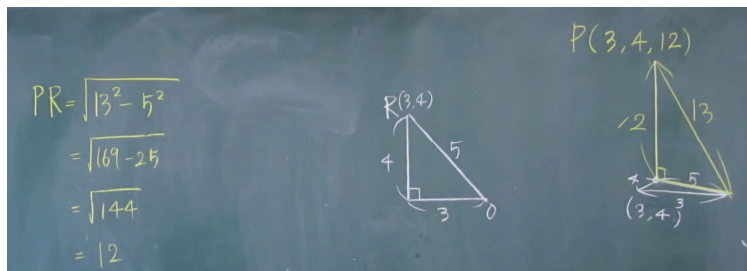
中学3年生2クラス(男子21名,女子21名 計42名)で,三平方の定理が既習である時期に実施。

今回は,3学期末(平成23年3月3日,7日)に各クラス1時間ずつ実施した。

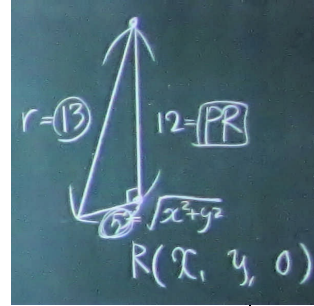
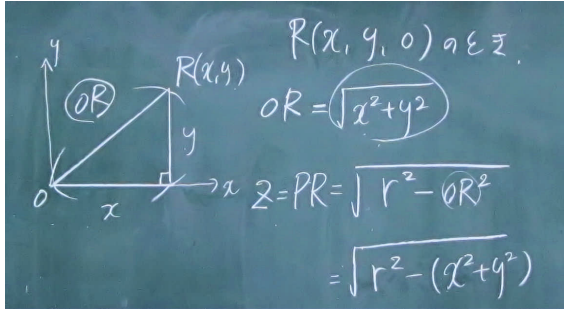
(4) 準備

地球儀,ワークシート,ノートパソコン*(4~5人で1台),3D-GRAPES,提示用および生徒操作ファイルをノートパソコンに準備。

(5) 実際の授業の展開

授業の流れ	○教師の問いかけと指導内容, 課題 ・生徒の発言, 板書事項	★留意点・支援 ◇評価の観点
1. 導入	<p>○1 (地球儀を見せて,) 球の上の形を平らな面にかいたものが地図です。球面上の形を平面にかき表すには, どのような方法が考えられますか。</p> <p>・地球を真上から写真に写して, その形を平面にかく。</p> <p>○2 写真に写したときに見える見え方だけど, 地球儀に「平行な光」を当ててみた見方で平面に写す図法を, 正射図法という。このような形の写し方を正射影という。</p> <div style="border: 3px double black; padding: 5px; text-align: center;"> <p>正射影 (正射図法) …平行な光をあてて, 球面上の点を真下 (平行な光に垂直) にうつす</p> </div>	<p>★問題を把握できるようにする。 ◇関心・態度</p> <p>◇数学的な考え方 ◇知識・理解</p>
2. 展開①	<p>○3 今日の課題は次の通りです。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>平面上にある点 $R(x,y)$ を, 球面に正射影した点 P の座標 (x,y,z) を求めてみよう。平面にかいた図を, 球面に射影するとどうなるか観察してみよう。</p> </div> <p>○4 平面上の点 $R(x,y,0)$ を球面に正射影した点を $P(x,y,z)$ とします。点 P の座標をどのように求めることができるでしょう。 $R(3,4,0)$ のとき, $P(x,y,z)$ を求めてみましょう。球の半径は, 13 とします。 (各自考える時間を取る。) ・ $OR=5$ で, $\triangle POR$ は直角三角形なので, $PR=12$ だから, $P(3,4,12)$</p> <div style="text-align: center;">  </div> <div style="text-align: center;">  </div> <p>○5 プリント右上にあるように, 一般の場合で表わすことができますか。</p>	<p>◇表現・処理</p> <p>◇表現・処理</p>

