中学２年生　三角形と四角形「交点の軌跡」

ー軌跡の学習の可能性とコンピュータの活用についてー

小野田　啓子
数学科

要約

基本的な問題を発展させて，①問題の条件を変えて図形にどのような性質があるのかを調べる，②図形を動的に捉えて，角の大きさや直線の交点の軌跡を調べ，根拠をもとにして説明する授業実践を中学２年生で行った。また，実践を通して，条件を変えながら図形を素早くかくことができるコンピュータの活用方法についても検討を行った。

コンピュータによる提示は，図形の移動や変化を視覚的にとらえることができて，生徒を問題に取り組む姿勢にさせるには優れた効果があるが，使いすぎないよう注意が必要である。また，コンピュータのよさは，図形を動かすことができて動的に捉えることができるところである。軌跡の問題では，図をかいて考えるのが困難な場面で，見通しをもつことができるというところで，非常に有効であった。これからもコンピュータというツールを効果的に活用するためには，実践を積み重ねていくことが大切である。

中学２年生の段階でも，コンピュータなどのツールを適宜活用して，図形を動的に捉え，軌跡のような発展的な課題を考えることが可能だと考える。

キーワード　　　図形を動かす　　軌跡　　コンピュータの活用　　証明

Ⅰ　活動の構想

図形の性質に関する問題を考える場合，その条件を理解して図を正確にかくことは問題解決の第一歩である。証明などその先がなかなか自分で考えられない生徒にとっても，問題の条件にあった図をかく活動は，主体的に考えることができる大切な場面である。中２の図形領域では，先ずそのことに留意をして学習を進めた。次に，図形の中にある合同な図形や等しい辺や角を見つけて，根拠をもとに合同や等しいことの証明をした。また，問題の条件を変えても，変わらずに成り立つ性質があるかどうかを考える経験は，図形の普遍的な性質に対する興味や関心に繋がると考える。

本時であつかう題材は，三角形の合同，辺や角の相等を証明する問題としてだけでなく，相似や円と図形の関係，図形を動かしたときの点の軌跡という多くの図形の性質に関係する事柄を含んでいる問題である。図形の性質を用いて考察するよさを感じてもらうことは，ねらいの１つである。

相似（中２は未習）な２つの三角形の対応する頂点を結ぶ直線の交点は円周上を動き，その周上を動く範囲は２つの三角形の相似比によって決まる[1]。相似比 1:2 のときは交点の軌跡の弧の中心角を具体的に求めることができるが，各自がかいた図から作図によって各自の解を求めるようにすることで，主体的に問題に取り組めるようにと考えた。その後，さらに問題をどう発展させることができるかについても考えられるとよいと思う。

Ⅱ　算数・数学連携カリキュラムにおける位置づけ

中学２年生は，操作的な活動や直観的な思考から，徐々に演繹的な思考に興味を示し始める時期である。本校の連携カリキュラムにおいては第４ステージ（中２から中３まで）にあたり，この時期を自己の適性を客観的に見つめ目的をもった主体性が芽生えてくる時期であると捉えている。

そこで，中２の後半の学習（図形領域）にあたっては，小学校や中１で行った操作的活動から得られた結果や，直観的な理解から，生徒が『一般的に』いつでも成り立つのかという演繹的な説明の必要性に気付き，その説明すなわち『証明』をして初めて正しいと認められることを確認しながら，授業を進めていきたい。

また，図形の授業にあたっては，問題文を読んで自分で図をかき，友達の図と照らし合わせて，条件を満たす図の多様性に気付きながら進むように配慮したい。例えば，「線分 AB，CD がおのおのの中点 O で交わっている時，AC=BD であることを説明せよ」という問題文を板書して，生徒に図をかかせるといろいろな図ができる。条件に合っていれば，どの図でも結論が成り立ち正しいことが分かる。また，与えられた問題文を読んだときに，不足する条件を考えるといった経験もこの時期に意図的に積ませたい。そのような活動を行うことで，より主体的に問題に取り組む態度を育てることができると考える。

図形領域としては，演繹的な思考と，定理とそ

の逆等の論理的な考え方をこの時期に十分経験させて，中 3 へとつなげたい。

Ⅲ　単元計画

１　5 章　三角形と四角形　(11 時間)

(1)　単元のねらい

二等辺三角形や平行四辺形の性質に関心をもち，それらが成り立つことを証明しようとする。演繹的な推論の仕方に慣れ，ものごとに対する論理的な見方や考え方を育てる。

(2)　指導計画

学　習　項　目	時数	学　習　内　容
1節　　三角形	〔5〕	
1　いろいろな三角形	1	定義・定理の意味を理解する。
2　二等辺三角形	1	底角が等しいことの証明。二等辺三角形の性質を調べる。
3　二等辺三角形になるための条件	1	逆の意味を理解し，二等辺三角形になるための条件を証明する。
4　直角三角形の合同条件	1	直角三角形に関する用語。三角形の合同条件をもとに，直角三角形の合同条件を考え，証明する。
5　直角三角形の合同条件を使った証明	1	直角三角形の合同条件の利用。
2 節　四角形	〔5〕	
1　平行四辺形	2	平行四辺形の定義と性質。
2　平行四辺形になるための条件	2	平行四辺形になるための条件とその利用。
3　いろいろな四角形	1	ひし形，長方形，正方形の定義と平行四辺形との関係。対角線の性質の証明。
〔課題学習〕	〔1〕	
平行四辺形の面積を 2 等分する直線	1	必要十分条件の意味。

２　6 章　定理の発見と証明　(8 時間)

