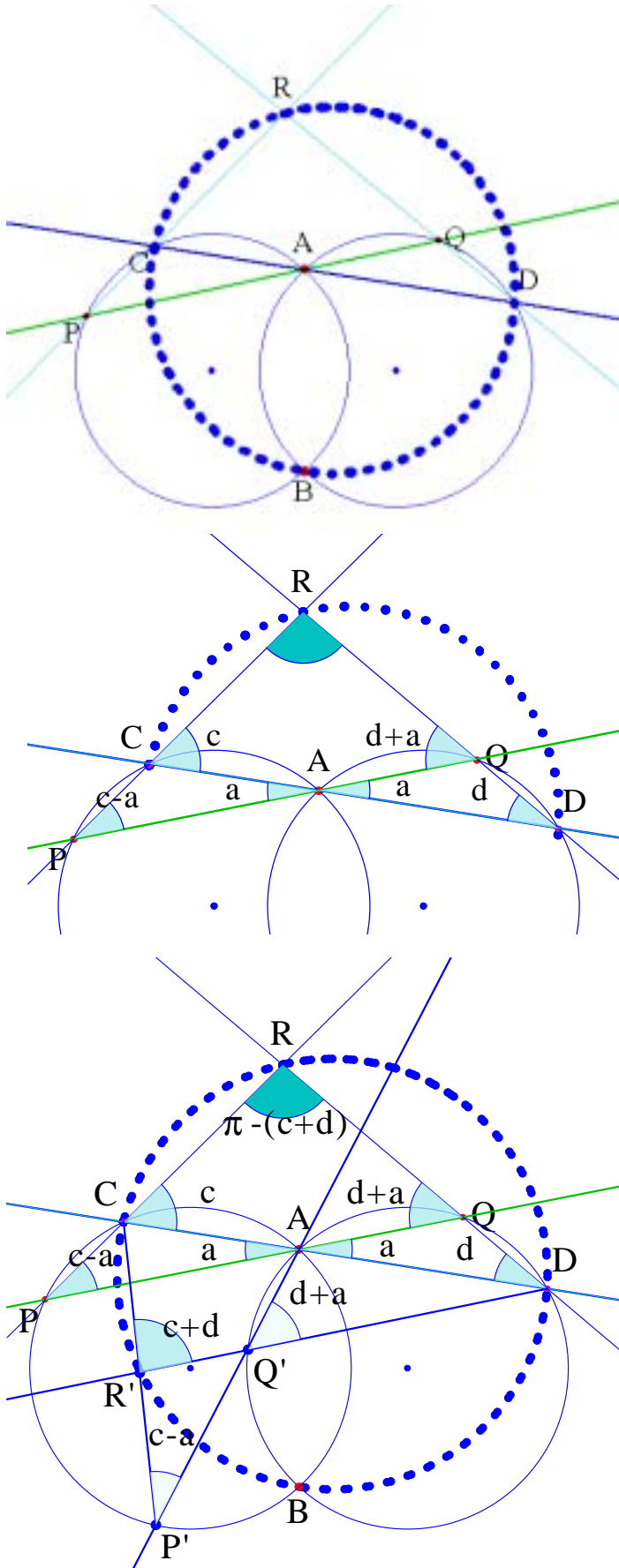


交わる 2 定円の交点 A, B の 1 つ A を通って、おのこの円と交わる定直線 CD があるとき、点 A を通っておのこの円と P, Q において交わる任意の直線 PQ を引けば、二弦 CP, DQ あるいはその延長の交点 R の軌跡は何か。(注 1)

問題は、上の文章のみで図は付いていない。軌跡がすぐには分からないときには、まずいくつかの場合を特別な場合も含めて描いてみて予想を立てることから始めていく。

(注 1) この問題は、秋山武太郎著「幾何学つれづれ草」第 4 講の中の練習問題である。答えは掲載されていない。

予想を立てる段階の説明は省略する。問題の内容を GRAPES を使って描いてみると、
下図のようになる。



点 R の軌跡は、3 点 B, C, D を通る、BCD の外接円である。点 B, C, D も含む。

〔解答〕

2 番目の図のように直線 PQ が交わっているときを考える。

CDR と PQR の内角において、Q は直線 PQ が定直線 CD となす回転角を a としたとき、D よりも a 増加しているので、

$$Q = d + a \dots$$

一方、P は C より a だけ減少するから、

$$P = c - a \dots$$

、より、

$$Q + P = d + c$$

よって、R は一定の大きさとなり、2 点 C, D を通る円の周上を動くことが分かる。

次に左下図のように 2 つの弦の交点 R が線分 CD を挟んで反対側 R' にくるときを考える。

このとき、四角形 AQ'DQ は円に内接する四角形より AQ'D は Q の補角となり、

$$Q' = d + a \dots$$

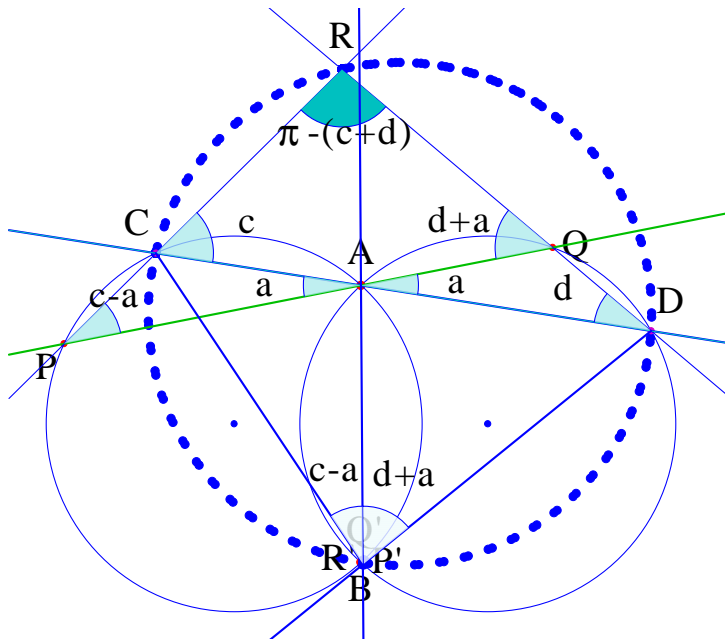
また、P' = P = c - a \dots

、より、

$$CR'D = Q' + P' = c + d$$

ゆえに、

$$R' + R =$$



よって、4点 C, R', D, R は同一円周上にある。

また、点 P が点 B に近づくと点 Q も点 B に近づく。

$P=B$ のとき、 $Q=B$ より、2弦 CP, DQ の交点 R は点 B と一致する。

よって、点 R の軌跡は、3点 B, C, D を通る円の周上、すなわち BCD の外接円となり、3点 B, C, D を含む。〔終〕

この問題は、さらに考察をすることで円と交わる直線の関係についての本質的な性質を導くことができそうな気がします。少なくとも、別の問題が考えられそうです。それは、今後の課題とします。

(2009.2.26 小野田啓子)