正 20 面体の各頂点の周りの５つの面をすべて異なる色にする組み合わせ

１．はじめに

折り紙で作った正三角形の板を使って，正 4 面体，正 8 面体，正 20 面体を作る課題に生徒が取り組んでいるとき，5 色の折り紙を使って正 20 面体の各頂点の周りの 5 つの面の色をどこも 5 色になるように作りたかったけど，難しかったという声を聞きました。

確かに，考えながら色の位置を決めていっても，すべての 12 個の頂点の周りが 5 色となる置き方にするのは難しいようです。そこで，正 20 面体の各頂点の周りの 5 つの面の色をどこも 5 色になるような置き方を考えてみました。

２．色の置き方

具体的に考えるときは，下図のような正 20 面体の展開図を使って考えました。
まず，色に{0 , 1 , 2 , 3 , 4 }と番号をつけて表すことにします。

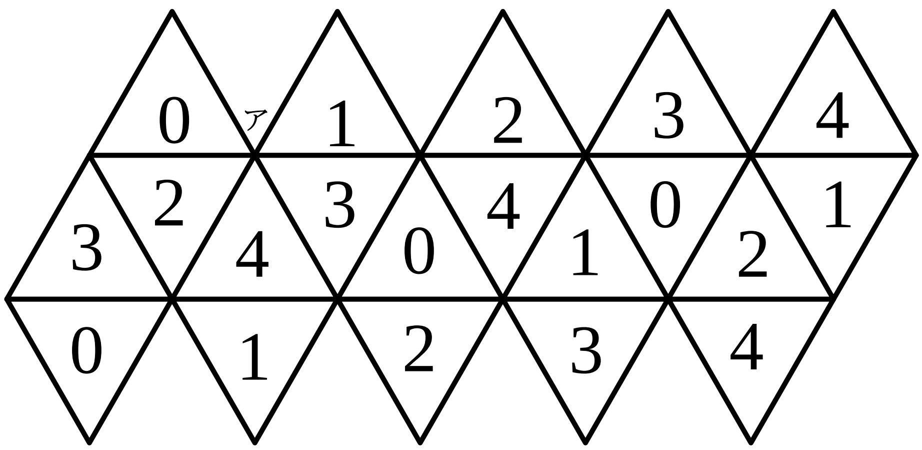
(1)　一番上の 5 個の三角形に 0～4 の番号をつけて，色の配列を決めます。

(2)　そのすぐ下の三角形は，頂点アの周りが 5 色となるために，0 と 1 以外の数字を書きますが，それにはすぐ上の三角形の番号に「2」を加えるか，または「3」を加えて，その数が 5 以上になったら 5 を引いた数字を書きます。1 と 4 を加えた数にすると，異なる 5 色にできません。

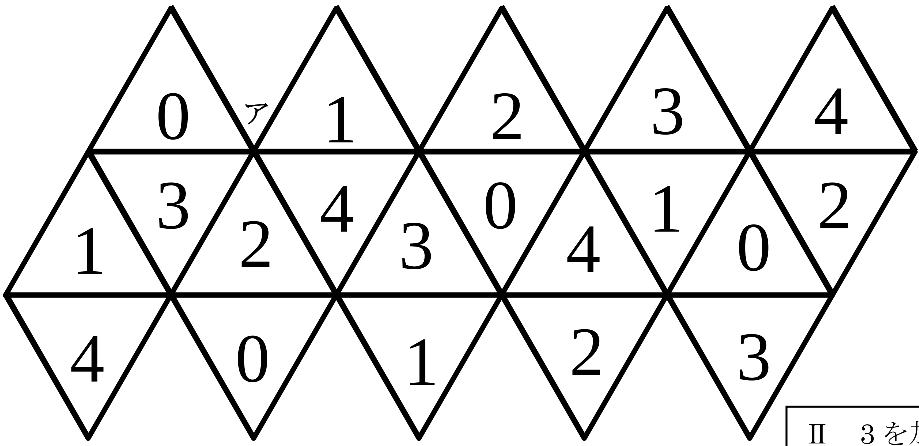
(3)　上から 3 番目の三角形は，頂点アなどの周りが 5 色となるようにすることから，残りの色番号が自動的に決まります。