(1)　単元のねらい

図形の新たな性質を，観察や実験，操作などを通して調べ，それらの証明をしようとする。

(2)　指導計画

学　習　項　目	時数	学　習　内　容
1 節　平行線と三角形	〔2〕	
1　中点連結定理と利用	1	三角形の 2 辺の中点を結ぶ線分と残りの辺との関係を調べる。定理の証明とその利用。
2　平行線と面積	1	平行な 2 直線間の距離と, 平行線を利用した等積変形の定理の証明。その逆の定理の証明。
2 節　円周角の定理	〔4〕	
1　円周角の定理	2	円周角の意味。円周角および円周角と中心角の関係を調べ，定理の証明をする。
2　円周角の定理の逆	1	円周角の定理の逆を考え，証明を理解する。
3　三角形と円，四角形と円	1	三角形の外心と外接円の作図と証明。円に内接する四角形の性質。円の外部の点からその円にひいた接線の作図。
〔課題学習〕	**〔2〕**	
交点の軌跡（実践授業）	**2**	**正三角形の対応する頂点を結んだ直線の交点の軌跡。**

Ⅳ　授業の概要（2 時間）

１　授業のねらい

(1)　問題の条件を変えて, 図形にどのような性質があるのか調べてみようとする主体的な態度や意欲を育てる。

(2)　図形を動的に捉えて, 角の大きさや直線の交点の軌跡を調べ，根拠をもとにして説明する。

２　対象クラスと実施時期

対象クラスは，東京学芸大学附属竹早中学校第 2 学年の全 4 クラス（1 クラス　男子 20 名，女子 20 名　計 40 名）である。実施時期は単元計画にあるように，中学 2 年生の「三角形と四角形」,「定理の発見と証明」を学習した後である。または，中学 3 年生で「相似」を学習した後も実施時期として考えることができる。

＊2 時間目は，平成 23 年 2 月 19 日(土)第 3 回竹早算数・数学授業研究会の公開研究授業であり，

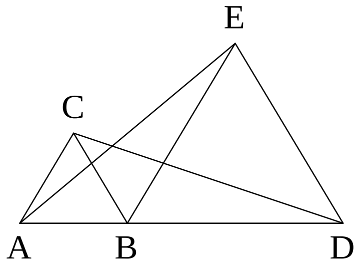
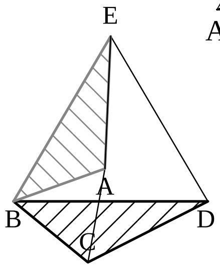
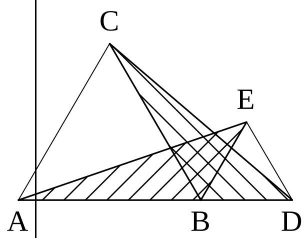
<u>**当日の授業は展開[2]②（○15）からである。公開授業は 2 年 D 組で行った。**</u>

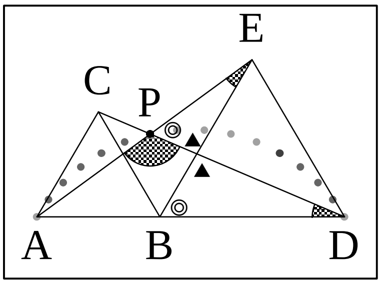
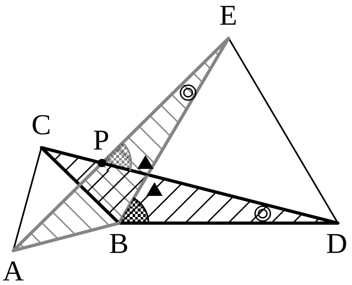
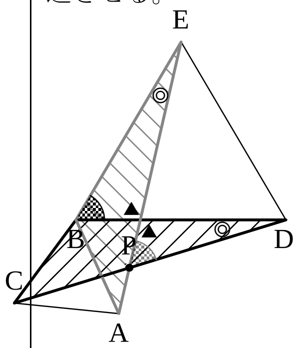
教師提示用パソコン 1 台，スクリーン，ワークシート，コンパス，定規，分度器

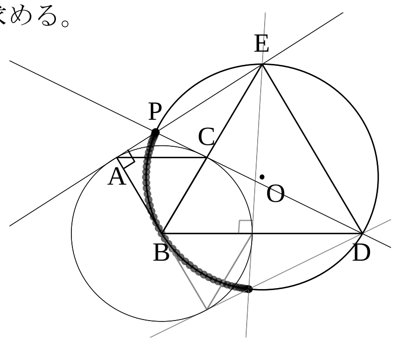
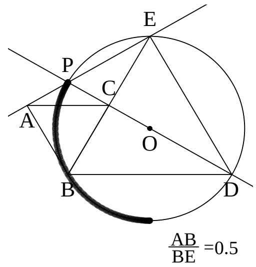
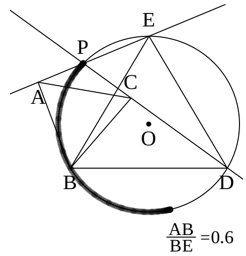
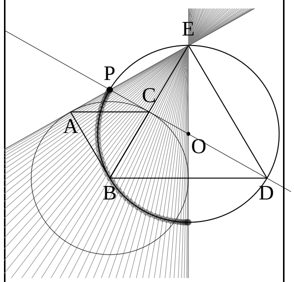
３　準備

使用ソフト：GRAPES[2]

