

## 数学科学習指導案      【単元】空間図形      立体図形の対称性

平成 22 年 7 月 9 日（金）6 校時  
東京学芸大学附属竹早中学校第 2 学年 A 組 40 名  
（男子 20 名，女子 20 名）  
場所 数学教室  
指導者 小野田 啓子

### 1. 単元設定の理由

中学 1 年生の 3 学期に空間図形の学習として，正多面体を制作しその性質を調べる学習を行った。小学校での図形の学習をもとに，具体的な模型を使って立体をいろいろな視点から観察して，空間思考の育成を図る活動を検討した。具体物の操作・観察と，それを補完する目的で用いたコンピュータによるシミュレーションは，立体の頂点や面の形の動的な変化を考察し理解を深めることに効果的であったといえる。<sup>[1]</sup>

ただし上記の実践の中で，正多面体の面・頂点の数を調べることによって見つけた『双対な立体』の関係について，この関係が何に生きるのか，今後の学習にどのようなつながるのかという視点が不十分であった点が課題として残った。

一方，図形の学習は，小学校のときに具体物を操作するという体験を通して，形の対称性など数学的な性質の発見を行うが，中学校では立体についての具体的な操作の体験が少なく，立体の見方について学ぶ機会が不十分ではないかと感じている。立体の性質や特徴を十分に学ぶ機会がないまま，三平方の定理等を用いた立体の計量や，ベクトルによる空間図形の解析，自然科学の分野でも物質の結晶構造の活用などを行うことは，生徒にとってそれらの学習が困難となる原因のひとつではないだろうか。また，そこまで進んだ学習を必要としない生徒にとっても，身の回りにあるいろいろな形をした立体の中から，基本的な形をした立体について学ぶことは意味のあることではないかと思う。

そこで，中学 1 年生の空間図形の学習に続いて，立体の見方を養う段階的な学習ができるとよいのではないかと考えた。平面図形や立体の特徴を考えるとときに重要な見方・考え方として，図形や立体の『対称性』が挙げられる。立体の対称性について，実際に模型を手にしていろいろな方向から観察しながら調べ考えることは，立体の見方を育てる上で有効な経験である。また，正多面体の性質にある『双対性』と『対称性』は密接な関係がある。以前の実践で課題であった，双対な立体の関係を『対称性』という今後につながる見方でとらえる事も試みたいと考え，そのつながりも意識して本単元を設定した。

### 2. 本時のねらい

- (1) 平面図形と比較しながら，立体図形の対称性を考える。
- (2) 立方体と正 8 面体の対称面の数を調べる。
- (3) 立方体と正 8 面体の対称面の数が同じであることから，双対性と対称性との関係を

考える。

### 3. 準備

- ・正 6 面体, 正 8 面体模型
- ・パソコン (POV-Ray NaCl, ダイヤモンド結晶構造, 雪の結晶, 西洋の庭園)
- ・スクリーン, 書画カメラ, ワークシート

### 4. 本時の展開

[リンク先の人物の写真は解像度を落としています。注意：転載不可]

| 授業の流れ  | ○教師の問いかけ・指導内容, <input type="checkbox"/> 課題<br>・予想される生徒の考え, <input type="checkbox"/> 板書事項  | ★留意点・支援<br>◇評価の観点   |
|--------|---|---|
| 1. 導入  | ○雪の結晶の形や西洋の庭園の例を提示して, どのような感想を持ちますかと問う。 <a href="#">雪画像[2]</a> , <a href="#">庭画像[3]</a><br>・きれいな形。<br>○形の特徴についていえることは何ですか。<br>・雪の結晶や西洋の庭の形は左右対称。<br>○立体にも左右対称な形というものはあるのでしょうか。<br>・あると思う。<br>○どんな立体が思いうかびますか。<br>・分からない (答えがでない) ・円柱や立方体<br>○対称性のある立体の例を自然界の中から提示する。<br>身の回りの物質の構造として, <a href="#">NaCl</a> , ダイヤモンドの構造を CG (POV-Ray) で提示する。<br>○この中にどのような立体図形が見つかりますか。<br>・立方体や正 4 面体。<br>○今日は立体の対称性について勉強していきます。物質を作る構造にも出てきた立方体にはどんな対称的な性質があるか考えてみよう。<br><div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;">立方体のなかにある対称性について調べてみよう。</div> | ★身のまわりにある対称・非対称なものから受ける印象をひきだすことから, 対称的なものを考える動機付けを行う。<br>★正多面体の形は, 人工的な例ではなく自然界にあるものに注目する。<br><br>◇関心・態度 |
| 2. 展開① | ○復習ですが, 「平面図形」には何対称がありましたか。<br>・線対称や点対称。<br>○では, 立方体にはどんな対称性があるのでしょうか。<br>・左右対称。<br>・点対称もあるのではないかな。等<br>○左右対称とはどういうことですか。<br>・立方体では直線ではなくて, 平面をはさんで左右が  | ◇知識・理解<br>★以前の実践で, 面対称ということばが生徒から出ていたので, 今回その定義をきちんと行う。   |