(4)　最後の 4 番目の三角形は，すぐ上の三角形の番号に同様に「+2」か，または「+3」をして，その数が 5 以上になったら 5 を引いた数字を書きます。

このようにして考えられる置き方は，次のような 2 通りとなります。



Ⅰ　2 を加えた場合



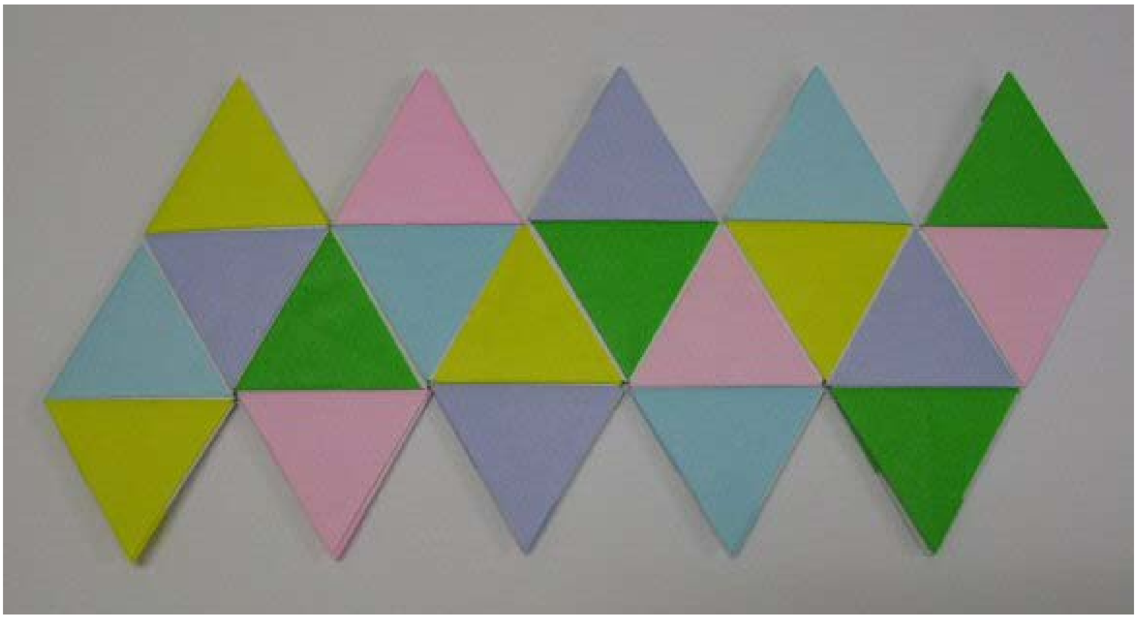
Ⅱ　3を加えた場合

この 2 つのパターンは，互いに鏡像の関係になっています。つまり，片方を裏返すともう片方と同じ置き方となります。折り紙の三角形で作った展開図が下の通りです。

番号と色の対応は次ようになっています。

0 → 黄色　，1 → 桃色　，2 → 紫色　，3 → 水色　，4 → 緑色

Ⅰ　2を加えた場合



Ⅱ　3 を加えた場合

「3 を加えた場合」の展開図を裏返すと，「2 を加えた場合」と同じ配置になります。（下図）

＊いずれ，この展開図を閉じたそれぞれの正 20 面体写真を追加するつもりです。

３．5 色の円順列の中で正 20 面体の配色に使われるもの

5 色の色を円盤状に置く置き方は，(5−1)！＝4×3×2×1=24 通りあり，裏返して同じ配置になるものを除くと，半分の 12 通りになります。このうち，Ⅰ，Ⅱの正 20 面体の配色に使われている円順列は，両方とも同じ円順列で次の①～⑥の 6 通りであることが調べて

みるとわかります。

①　0－1－2－3－4　　②　0－1－3－4－2　　③　0－1－4－2－3

④　0－2－1－4－3　　⑤　0－2－3－1－4　　⑥　0－3－1－2－4

正 20 面体には，実際には①～⑥の円順列と，それぞれを裏返したものを合わせて 12 通りの並び方が現れます。つまり，どの頂点のまわりの 5 色の並び方も違う円順列になります。