４　授業の展開

展開	教師の問いかけ・ 指導内容	○予想される生徒の学習活動 ・予想される生徒の考え　□：板書事項	★留意点・支援 ◇評価方法
導入	○1〔問題提示〕次の問題文の図をかきなさい。 線分 AD 上に点 B を点 A，D と重ならないようにとる。AB, BD の長さを 1 辺とする正三角形 ABC と正三角形 BDE を，直線 AD の同じ側につくる。点 A と E，C と D をそれぞれ結ぶ。 ○2 生徒に黒板に図をかいてもらう。	○各自図をかく。 ・点 B はいろいろな位置が考えられる。 	★点 B の位置は，いろいろな位置が考えられる。 ◇積極的に図をかこうとしているか。 ◇図を正しくかくことができているか。
展開	○3 [1]①図の中の合同な図形を探しなさい。 ○4 それらが合同であることを証明しなさい。 ○5 ②点 B が AD 上のいろいろな位置にあっても△ABE≡△CBD が成り立つのか。 ○6 GRAPES で点 B を動かして確認する。 ○7 点 A，B，D が一直線でなくなったら，合同関係はどうなるか？ ○8 ③△ABC を点 B を中心に回転させたとき，△ABE≡△CBD は成り立つのか。 ○9 [2]　AE と CD の交点を点 P とする。 ○10 ①点 B を AD 上で動かしたとき，点 P の動いた跡はどんな図形になるか。 ○11 GRAPES で点 B を動かしてみる。 ○12 点 P の軌跡が円にな	・△ABE と△CBD ○△ABE≡△CBD を証明する。（生徒に証明を黒板にかいてもらう。） ・成り立つ。 ○点 B は AD 上のどの位置にあっても，△ABE≡△CBD となる理由をいう。 点 B が AD 上のどこにあっても，△ABE≡△CBD が成り立つ  ・成り立つのかどうか分からない。 ○図をかいて証明する。 点 B を中心に△ABC を回転させても，△ABE≡△CBD ・AD に平行な直線。 ・円，曲線になるのではないか。 ・円の一部になるのではないか。 ○図を見て考える。	★∠ABE=∠CBD をどのように説明しているか。 ◇三角形の合同条件を適切に使って証明することができるか。  ◇AD 上を点 B が動いても，△ABC が回転しても，△ABE≡△CBD という性質は変わらないことを説明できるか。 ★点が動いた跡を「軌跡」という。 ★生徒は前に点 B をいろいろな位置にとって図をかいているので，GRAPES を使っていろいろな場合

	るのは何故か。 ○13 点A，D，Pを通る円を各自かく。 ○14 点BをAD上で動かしたときの点Pの軌跡が分かった。	 △ABE≡△CBDより，∠AEB=∠CDB・① 対頂角より，　　　　▲が等しい・・② ①，②と三角形の内角の和は180°より， ∠DBE=∠DPE(=60°) よって，∠APD=120°(一定) よって，円周角の定理の逆より点Pは点A，Dを通る円の弧AD上を動く。 ・AP，PDの垂直二等分線の交点を中心として，中心とAの距離を半径とする円をかく。	を連続して見てみる。 ★平行線の角の関係や三角形の内角の和など，既習事項を使って考えさせる。 ★根拠を明らかにして説明させる。 ◇いくつかの証明方法を考えられるか。 ◇円をかく作図ができるか。
	（2時間目はここから） ○15 ②△ABCを点Bを中心に回転させたとき，点Pの軌跡はどのような図形になるか。 ○16 GRAPESで△ABCを回転させて点Pの動く様子を観察する。（点Pを，直線AEとCDの交点と約束し直す。） ○17 図形が円だとしたら，なぜか。 ○18 どの角が等しくなっているのか。	・分からない。 ・円になるのではないか。 ・点C,B,Eが一直線上になるとき，点Pが点Bに重なりそうだ。 ・点Pは点Dまで行きそうだ。 ・途中で戻ってしまう，どこまで動くのかな。 ・動く範囲に限界がある。 ・円の上にあるということは，円周角の定理の逆が成り立つ。 ・∠DPEと∠DBE ○図をかいて説明をする。  前回の授業の証明より， ∠DBE=∠DPE(=60°)・・③ よって，円周角の定理の逆より，2点B，Pが直線DEの同じ側にあって③が成り立つので，4点B，D，E，Pは1つの円上にある。	★生徒に予想をさせる。 ★生徒が観察する時間を十分にとる。 ★前時の学習を振り返させる。  ★根拠をあげることができるか確認する。円周角の定理の逆は条件をいえるように生徒に考えさせる。

	○19 点Pは△BDEの外接円上を動く。 ○20 ③点Pが動く範囲を考えられないかな。点 P が最も端になるのは，どのようなときか。 ○21 GRAPES で点 P の動きを観察する。 ○22 AB：BE の比を変えて見せる。(AB/BE=0.6) ○23 どうなっているとき，点 P は最も外側にくるか。 ○24 中心 B 半径 BA の円を表示する。 ○25 直線 AE の残像を残して接線となるときであることを確認する。 ○26 点Eから円Bへの接線をかいて，点 P の動く範囲を求めよう。	○△BDE の外接円をかく。 ・DP が円 O の直径になるとき。 ・辺 BC が辺 BE と重なるとき。 （ここまでは，2 つの三角形の辺比が 1:2 のとき） ・DP が直径のときではない。辺 BC と BE が重なるときでもない。 （・直線 AE と BA が直角になるときかな。） ・点 P が最も端にくるのは，直線 AE が点 B を中心とした半径 BA の円の接線になるとき。 ○点 E から円 B への接線をひき，点 P の範囲を求める。 	   ★点 E から円 B への接線の作図は，生徒の状況によって扱うことにする。
まとめ	○27 図形の中の条件を変えても不変ないろいろな角の関係について振り返る。 ○28 条件を変えてさらに調べるとしたら，どのようなことを調べたいか。	・等しい関係にある角の関係，合同な三角形について振り返る。 ・正三角形の大きさを変えたり，正三角形以外の形に変えたら，今まで調べた性質はどうなるか。	◇学習内容を振り返り，さらに調べたいことを考えられるか。