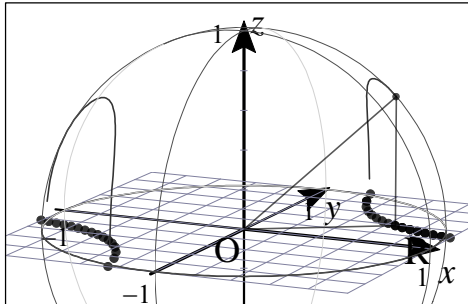
・板書参照。生徒に聞きながら教師が式を書く。



3. 展開②

○6 平面にかいた図を，球面に正射影した図をかいてみよう。
(始めにプリント4. に関して，3D-GRAPES とファイルの操作方法について説明とデモンストレーションをする。)

例えば， $y=1/4x$ のグラフを，球面に正射影すると次のようになる。



・4~5人で1台ノートパソコンを使い，ファイルを開いて，パラメータと図の向きを動かして観察する。

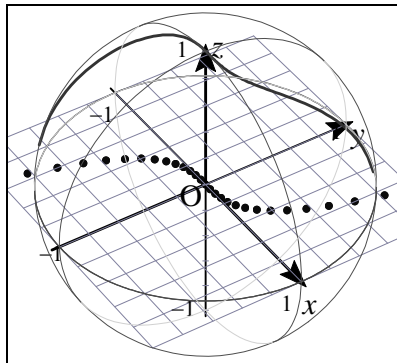
★ソフトの使い方がわからないグループの補助をする。

◇関心・意欲

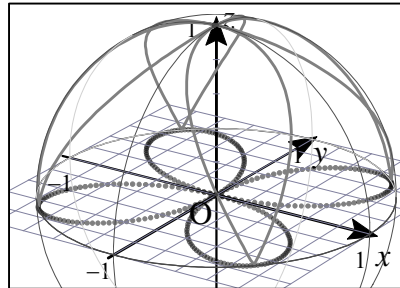
○7 「正射図法 2011_1.gp3」の中の点 R の式の形を変えて，自分がかいた式をプリントに書いておく。

・ $R(t,t^3,0)$, $(t,3t,0)$, 式 $y=t^4$, $y=\log_{10}x$, $y=\sin x \cos x$ 等

◇数学的な考え方

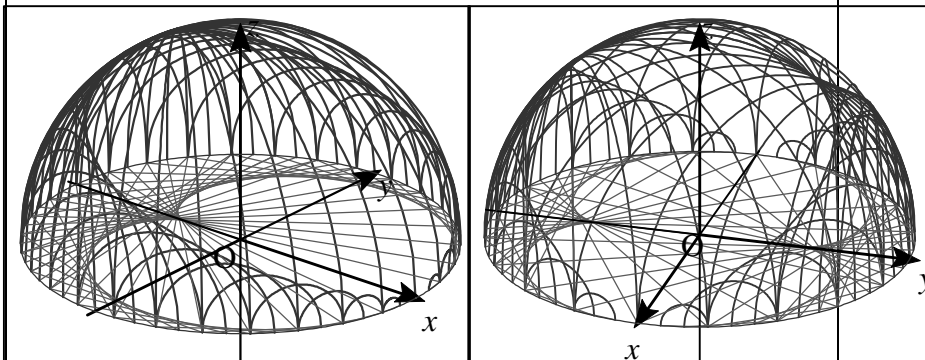


左図 $y=3t^3$



上図：正葉曲線

○8 「正射図法 2011_2.gp3」を開いて，直線群がつくる形の正射影をスクリーンに提示する。・生徒もパラメータを変えてかく。



4. 学習をふり返し，感想をかく。

○9 今日の学習の感想を書いてください。

◇学習をふり返る。

3 授業の考察 成果と課題

○1の質問に対して、さらに次のような生徒の考えがあった。(ワークシートから)

- ・北極に対して垂直に平行光線を当てて、影を映す。
- ・平行な光を当てて紙に映す。
- ・南極の真上から見ている。球の上から真下に向つす。

ワークシートにある図から考えたと思われるが、地図の図法は1年生の社会科で学習しているので、その内容を参考にして生徒への問いを考えるとよかつたと思う。

また、授業後のある生徒の感想として、3年生の理科で透明半球を使っているのを、それを使えばその生徒はよくわかつたという意見があった。

授業への**第1の課題**として、**問題の提示の仕方と生徒の具体的な活動の手立て**が必要であつたといふことがある。これに対しては、最初に「正射影」といふことばを出す必要はなく、生徒が課題を把握しやすいように、次のような課題を提示し、活動する方法を考えてみた。

