第 42 回数学教育論文発表会論文集
口頭発表の部

空間思考の育成に向けて－多面体の構造と生成可能性の研究－

小野田啓子
東京学芸大学附属竹早中学校

１．研究のねらい

本研究は，具体的な模型や身近な題材を用いて，児童・生徒の空間を把握する解析力・思考力の育成を図る教材の開発と指導方法の研究を目的とする。本研究で使われている「空間思考」とは,「空間図形および実空間の中の図形的な数量関係を用いて，課題を解決するときに行う解析的な思考」を意味する[1]。

今回の発表は研究の途中段階として，ビーズ球を用いた立体模型において，多角形を組み合わせて多面体を作ることができる条件を明らかにする試みまでの報告を行う。

２．ビーズ球を用いた立体模型

筆者は，堀部氏のビーズ球による立体模型作りを参考にして [2]，3 年前から数学的な活動の一環として模型制作に取り組んでいる。現在までに，中学 1 年生の授業や，学校や地域での「算数・数学実験ブース」での制作指導等を行ってきた[3]。ビーズ球を用いた立体模型には，そのよさとともに注意する点もあることは発表時に詳しく述べる。

後で述べる 42 面体模型は，準正多面体ではないが大円構造や対称性があり，面が自然に閉じるのは何故なのか疑問をもった。こうした構造について考えたことが，本研究を始めたきっかけである。

３．研究の方法

狭間氏らは，小中高校生を対象に行った，空間図形の問題解決に関する一次(1998)，二次(1999)調査結果から，児童・生徒の問題に対する反応を分析して，6 段階の発達的指標を抽出した[1]。児童や生徒の空間思考の発達の段階を把握するという点から，この実証的考察結果は重要である。しかし，空間思考の発達に繋がる学習指導と，これらの発達的指標との関係については，十分な実践研究例があるとはいえない[4]。筆者は，実践研究について，空間学習をより豊かにする広い視野からの蓄積が必要であると考えている。

本研究では，生徒が立体模型作りの制作過程を経験することや，模型を手にしていろいろな見方で空間図形について調べる学習活動が，空間思考の育成に繋がるかどうか検討を行っていきたい。また，コンピュータによる図表示が，具体的な模型操作と念頭操作に対して，それを補完する役割を担うことができるかどうかについても検討を行いたい。

４．多面体の構造と生成可能性について

(1) オイラーの多面体定理（必要条件）

穴の開いていない 3 次元多面体の頂点,面,辺の数を v， f， e で表すと，

$$v+f-e=2 \quad \cdot\cdot\cdot(\mathrm{i})$$

という関係がある。これより，多角形を組み合わせて多面体を作るための条件を求める。5 角形 x 個と 6 角形 y 個で閉じた多面体ができる条件は，1 つの頂点に 3 つの面が集まるとき，(ｉ)より

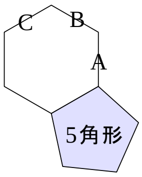
$$\frac{5x+6y}{3}+(x+y)-\frac{5x+6y}{2}=2$$

すなわち， $x=12$

よって，5 角形と 6 角形で閉じた多面体ができるためには，5 角形が 12 個必要である。

(2) 多面体ができるための十分条件

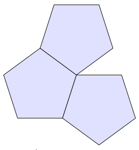
(1)の条件を満たすものの中から，実際に対称性の高い多面体ができるための十分条件を調べる。5 角形，6 角形の配置については，5 角形と 5 角形の間に 6 角形が入るとき，5 角形の置き方は対称性から(図 1)のように A，B，C のいずれかである。以下，順次 5 角形と 6 角形の間を離して配置を調べる。



(図 1)

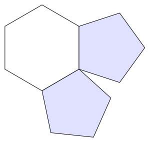
① 正 12 面体

正 5 角形 12 個。6 角形はないので，(図 1)の場合ではないが，2 つの 5 角形が最も近くにある。


(図 2) 正 12 面体

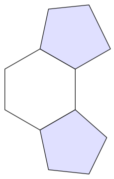
② 16 面体（準正多面体ではない）

5 角形 12 個，6 角形 4 個。5 角形は A の位置。ただし，この配置が取れないところがある。


(図 3) 16 面体

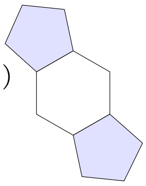
③ 準正 32 面体（サッカーボール型）

正 5 角形 12 個,正 6 角形 20 個。正 20 面体の切頂準正 32 面体であるので，閉じた対称性の高い多面体になることは明らか。いろいろな大円構造がある。5 角形は B の位置。


(図 4) 準正 32 面体

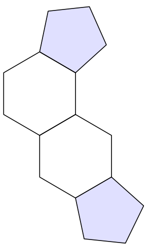
④ 42 面体（以下準正多面体ではない）

5 角形 12 個，6 角形 30 個。6 角形が大円上に並んでいる。この立体から 3 つの 6 角形の頂点が 1 点に集まるところができる。5 角形は C の位置。


(図 5) 42 面体

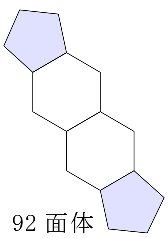
⑤ 72 面体

5 角形 12 個，6 角形 60 個。この立体から 5 角形の頂点の周りの尖角が目立つようになり，5 角形の部分が尖るような形になる。5 角形の位置は，間に 6 角形が 2 つ入るため，A の位置は③と同じになるので，次の B の位置。


(図 6) 72 面体

⑥ 92 面体

5 角形 12 個，6 角形 80 個。6 角形 2 列の大円が④と同様に 6 個できる。5 角形は C の位置。


(図 7) 92 面体

(3) 多面体の構造と生成可能性

以上のことから，5 角形と 6 角形を組み合わせて対称性の高い穴の開いていない凸型多面体ができる条件と，生成可能性について分かったことは，次の通りである。

① 多面体を構成する 5 角形の数は 12 個。

② 面の数が 32 面以上で閉じた対称性の高い多面体を作るには，(図１)に示したように 6 角形を挟んだ 5 角形の位置を順次変えた配置を考えていけばよい。この配置で**大円構造ができる対称性のある多面体ができる理由は，5 角形 3 個を結んで正三角形を作っていると見て,多面体内に正 20 面体構造ができることによる。**この構造は，6 角形の数が増えたとき，3 つの 6 角形の頂点が 1 点に集まるところがほぼ平面になると考えられることに注意すると，説明することができる。

５．今後の課題

模型を用いて空間図形の構造やその中に現れる数量を調べる学習の指導計画を立て，実践を行う。コンピュータの活用を検討する。これらの実践が，児童や生徒の空間思考の育成に繋がるのかどうか検証を行なっていく。

〔参考文献〕

[1] 狭間・橋本・赤井他,「児童・生徒の空間思考に関する調査研究(2)」(2000)第 33 回数学教育論文発表会論文集,pp.373-378

[2] 堀部和経氏にはビーズ球立体模型制作とその構造について多くの貴重なご指導をいただきました。http://horibe.jp/Gr2F.HTM

[3] http://www.u-gakugei.ac.jp/~onodakk/math/index6.htm

[4] 狭間節子,「1 カリキュラム,目標,内容(6)空間と幾何」(2001)第 34 回数学教育論文発表会論文集課題別研究,pp.33-41

＊本研究は科研費奨励研究課題番号 21913003