５　評価

(1)　問題文の図をかくことができたか。
(2)　図の中にある合同な図形や等しい角の関係を見つけて，根拠をあげて説明することができたか。さらに，条件を変えても，それらの関係が同様に成り立つことを理解できたか。
(3)　交点の軌跡を，根拠を考えながら調べていくことができたか。

Ⅴ　授業の考察

１　実際の授業の流れ

○1 について，生徒は点 B を AD 上の様々な位置において図をかいていた。図形の学習においては，図をかくことについて，Ⅰ，Ⅱで述べたように，問題の条件を満たす図の多様性を，生徒が理解できるよう授業を進めてきた。作図では各自自分で点 B の位置を決めてかいていた。

○4 の生徒の証明は，∠ABE=∠CBD の説明方法として，どちらも 120°で等しいという説明と，共通な角∠CBE と正三角形の内角 60°との和となって等しいという説明の 2 通りがあった。

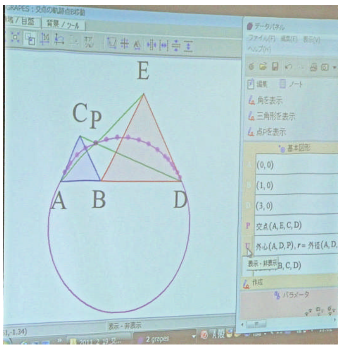
○5 の問いかけに対して，すでに生徒は点 B が AD 上のいろいろな位置にある場合の図をかいているので，どこにあっても△ABE≡△CBD が成り立つことはすぐに理解ができた。条件も確認をした上で，GRAPES を使って点 B を AD 上で動かして△ABE≡△CBD を確認した。

○7，○8 で，点 A，B，D が一直線上になくなったら，つまり「△ABC を点 B を中心に回転させたとき，△ABE≡△CBD は成り立つのか」を考えた。生徒に図をかかせて，△ABE≡△CBD が成り立つことの証明を考えさせた。ここで，∠ABE=∠CBD の説明方法として，｜（共通な角）±（正三角形の内角 60°）｜のように記号で表わす必要性に生徒が気づき，一部証明の書き直しが必要になるが，図形の位置関係について条件が変わったときにも，合同であることは変わらないことを確認した。

○9，○10 で，点 B が AD 上のどこにあっても△ABE≡△CBD が成り立つことと，平行線の角の関係や三角形の内角の和など，既習事項を使って，∠EPD=∠EBD=60°より，いつでも∠APD=120°で一定であることを見つけて，円周角の定理の逆によって点 P の軌跡が円弧となることを証明した。このとき∠EPD=∠EBD=60°となる説明の方法には，少なくとも生徒から 3 通り以上の考え方がでたことだけ報告しておく。その中の何通りかは，点 A が点 B を中心に回転したときには成り立たなくなる説明であり，いつでも成り立つ説明方法について考える機会にもなった。

○13 の図は，前時の最後に宿題とした。2 時間目の最初に確認をした。（図 1）

○15 では，先ず生徒に予想をさせた。次に，GRAPES を使って，△ABC を回転させて点 P の動く様子を観察しながら調べていった。授業の流れは，△ABC を回転させたとき，生徒は点 P は「点 B に重なる」「点 A に重なりそうだ」と予想をしていった。点 P の動きは，振り子の先のように円弧になると予想をして，その理由を説明することにした。「円周角の定理の逆」を使って証明を行い，4 点 P，B，D，E がのっている円 O（△EBD の外接円）を各自作図した。



（図 1）点 A,P,D を通る円

協議会で次のような意見もあった。最初から GRAPES を使わず，①前時に∠EPD=∠EBD=60°という関係見つけていたことを生かして，生徒に点 P の軌跡が円になる根拠を見つけさせることができたのではないか，②生徒にいくつか図をかかせて，点 P の軌跡を調べさせる方法があったのではないか。

②の方法は，課題が○15 のみであれば，あるいは○15 が初めて出た課題であれば，当然考えられる方法である。しかし，今回の展開ではその後にもう一つ○20 の課題があったため時間の関係と，前時に「円周角の定理の逆」を使った証明問題を考えていたため，最初に GRAPES を使って動かして生徒に観察をさせてみた。そして，予想した円になりそうだという見通しを立ててから，根拠をきちんと説明させる展開とした。

途中で点 P が戻ってしまうという意外性に，どの場面で気付かせるかは検討する必要があると思う。例えば，①のように最初は自分で考えさせて，点 P の軌跡が円となることを考えられた場合は，生徒が説明をした後で，確認するために GRAPES を使って図を動かし，そのときに点 P が円周のすべての部分を動くのではなく，その一部しか動かないことを見つけて次の課題に繋げる進め方もあると思う。また，考えている中で生徒の方から，点 P が円周上すべてを動くかどうかという疑問も出る可能性もある。時間配分を考えて，①を意識しながら生徒の状況を見て，見通しが立ちにくい様子であれば，GRAPES で動かして円になりそうだという結果を知って，何故かという理由を考える展開も考えられると思う。通常では，考えるのが難しい課題かもしれないが，コンピュータという瞬時に図をかくことができるツールを活用することによって，軌跡のような問題も中学 2 年生で考えることが十分可能であると考える。協議会で出た意見で，模型などを作って動かしてみるのも，生徒の思考を助ける手立てとしてとても有効だと思う。コンピュータも模型の教具も，あくまで生徒の思考を助けるための道具である。コンピュータは条件の変更が直ぐにでき，図形を自在に動かすことが容易にできるので，使う目的が生徒の思考の手助けであるならば，教師は生徒の思考を追い越して見せすぎないように注意する必要がある。教師も自分が疑問を解決していったときに試行錯誤した過程を，生徒から奪い取らないよう気を付けなければいけない。