〔課題〕紙の上にかかれた形を、紙の下側から平行な光を当てて、上にかぶせた半球面にうつしたいと思ひます。どのようにしたらいいですか。

生徒には透明半球と図形あるいはグラフをかいた紙を渡して考えさせる。生徒から、真上から見て真下の形を透明半球にうつせばよいという考えがでたら、水性ペンを渡して実際に球面にかかせてみる。それによって平面から球面への正射影によって、図形がどのようにうつるのかを観察することができると思ふ。また、実際に自力で正射影をした図やグラフをかいてみることも、この方法で可能となる。

○4、○5は、ワークシートにあらかじめ提示用の図がかいてあつた。そのため、**第2の課題**は、**生徒にとって点Pの座標を求めることが、考えるべき問題とならなかつた点**である。改善点として、ワークシートには球面、平面、座標軸と点R(3,4,0)だけをかいておくようにする。生徒に考えさせたのは、正射影では $PR \perp xy$ 平面の関係をとらえて、三平方の定理を用いて、点Pのz座標=PRを求めることができることに気付くことである。もちろん、点Pのx,y座標は点Rのx,y座標と同じであることも気付いてほしい。

以上のように、中学校で学んだ数学を活用して、空間を解析的にとらえることができることを知っ

てもらいたい。次の段階は、さらに他の射影(図法)はどのようにすればよいのか、ベクトルや三角関数を用いて考えようと思はれるとよいと思ふ。

また、○7の正葉曲線と○8の直線群の描く包絡線であるが、いろいろな曲線の正射影の例として教師からの一斉提示として紹介した。数式で表わされるグラフや図形を正射影するとどのようなになるか、高校で学ぶ曲線まで広げるといろいろな形を示すことができるので、興味や関心を持てるのではないかと考えた。

今回の実践は、普段担当していない3年生の2クラスで学年末のそれぞれ1時間ずつを使わせていただいて実施をした。最初のクラスで実施をした様子から、地図の図法3つから平射図法と心射図法の2つは授業では扱わないので除くことにし、正射影一つだけに絞って、2番目のクラスでは実施をした。今回の実践によって、生徒に考えさせる問題をどのように提示し、そこから生徒が何を学びとり今後の学習に生かしていけるのか、具体的な改善策を考えることができ、生徒の受け取め方も知ることができた。数学を活用して、空間思考を育てる教材として、どのようなよさがあるのか、問題点は何か、今後実践を行い検討をしたいと考えている。

最後に、この授業(1時間)の生徒の感想をあげておく。

- ・今まで平面上である直線をx軸やy軸に投影することはあつたが、平面を球面に投影することはなかつた。それなので、新鮮な感じがしました。
- ・数学的な優雅で美しい図形や模様感動した。
- ・平面と立体の点との関係が、難しいけどおもしろかつたです。
- ・二次元の考えから三次元の考えにうつるのは結構難かつたけど、簡単には理解できたと思ふ。
- ・パソコンでこのような遊び方があるなんて思ひませんでした。すごく面白かつたです。自分のパソコンでもできたらやってみたいと思ひました。
- ・高校数学が楽しみです。
- ・Rの式は作ることができませんでしたが、2Dから3Dになつた図形はわかりやすかつたです。変わった図形がおもしろかつたです。数学は奥が深いですね。
- ・PCを使った授業でとても画期的でした。習つたものが活用できてよかつたです。
- ・球はおもしろいと思つた!!まだまだ学んで行きたいです。

・パソコン1つでこんなことができるのか…。
 ・とても難しいように見えたけれど、やってみれば中3で学んだことで理解できて楽しかったです。きれいな模様、すてきだと思いました。
 ・今まで学習してきた2次元の関数などと違って、今日やったことは不思議な感じがしてとても楽しかった。
 ・地図のかき方は今まで考えたことがなかったので、興味深かったです。座標上にいろいろな図をかくことができると知って驚きました。
 ・パソコンで実際に速く作図できたのが楽しかったです。
 ・z座標が考え方によっては簡単に分かることが分かった。
 ・はじめはよく分からなかったけど、三平方の定理を使えば球面の座標を出せることに驚きました。パソコンを使って正射影できて、分かりやすかったです。
 ・平面から立体を考えるのは、とても複雑だったけどおもしろかったです。パソコンを使用して授業ができて、わかりやすかったです。
 ・三次元を考えることで、どうやったら高さ(z)を出すことができるかわかりました。また、パソコンを使って式を変えることで、考えもしなかった図形を見ることができて楽しかったです。自宅でもダウンロードして勉強するときに使ってみたいと思います。面白い授業でした。