同じ形ということ。(投影機で提示してもらう)  
 ○平面はどのように決まるのですか。(1年空間図形)  
 ・立方体の向かい合う正方形の面の辺の中点を直線で結ぶと、上と下の面にできる2直線は平行な直線なのでそれを含む平面が1つに決まる。

**【定義】ある平面をはさんで左右が対称な関係にあるときこの立体図形は面対称な図形であるといい、その平面を対称面という。**

(以下の薄文字は、本時は省略。)  
 ○立体図形の点対称は平面と同じように考えていいかな。  
 ・分からない。・いいと思う。  
 ○立体図形上の全ての点について、対応する2つの点を結ぶ線分が全て1つの点で交わり、互いに他を2等分するとき、この立体図形は点対称な図形であるといい、このとき交わる点を点対称の中心という。【定義】  
 ○立方体は点対称な図形となっていますか。  
 ・なっている。点対称な図形といえる。  
 ・対角線の交点が点対称の中心である点対称な図形。

|      |            |     |
|------|------------|-----|
| 平面図形 | 線対称・・・対称の軸 | 点対称 |
|      | ↓          | ↓   |
| 立体図形 | 面対称・・・対称面  | 点対称 |

| \*以下の対称性は、でてくる可能性もあるが、本時の  
 | 中では詳しくは扱わず、発展課題とする。  
 | ○面対称や点対称の他。  
 | ・90度や120度回転させると重なる。  
 | ○回転対称と回転の軸について共通理解をする。  
 | ・回転対称→○回転の軸はいくつあるか。  
  
 ○立方体の対称面がいくつあるか調べてみよう。その前に、**直方体の対称面**がいくつあるか考えてみよう。分かるかな。  
 ・辺の中点を結んだ場合。(模型を使って投影機で提示してもらう)

★面対称の定義は文献[4]を参考に脚注1)を踏まえて定義をする。ただし、生徒の状況に応じて具体的に理解できればよいとする。  
 ◇知識・理解

◇知識・理解  
 ★回転対称の定義は文献[5]を参考にした。これを回転移動とみる見方もあるが、生徒にとって対称性の一つと見る見方は自然であると考えて加えた。しかし、本時では面対称に話を絞って考えをまとめることにする。以下、| や ( ) 部および薄字は本授業では扱わない。

◇数学的な考え方  
 ◇表現・処理

○直方体の対称面は3つですね。この対称面は、立方体の場合にもあてはまりますか。

・あてはまる。

○立方体には他に対称面はありますか。あれば、いくつあるか調べてください。互いに平行な2直線によって対称面がきまるので、輪ゴムを模型にかけて対称面を考えることにしてみてください。そして、対称面がいくつあるか、どのように数えたら分かりやすいのかも考えてみてください。(生徒：模型を使って調べる。輪ゴムを使って面を作る。)

・他に6つ。(投影機で提示してもらう)

[立方体の対称面の求め方について] (生徒説明)

立方体の向かい合う2つの面を1組と見て考えると、

①正方形の辺の中点を通る面が各組に2つ。3組では、重なりがあるので、 $2 \times 3 \div 2 = 3$ つ。(直方体も同じ)