○19 は，前時でも課題にしていて繰り返しとなるので，作図方法は生徒にとって問題がなかった。

○20 で，点 P は円 O の周上のどの範囲を動くのかを考えた。この課題は，生徒が図をかきながら考えるのは無理であると思う。コンピュータを使って図を動かして，観察をしながら考える必要があると思った。事前に授業を行った他の 1 クラスでは，2 つの三角形の辺の比が 1:2 の特殊な場合で提示をして，考えが発展していく展開があった。しかし，特殊な場合の条件に捉われ過ぎてしまう

のではないかと思い，公開授業では，辺比をいろいろな場合に変えて提示をして，生徒に観察をさせた。そのため，生徒からなかなか意見が出にくくなってしまったが，中心 B 半径 BA の円を表示すると，「点 P が最も端にくるのは，直線 AE が点 B を中心とした半径 BA の円の接線になるとき」という発言がでた。その発言を理解できる子どもは，挙手による確認では最初少数であったので，『GRAPES で直線 AE の残像を残して接線となるときであること』，さらに円 B の外側には直線 AE が何故いかないのかを，『点 A は円 B の周上しか動けないから，直線 AE は円 B の外側にはいかない』を確認して，理解できたかという教師の確認に対して，最終的には大部分の子どもが挙手をした。（Ⅵ資料〇25 写真参照）

最後に，〇26 の接線の作図は既習であるが，時間の関係で定規をあててかく方法になってしまった。点 E から円 B への接線をかき，点 P の軌跡の範囲を図示し，軌跡の両端と中心 O を結んだ中心角の大きさとして, 数値で値を求めた。中心角は, 94°や 100°等，生徒それぞれの図によって異なるので，2 桁になった人，3 桁になった人という問いかけで挙手をさせて求めた値を確認した。

２　軌跡の理解について

1 時間目の〇10 を生徒にたずねたとき，イメージする手立てとして，自分や友だちがかいた図を見比べて交点 P の位置を観察してみる方法が考えられる。生徒からは「AD と平行になる」,「曲がる」という意見がでた。しかし,「どう動くかわからない」,「動く?」という発言もあり，全員の生徒が点が動くということが最初からイメージできたとはいえない。そこで，GRAPES を使って点 B をドラッグして動かし，点 P の位置を全員で観察した。ここで，点 B が点 A，D の近くにくると点 P が下の方にきて，「AD に平行ではなく曲線っぽい」ことがわかり，さらに（図 1）のように点 P の残像を残して軌跡の一部を見せた。これを見て，生徒からは「円弧の一部だ」という意見がでて，その理由を説明する活動に移った。

2 時間目の〇15 を生徒にたずねたときには，〇10 の経験があり点が動くということに対する理解はできていたと考える。

このことから，図形の動きにともなって軌跡を考えることは，中学 2 年生においても次の 2 点をおさえることにより，扱うことが可能であると考える。

① 段階を踏みながら問題を発展させていく。
② 根拠となることがらが既習で説明が可能である。

３　コンピュータの活用について

想像がしにくい結果について, コンピュータを使って図形をかいてみることは, 視覚的に提示されるため，わかりやすく，予想を立てたり確認したりするために有効な手段であると考える。しかし，コンピュータは, あくまでも生徒の思考を助けるための補助的な役割である。そのことを理解した上で，どのように使うことが有効であるかは, 一つ一つの授業を振り返り検討して, 明らかにしていくことが重要である。

例えば，今回の授業では,「1 実際の授業の流れ」にも書いた通り，〇15 を考える方法として，最初にいくつか図をかいて点 P の位置を調べてみるということが考えられる。今回はその後の課題があったために，GRAPES を使って△ABC を少しずつ回転させながら，点 P の動き方を予想し，円弧になるのではないかということを証明する流れとした。しかし, 生徒の問題把握と思考の深まりの過程を考えると, 生徒にそれぞれ図をかかせて考えさせる時間も大切である。授業における課題をどう設定するかによって, どのタイミングでコンピュータをどのように使えばよいかが決まる。今回は 2 つの問題解決の見通しを立てやすくするために，GRAPES を活用した。

今回，授業における GRAPES 活用について参観者の方に評価アンケートをお願いしようと考えた。アンケートの趣旨は，本授業（参観授業）において GRAPES の活用が授業の目的を達成するために有効であったか，目的にあっていたかどうかを，授業中に 5 件法で評価してもらい, その理由も書いてもらい, 本授業におけるコンピュータの活用に関する客観的な評価データを得ることであった。

しかし, 手違いでアンケート用紙を参観者の方に配ることができず, 授業後に授業教室に置かれていた用紙に気付いた方が記入をして提出してくれた貴重な意見である。

アンケートの回収数は 11 枚で，理由欄のみの記述が 1 枚，5 件法の回答が 10 枚である。その結果は，（表 1）の通りである。

（表 1）GRAPES の活用に関するアンケート

次の質問について，もっともあてはまると思うものに〇を付け，その理由もお願いします。	⑤そう思う	④ややそう思う	③どちらともいえない	②あまりそう思わない	①そう思わない
(1)　GRAPES による提示は, 本時の授業のねらい,「①問題の条件を変えて，図形にどのような性質があるのか調べてみようとする主体的な態度や意欲を育てる」を達成するために有効であったと思いますか。	7	3	0	0	0
⑤の理由：・図形を動かしている時，生徒が考えようとする姿勢がみてとれた。ただ，静的な時は興味を示していないようだった。 ・図形を操作することは, 紙上ではできないから。 ・視覚にうったえる部分は，やはり大きい。					

	・図形の移動や変形（変化）を視覚的にとらえることができるから。取り組もうとする姿勢にさせるには非常に優れていると思う。 ・図形を動的に見るための手立てとして，パソコンを使うことは大切だと思います。(図をかくには限界があるので)
④の理由：	・範囲の前までは，お～などがあり，生徒の反応がよかった。 ・やはり，見せ方，使い方だと思いました。 ・何となくわかったつもりになるから。
理由のみ：	・点 P が点 B に重なることは，生徒の思考（または略図をかく）でわかる。やや時間はかかるが，弧になることの予想もでるのでは？

