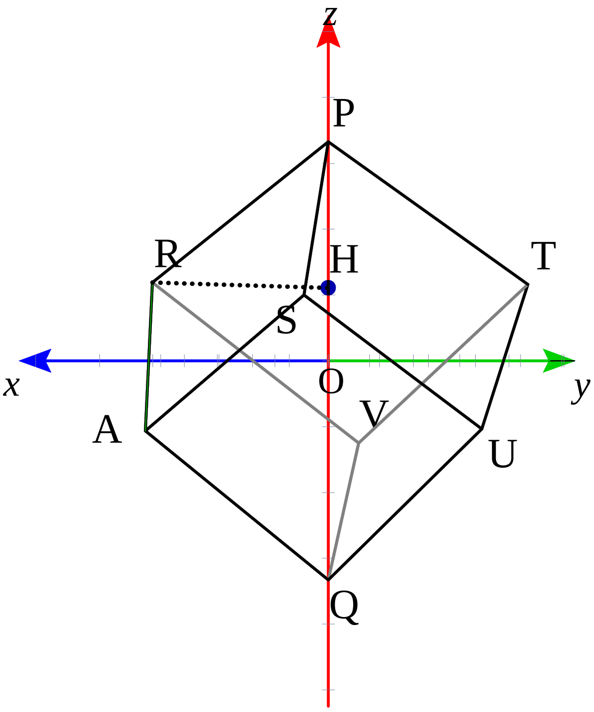
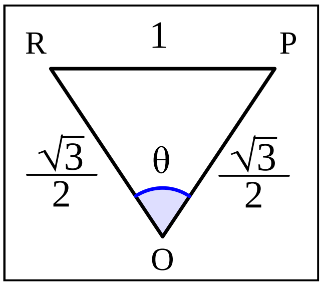
一辺の長さが１の立方体がある。その対角線を軸として，立方体を回転させたときにできる立体の体積を求める。



立方体の対角線 PQ を Z 軸にとる。

点 $P(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$Q(0,0,-\frac{\sqrt{3}}{2})$ とする。

頂点 P のまわりの３つの頂点 R，S，T を Z 軸のまわりに 120° ずつ回転させてとる。点 R の y 座標を 0 になるようにとると，下図より，



△OPR に対して余弦定理より，

$$1^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\cos\theta$$

$$1=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cos\theta \qquad \therefore \cos\theta=\frac{1}{3} \quad \cdots(\mathrm{i})$$

$0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$ より， $\qquad \therefore \sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \quad \cdots(\mathrm{ii})$

よって，R は P を(x,z)平面で θ だけ回転させて，(ｉ)，(ⅱ)より，

$$\mathrm{R(x,z\ 成分)}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3}\\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{6}\end{pmatrix}$$

$$\therefore R=\left(\frac{\sqrt{6}}{3},0,\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

点 S と T は，点 R を Z 軸のまわりに 120° ずつ回転させて，

$$S(x,y\text{成分})=\begin{pmatrix}\cos\frac{2}{3}\pi & \sin\frac{2}{3}\pi \\ -\sin\frac{2}{3}\pi & \cos\frac{2}{3}\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$ より，

$$\therefore S=\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$T(x,y\text{成分})=\begin{pmatrix}\cos\frac{2}{3}\pi & \sin\frac{2}{3}\pi \\ -\sin\frac{2}{3}\pi & \cos\frac{2}{3}\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$ より，

$$\therefore T=\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

残りの頂点を U=－R，V=－S，A=－T　とおく。

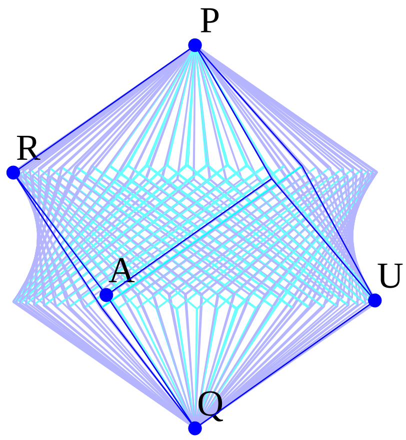
R から Z 軸におろした垂線の足を H とすると，$H=\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$

PH=PO－HO=$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

対称性から，U から Z 軸におろした垂線の足を I とすると，

I=－H より，RH=UI$=\frac{\sqrt{6}}{3}$　　…(iii)，QI=PH$=\frac{\sqrt{3}}{3}$　$\left(=\frac{PQ}{3}\right)$　　…(iv)

立方体を回転して得られる立体は，PH，QI を軸とした部分は，それぞれ PR, QU を母線とした円すいである。(iii)，(iv)より底面の半径と高さが等しいから上下の円すいの体積は等しい。次に，HI を軸とした部分は，線分 RA を回転させてできる面で双曲面となる。回転体の体積を上下の円すいと真ん中の側面が双曲面の立体の 2 つの部分に分けて求める。



［Ｉ］回転体の上下部分の体積

半径 r =RH=$\frac{\sqrt{6}}{3}$，高さ h =PH=$\frac{\sqrt{3}}{3}$　より，

$$V_{上下}=2\times\left\{\frac{\pi}{3}\times\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\times\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}=2\times\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi=\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi \qquad \cdots(\text{v})$$

〔Ⅱ〕回転体の真ん中の体積

RA の中点を M とすると，M=$\dfrac{R+A}{2}=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4},-\dfrac{\sqrt{2}}{4},0\right)$

（RM を回転してできる立体の体積）×2＝（RA を回転してできる立体の体積）
であるから，波線の体積を求めて 2 倍すればよい。
RM 上の点をパラメータを用いて表す。RM を $t:1-t$ に内分する点を X とする。$(0\leq t\leq 1)$

X=$\dfrac{(1-t)R+tM}{t+(1-t)}=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}-\dfrac{\sqrt{6}}{12}t,-\dfrac{\sqrt{2}}{4}t,\dfrac{\sqrt{3}}{6}(1-t)\right)$

Z 軸から X までの距離= r とすると，半径 r の円の面積は,

$\pi r^2=\pi\times\left(X_x{}^2+X_y{}^2\right)=\dfrac{\pi}{6}\left(t^2-2t+4\right)$

よって，RM を回転させてできる立体の体積は Z 軸方向に積分をして,

$V_{RM}=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{6}}\pi r^2dz$

ここで，$z=\dfrac{\sqrt{3}}{6}(1-t)$ より，$dz=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}dt$

z	$0\ \rightarrow\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}$
t	$1\ \rightarrow\ 0$

であるから,

$V_{RM}=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{6}}\dfrac{\pi}{6}(t^2-2t+4)dz$

$=\dfrac{\pi}{6}\int_1^0(t^2-2t+4)\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)dt$

$=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{36}\int_0^1(t^2-2t+4)dt=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{36}\left[\dfrac{t^3}{3}-t^2+4t\right]_0^1=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{36}\times\dfrac{10}{3}=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{18}\times\dfrac{5}{3}$

$V_{RA}=2\times V_{RM}=\dfrac{5\sqrt{3}}{27}\pi$　　…(ⅵ)

よって，求める立体の体積は，(ⅴ)+(ⅵ)より，$\dfrac{4\sqrt{3}}{27}\pi+\dfrac{5\sqrt{3}}{27}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$　　（終）