②正方形の頂点を通る面が各組に2つ。

3組では重なりはないから、 $2 \times 3 = 6$ つ。

| [回転の軸]

| ①正方形の面の中心を通る軸のまわりに90度ずつ回転させるともとの形と重なる。対称の軸は、向かい合う2つの面で1つずつなので、3つ。→4回回転対称。

| ②立方体の対角線方向で向かい合う頂点を通る軸のまわりに120度ずつ回転させるともとの形と重なる。対称の軸は、頂点は8つで向かい合う2つずつを組にすると、それぞれを通る軸は4つ。→3回回転対称。

[点対称の中心]

立方体の対角線の交点1つ。

立方体の対称面図示 (面の対角線方向に(頂点を通る面で)6つ、辺の中点を通る面で3つ)(書画カメラでプリントを図示して記入)

立方体の向かい合う2つの面を1組とすると、違う組が3組ある

①正方形の辺の中点を通る面が各組に2つ。3組では、2つずつ重なる。

$2 \times 3 \div 2 = 3$ つ (直方体も同じ)

②正方形の頂点を通る面が各組に2つ。3組では重なりはない。

$2 \times 3 = 6$ つ

◇数学的な考え方

◇表現・処理

|               |  |   |
|---------------|--|---|
| <p>3. 展開②</p> | <p>○正8面体の対称性についても調べてみよう。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> <p>正8面体の対称性についても考えてみよう。</p> </div> <p>○正8面体にも同じような対称性があるのでしょうか。</p> <p>  ・回転対称→○回転の軸はいくつあるか。</p> <p>  ・点対称 →○対称の中心はどこか。</p> <p>  ・立方体と同じく対称性は2種類(3種類)ある。</p> <p>○正8面体も面対称な図形といえますか。</p> <p>・いえる。</p> <p>○どんな対称面がありますか。</p> <p>・<u>(投影機で生徒説明)</u></p> <p>○ひとつずつ調べていきましょう。このような対称面はあといくつありますか。(頂点を通る面をさして)</p> <p>・3つ。<u>(生徒に提示してもらう)</u></p> <p>○これ以外にいくつ対称面がありますか。いくつあるのかをどのように考えると分かりやすいですか。</p> <p>・<u>模型を使って考える</u>・6つ ・分かりにくい</p> <p>[正8面体の対称面について] <u>(生徒説明)</u></p> <p>【その1】正8面体の向かい合う2つの頂点を1組と見て考えると、頂点の組は3つ。①頂点から見て頂点のまわりの4つの正三角形の辺の中点を通る面が各組に2つ。3組では、<math>2 \times 3 = 6</math>つ。</p> <p>②頂点を上から見て正三角形の頂点を通る面が各組に2つ。3組では重なりがあるから、<math>2 \times 3 \div 2 = 3</math>つ。</p> <p>【その2】①正8面体の向かい合う2つの正三角形の面を1組と見て考えると、正三角形の辺の中点を通る面が各組に3つ。4組あり、重なりがあるから、<math>3 \times 4 \div 2 = 6</math>つ。②頂点を通る面は3つ。</p> <p>  [回転の軸]</p> <p>  ①向かい合う頂点を通る軸のまわりに90度ずつ回転させるともとの形と重なる。対称の軸は、向かい合う2つの頂点で1つつなので、3つ。→4回回転対称。</p> <p>  ②向かい合う正三角形の面の中心(重心, 内心, 外心)を通る軸のまわりに120度ずつ回転させるともとの形と重なる。対称の軸は、面は8つで向かい合う2</p> | <p>◇数学的な考え方</p> <p>◇表現・処理</p> <p>太字: 授業で生徒から多くでた考え方</p> |
|---------------|--|---|