VIII 謝辞

平面から球面への射影は、愛知県立春日井東高等学校 堀部和経先生、大阪教育大学附属高等学校池田校舎 友田勝久先生、神奈川県立横浜平沼高等学校 石谷優行先生と筆者の4人で中学生から高校生向けの数学教育雑誌に連載を執筆していたときに扱った「正多角形の対角線」の話題の中で、堀部和経先生が対角線をドームに写したいと発案されたのが始まりです。そのときに、筆者は空間思考の教材としての可能性を感じました。正射影と心射影は考えることができましたが、平射影は友田先生の力をお借りしました。いろいろな場合の射影図が、堀部先生のホームページの[3]に掲載されています。上記の先生方には豊かな発想とそれを教材化するまでの過程におけるご教示に対しまして、心から敬服いたしますと共にお礼を申し上げます。ありがとうございました。

また、本校数学科3年生担当 小岩大先生には、3年生での授業実践にあたり大変お世話になりました。心から感謝を申し上げます。

〔参考文献〕

- [1] 小野田啓子：「空間思考の育成に向けて」、東京学芸大学附属竹早中学紀要第48号, pp. 21-53, 2010
http://www.u-gakugei.ac.jp/~onodakk/math/indexchuugaku.htm#kuukan_sikou
- [2] 小野田啓子：「空間思考の育成に向けて 2」第43回数学教育論文発表会論文集, pp. 187-192, 2010
- [3] 堀部和経：数学とその周辺「DOME」25階
<http://horibe.jp/DOME.HTM>
- [4] 一松信, 竹之内脩(編)：新数学事典 大阪書籍 pp. 309-310
- [5] 友田勝久：3D-GRAPESは下記URLから最新版をダウンロードすることができます
<http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/index.html>
- [6] 小野田啓子：「正多角形の対角線と曲面への射影」第91回全国算数数学教育研究(京都)大会 高等学校部会コンピュータ分科会 日本数学教育学会誌総会特集号第91巻, p439, 2009

＊本研究は(Ⅰ)平成21年度科学研究費補助金(奨励研究)(課題番号21913003), (Ⅱ)平成22年度科学研究費補助金(奨励研究)(課題番号22913002), およびノートパソコンの一部は平成22年度東京学芸大学特別開発研究プロジェクト, 附属学校研究会プロジェクト研究の補助を受けて行われたものである。

〔資料：Ⅱ 正射影 ワークシート〕

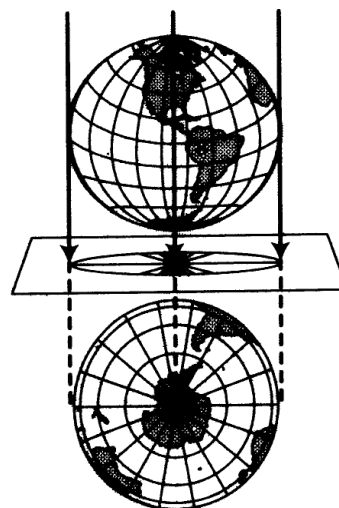
球面への射影 3年 組 番氏名 ()

1. 本時の課題

平面上にある点 $R(x,y)$ を、球面に正射影した点 P の座標 (x,y,z) を求めてみよう。
平面にかいた図を、球面に射影するとどうなるか観察してみよう。

2. 地球儀の上の点を平面に写す方法 (地図の作図法)