次に，使われていない円順列は，次の 6 通りです。

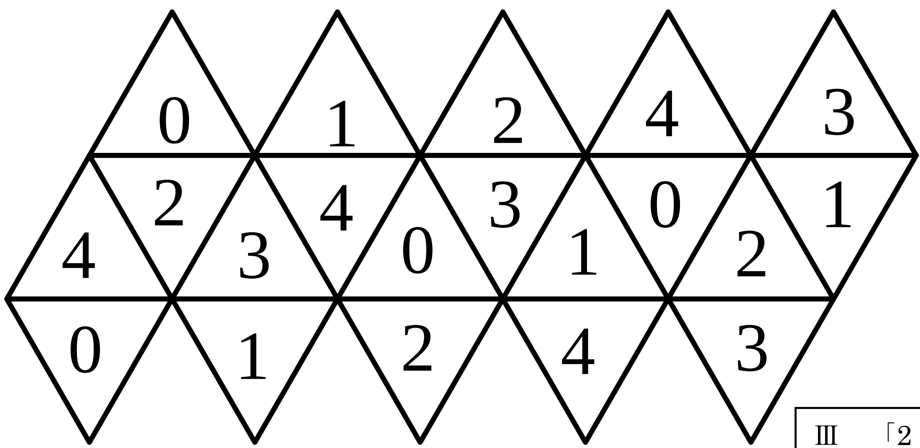
ⅰ　0－1－2－4－3　　ⅱ　0－1－3－2－4　　ⅲ　0－1－4－3－2

ⅳ　0－2－1－3－4　　ⅴ　0－2－4－1－3　　ⅵ　0－3－2－1－4

ⅰ～ⅵを使って，同様に 2 を加えたり，3 を加えて配色を作ると，同じ色がひとつの頂点のまわりに入る配色となってしまいます。①～⑥とⅰ～ⅵの違いは，01234 という並び方に対して，**①～⑥は偶置換で得られる順列で，ⅰ～ⅵは奇置換で得られる順列**ということです。2 を加えたり，3 を加えたりする方法では，偶置換の順列でないと各頂点のまわりに 5 色の配色をすることができないことがわかります。

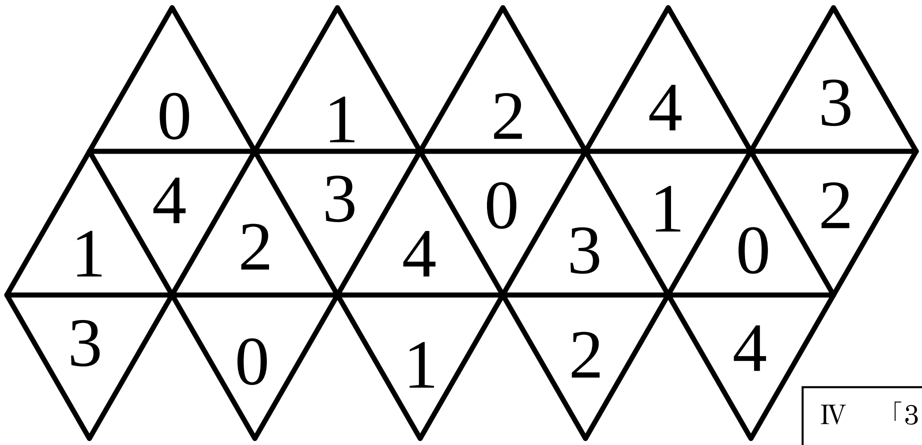
しかし，奇置換の順列では配色はできないのでしょうか。奇置換の順列もちょうど 6 通りあり，裏返したものも考えるとⅰ～ⅵの 2 倍の 12 通りの並び方があります。Ⅰ，Ⅱが 5 色を各頂点のまわりにすべて 1 つずつ置く配置なので，その中のいくつかの色の場所を互いに入れ替えても，各頂点のまわりが 5 色の組合せになることに変わりはありません。

そこで，Ⅰの配色を元に次のように試してみます。Ⅰの中の一番上の並び方を 3→4，4→3 に置き換えてⅰの順列になるようにします。同時に，展開図の中のすべての場所の 3→4，4→3 と入れ替えをします。そうしてできた配置が次の通りですが，この中にはⅰ～ⅵの裏返しも含めた 12 通りすべての奇置換の円順列が存在します。



Ⅲ　「2 を加えた場合」の奇置換順列版

Ⅱの場合も，同様に 3→4，4→3 に置き換えてみると次のようになります。



Ⅳ　「3 を加えた場合」の奇置換順列版

偶置換と奇置換順列を混ぜた正 20 面体はできないようですが，5 色の円順列 24 通りを『偶置換』と『奇置換』とに 12 通りずつ分けることができ，それらすべてを使って鏡像パターンも含めて『偶置換順列配色』2 通り，『奇置換順列配色』2 通りの計 4 通りの配色ができることがわかりました。

（2010.2.21，2.23 改訂　小野田啓子）