|               |  |  |
|---------------|--|--|
|               | <p>1つずつを組にすると、それぞれを通る軸は4つ。→3<br/>  回回転対称。</p> <p>[点対称の中心]<br/>向かい合う頂点を結んだ線分の交点(対角線の交点)1<br/>つ。</p>   |  |
|               | <p>正8面体の対称面図示 (頂点を通る面で3つ, 辺の中点を通る面で6つ) (書画カメラでプリントを図示して記入)</p>   |  |
|               | <p>正8面体の向かい合う2つの頂点を1組とすると, 頂点の組は3つ。<br/>①頂点を通る面は3つ。(各組に2つ, 重なるので, <math>2 \times 3 \div 2 = 3</math> つ)<br/>①頂点から見て頂点のまわりの4つの正三角形の辺の中点を通る面が各組に2つ。3組では, <math>2 \times 3 = 6</math> つ。</p>  |  |
| <p>4. 展開③</p> | <p>○立方体と正8面体の対称面の数を調べて何か気づくことはありませんか。(生徒からでるとよい)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・対称面(と回転の軸), 点対称の中心の数が同じ。</li> <li>・立方体の辺の中点と正8面体の頂点を通る対称面の数が同じで, 立方体の頂点と正8面体の辺の中点とおる対称面の数が同じ。</li> </ul> <p>○偶然でしょうか。それとも何か理由がありますか。<br/>(考えがでない場合: 斜体部分を聞く↓)</p> <p>○立方体と正8面体の関係で何か思い出すことはありませんか。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・双対な立体。</li> </ul> <p>○双対な立体と対称性はどのような関係があるのでしょうか。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・正8面体は, 立方体の面の中心を頂点として結んできた立体だから対称性が同じだと思う。</li> <li>・立方体も, 正8面体の面の中心を頂点として結んできた立体だから対称性が同じだと思う。</li> <li>・立方体と正8面体は, 互いに面と頂点の位置が入れ替わった関係になっているからどちらも同じ対称性だと思う。</li> </ul> <p>○立方体と正8面体の関係は, 模型で示すとこのよう<br/>な関係でしたね。(入れ子にした模型を提示)</p> | <p>★対称面の数, 軸の数が等しいこと<br/>の理由を明らかに<br/>して進むように<br/>する。</p> <p>◇数学的な考<br/>え方</p> |

|   |   |  |
|---|---|--|
| <p>5. まとめ</p> <p>6. 学習を<br/>ふり返り、<br/>感想をまと<br/>める。</p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>・立方体の辺の中点を結んでできる対称面と正8面体の頂点を通る対称面は同じ平面である。また、立方体の頂点を通る正方形の対角線でできる対称面と正8面体の正三角形の辺の中点を通る対称面も同じ平面で、9つ全部が重なっている。</li> <li>○他に双対な関係にある立体は何がありますか。</li> <li>・正12面体と正20面体。<br/>(・正4面体は自分自身。)</li> <li>→これらの立体も調べてみると対称性が同じであることが確かめられる。</li> <li> 【発展】正12面体と正20面体の対称面の個数。</li> <li> 正12面体：互いに向き合う2面を1組にすると、</li> <li> 1組ごとに対称面が5つ。他の組で数えるときに2</li> <li> 重に数えるので、<math>5 \times 6 \div 2 = 15</math> 15個</li> <li> 正20面体：互いに向き合う2面を1組にすると、</li> <li> 1組ごとに対称面が3つ。他の組で数えるときに2</li> <li> 重に数えるので、<math>3 \times 10 \div 2 = 15</math> 15個</li> <li>○立方体と正8面体の対称性についてわかったことは何ですか。</li> <li>・面対称，点対称な立体である。</li> <li>・対称面はどちらも9つ。</li> <li>・互いに双対な関係にあることから，対称面が重なっている。</li> <li>○今日の学習の感想を書いてください。</li> </ul> | <p>★発展課題とし，具体的には調べてみたい生徒の課題とする。</p> <p>◇数学的な考え方</p> <p>◇表現・処理</p> <p>◇学習内容をふり返り，自分の考えを書いている。</p> |
|---|---|--|

脚注1)