	⑤	④	③	②	①
(2)　GRAPES による提示は, 本時の授業のねらい，「②図形を動的に捉えて，角の大きさや直線の交点の軌跡を調べ，根拠をもとにして説明する」を達成するために有効であったと思いますか。	4	5	1	0	0

⑤の理由：	・最初の証明には役立っていたと思う。
④の理由：	・△PFE と△BFD に着目させるための手立てを考える必要があると感じた。△ABC と△BDE に色がぬっていたため, これらの三角形と軌跡に注目しすぎる部分もあるかと思った。 ・見て証明の部分がわかりやすいです。 ・根拠となることがらについての知識があることが前提かなと思います。 ・本時について，動的なものを最初から見せすぎではないかと思いました。見せたあと，生徒が図をかこうとしていなかったのは, そのためだと思いました。必要な手立てだと思いますが，少し頼りすぎに感じました。
③の理由：	・教材がすばらしかった。

	⑤	④	③	②	①
(3)　本日の授業では, GRAPES を発展的な課題を調べていくための補助という目的で使いました。授業中の提示は目的にあっていたと思いますか。	6	3	1	0	0

⑤の理由：	・予想が立てられやすい。 ・提示がなければ非常に大変だと感じました。 ・目的にあっていたと思います。ただ，課題が難しすぎたため，1 人で考えるところとグループでのすり合わせも必要だったと思います。その後の視覚的なとらえ方の補助としての使い方の方が，より有効ではないでしょうか。
④の理由：	・見通しをもつという部分では，とても有効であったと思う。特に，動的に捉えることができたのがよかった。 ・生徒にも操作をさせたい。
③の理由：	・導入時はとてもよかったが，範囲のときは微妙になってしまった？

(4)　その他ご意見ご感想等がございましたら，ご自由にご記入をお願いいたします。

・GRAPES で示した後の展開が一般的な流れと同じようになったと思う。GRAPES を用いたら，それを基に展開できる内容を考えていく必要があると感じた。
・GRAPES は使うことで生徒に視覚的に物事を考えさせられるので，いいと思いました。ありがとうございました。
・図形はやはりおもしろいです。一番後ろの生徒さんも途中から声が出なくなりました。考えるおもしろさがあります。私は 2 つの三角形の相似比に着目した軌跡がいいなと思いました。
・黒板とスクリーンをうまく使っていました。参考になります。☆動かせるのが何よりよい。
・関数での GRAPES の活用も見てみたいなと。大変よい研修になりました。
・学習課題が難しすぎたのではないかと思われます。
・今日みせていただいた授業であつかわれた，「2 つの正三角形」の奥深さを，これまでより感じました。図形を動的に見せるツールとして，GRAPES ははじめてみました。ありがとうございました。
・先生の教材にまず，びっくりしました。しかし，正しい数学の教材をみました。私も発見的な教材の必要さを強く感じ，とっても勉強になりました。ありがとうございました。
・GRAPES があるから予想・予測をすることができ，弧であることの説明ができたのだと思います。最後の弧の範囲は，厳しいですね。

アンケートに書かれている意見は，どれも大変貴重なものである。理由および記述欄に書かれている事柄は，授業におけるコンピュータの活用について大切な示唆を与えてくれる。

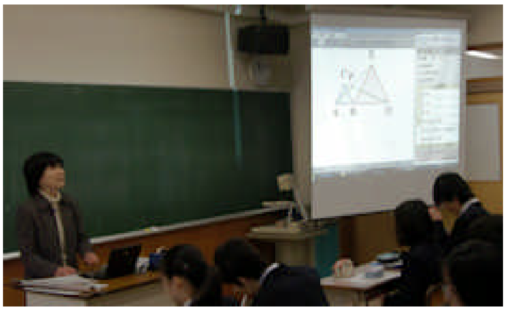
今回の授業において，GRAPES が効果的であったところは，**『図形を動かして動的にとらえる問題において見通しを立てることができる・提示がなければ見通しを立てられない問題を考えることができること』**であると捉えることができる。問題点としては，**『動的なものを最初から見せすぎること・生徒が考える手立てを取った後の補助的な使い方がよいのでは』**ということであろうか。もう一つ,『コンピュータを用いたらそれを基にした授業展開を考える』ことについて，一つの見方から筆者の考えを述べておくことにする。筆者はこのことについて，コンピュータという道具を使い始めたときから，なかなか明確な答えが出ない問題として悩み続けてきたように思う。最近は，次のように考えている。**『授業の目的は何か』**をはっきりさせる。(ⅰ)コンピュータがなくてもやや時間はかかるが生徒が図をかいて考えることができることに対しては，コンピュータは思考の補助的な役割で，授業展開は通常と大きく変わらないであろう。(ⅱ)手でかくことが困難なものを調べて見る場合は，コンピュータを使って実験観察をするような，通常とは違う展開に自然となるであろう。コンピュータを使って生徒の思考を補足するのが目的か，それとも，コンピュータを使って調べるのが目的かによって，授業展開が大きく変わるのではないだろうか。ちなみに，(ⅱ)にあてはまるようなものとしては，今回の○15 のような見通しが困難な問題を考えたり，複雑な数式で表わされる図形（グラフ)，空間図形をかくなどがあるのではないだろうか。