せいしやずほう
正射図法・・・

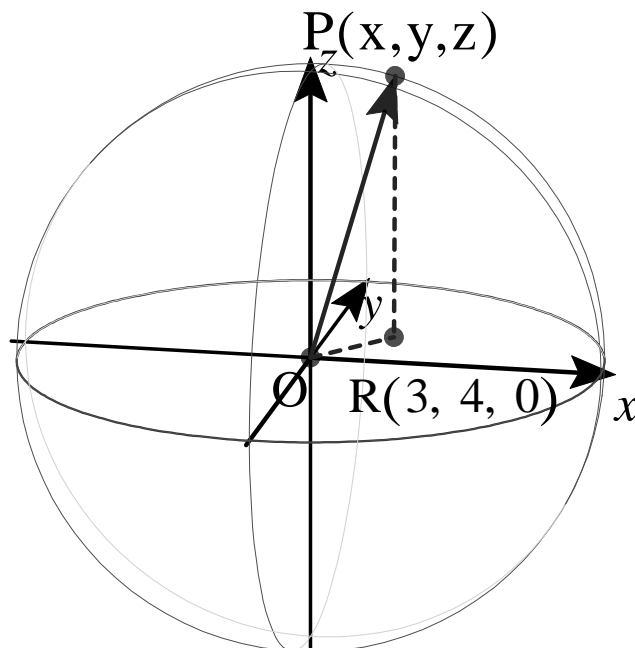


1.正射図法

3. 正射図法の射影方法を考えてみよう。

平面上の点 $R(x, y, 0)$ を球面に正射影した点を $P(x, y, z)$ とします。点 P の座標をどのように求めることができるでしょう。

[例] $R(3, 4, 0)$ のとき, $P(x, y, z)$ を求めてみましょう。球の半径は, 13 とします。



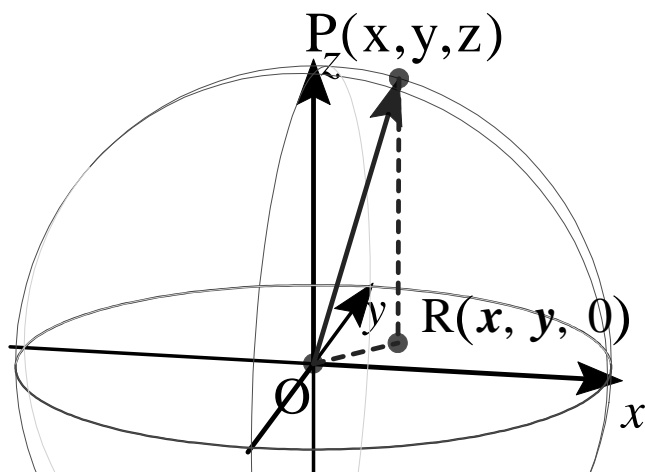
*一般的に考えてみましょう。

平面上の点 $R(x, y, 0)$ のときは、 R を球面に正射影した点 P の座標 (x, y, z) はどう表すことができるでしょう。球の半径は、 $r (=OP)$ としましょう。

$$OR = \sqrt{(\quad) + (\quad)}$$

$$z = PR = \sqrt{(\quad) - (\quad)}$$

$$= \sqrt{(\quad) - (\quad)}$$



よって、 P の座標は、 (\quad, \quad, \quad)

4. 平面にかいた図を球面に射影してみよう。

(1) 「正射図法 2011_1.jp3」 をダブルクリックして開く。

①点 R と曲線 C を描画するときは、パラメータ t を、 -1 から 1 の範囲で増減させてみよう。

点 R の座標ウィンドウ「 $(t, 1/4t, 0)$ 」をクリックし関数電卓を開いて、 y 座標の式を変えることができます。(例) $y = x^2$ をかきたいとき、 R のパラメータ表示を $(t, t^2, 0)$ とする。

$y = x^3$ をかきたいとき、 R のパラメータ表示を $(t, t^3, 0)$ とする。

②点 S と曲線 T を描画するときは、 R, C をマウスでクリックし、代わりに反転している S, T をクリックして表示できるようにする。

点 S と曲線 T を描画するときは、パラメータ t を、 0 から 6.3 の範囲で増減させてみよう。パラメータ b を整数値で増減させて、パラメータ t を変えて図をかいてみよう。

「3次元 GRAPES」の超簡単使い方マニュアル



*画面の図を回転させて見るには、マウスで画面をドラッグして動かしてもよい。

*おかしいことになったら、「視点を元に戻す」ボタンをおす。

[自分がかいた点 R の式を書いておこう]

[*最後に今日の授業の感想をお願いします]