**面対称の定義**：1つの空間図形が，ある平面 $\alpha$ に関する対称移動により，自分自身に重ね合わせられるとき，この図形は $\alpha$ に関して面対称であるといい， $\alpha$ を対称面という。

**対称移動の定義**：1平面 $\alpha$ が存在して， $\alpha$ 上の点は動かない。 $\alpha$ 上でない点Pとその対応する点P'を結ぶPP'は， $\alpha$ に垂直で中点で交わる。この移動を対称移動という。

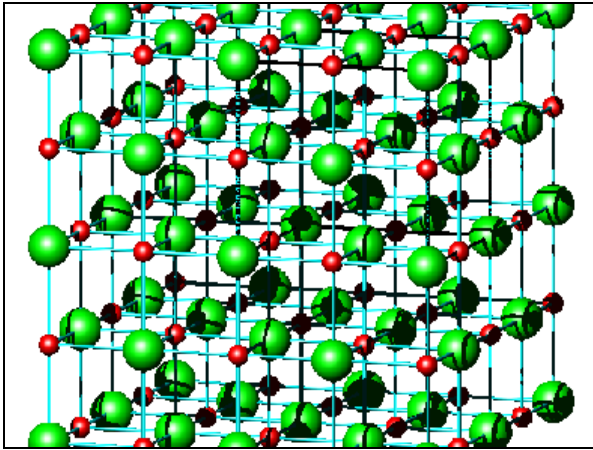
(面対称および対称移動の定義は[2]による)

脚注2)

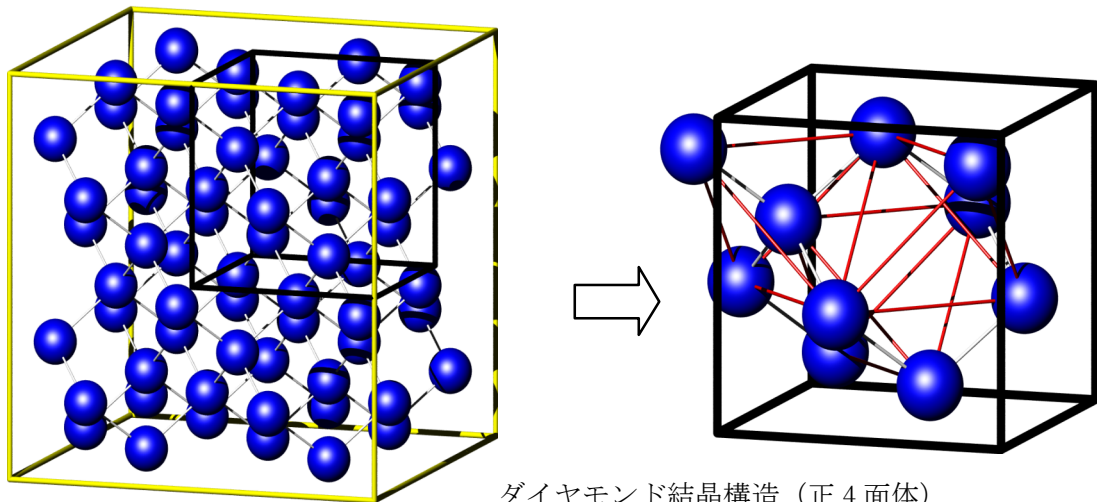
**回転対称性**：立体図形を1つの軸のまわりに1回転の $1/2$ ， $1/3$ だけ回転させたとき，もとの図形と一致する性質をそれぞれ2回回転対称性，3回回転対称性(中略)とよぶ。([3]による)

## 5. 参考資料

### NaCl 結晶構造 (立方体)



(左図 : POV-Ray, 右図 : ATOMS で描画)



ダイヤモンド結晶構造 (正4面体)

#### 【参考文献】

[1]小野田啓子 「空間思考の育成に向けて—多面体の構造と生成可能性の研究—」 東京学芸大学附属竹早中学校第 48 号研究紀要 2010. pp. 21-53

[http://www.u-gakugei.ac.jp/~onodakk/math/kuukan\\_sikou\\_2010/2010\\_kiyou\\_kuukanshikou\\_1.pdf](http://www.u-gakugei.ac.jp/~onodakk/math/kuukan_sikou_2010/2010_kiyou_kuukanshikou_1.pdf)

[2] 雪の結晶 ケン・リブレクト著 (矢野真千子=訳) 河出書房新社

[3] 世界の歴史教科書シリーズ9 フランスⅢ ピエール=ミルザ, セルジュ=ベルスタン, J.-L. モヌロン原著 帝国書院

[4]新数学事典 一松信, 竹之内脩 (編) 大阪書籍 pp. 309-310

[5]かたちの事典 高木隆司 (編) 丸善 pp. 448-452