このアンケートの結果を，ぜひ今後に生かしていきたいと思う。ご協力をいただきまして，ありがとうございました。

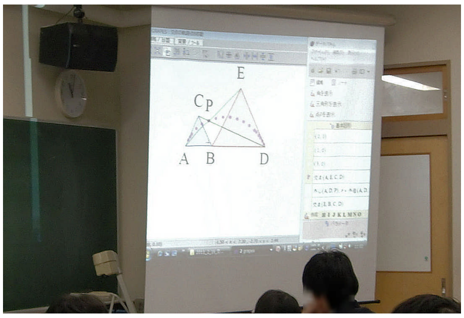
Ⅵ　資料

1　授業の様子

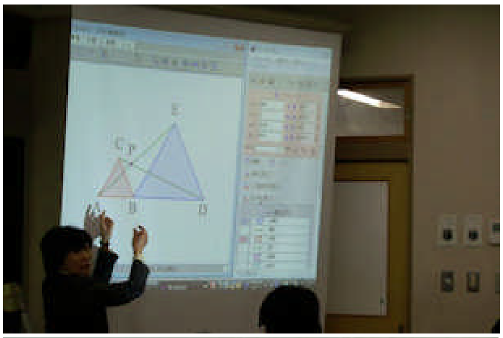
導入

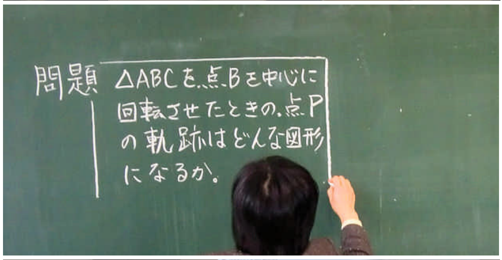


前時の復習○14

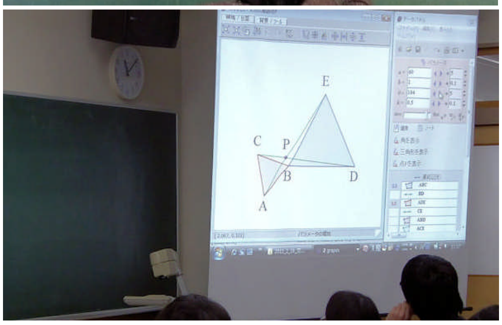


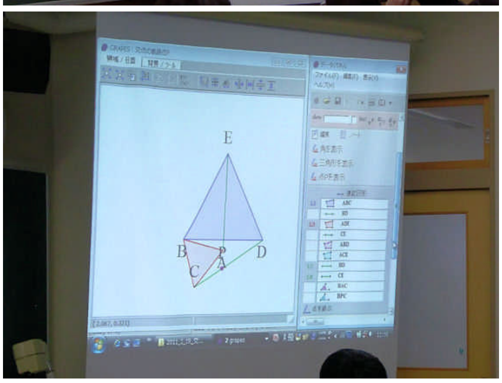
○15

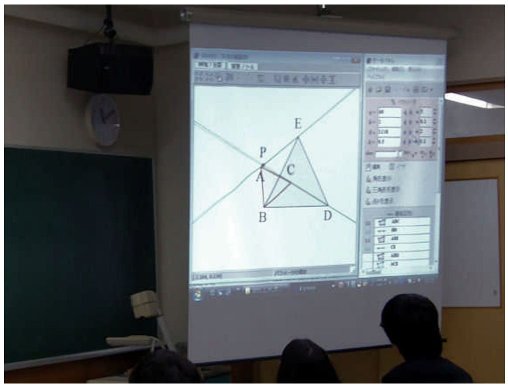


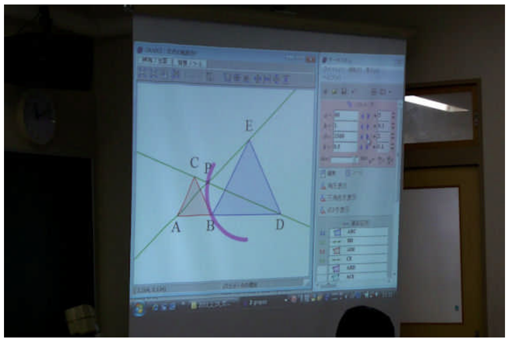


○16

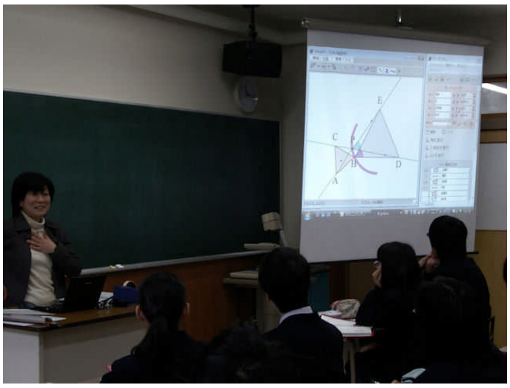


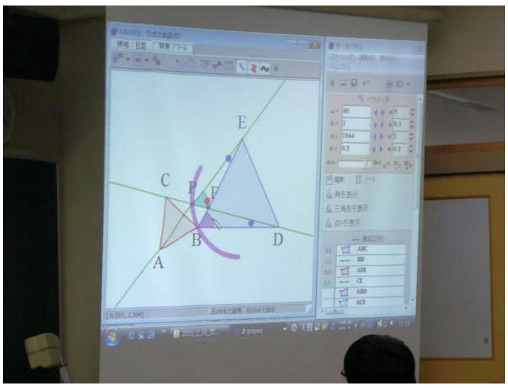




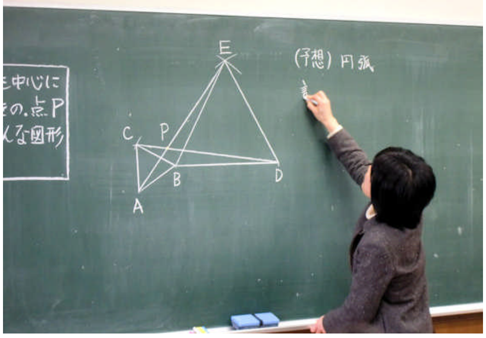


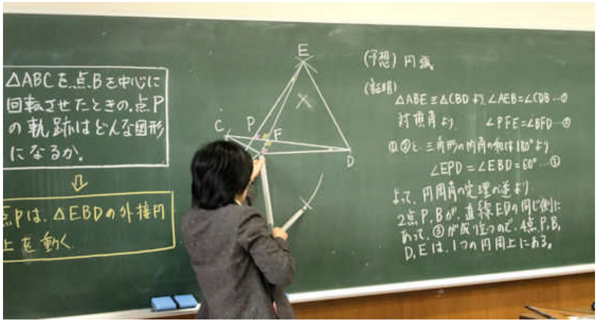
○17
○18

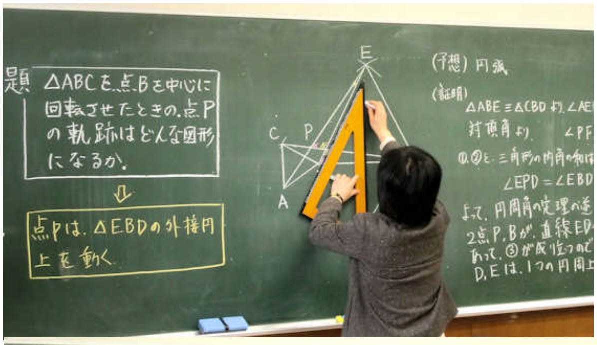


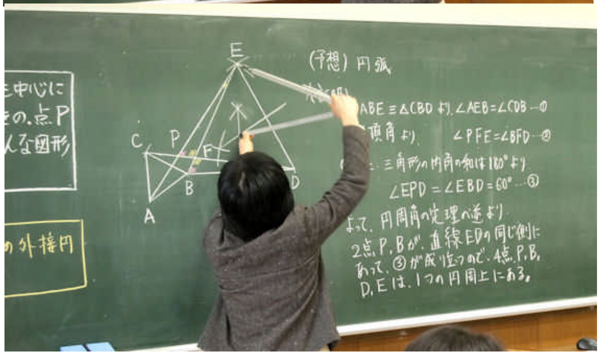


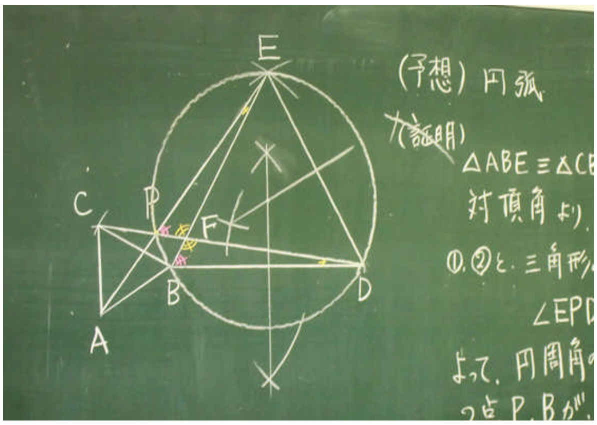
○19











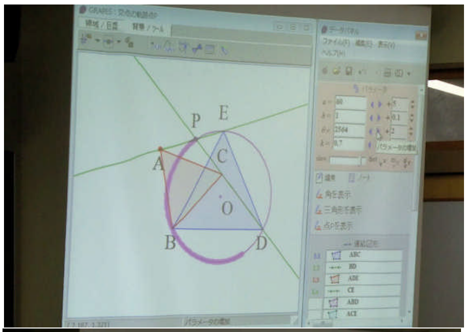
○20

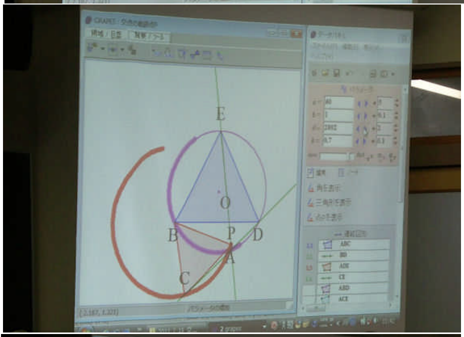
○21

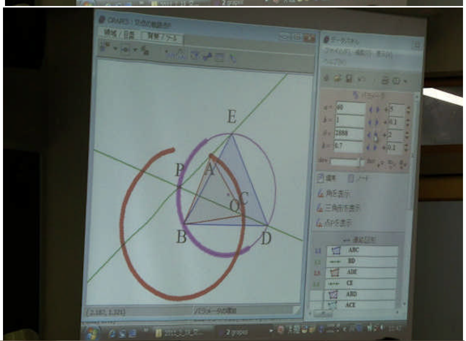
○23

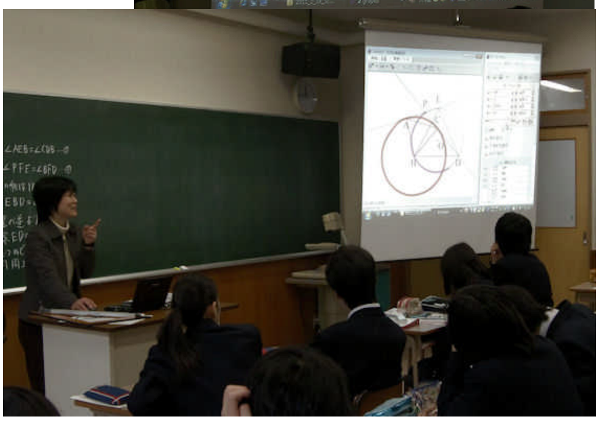
○24

点 A の跡を残す

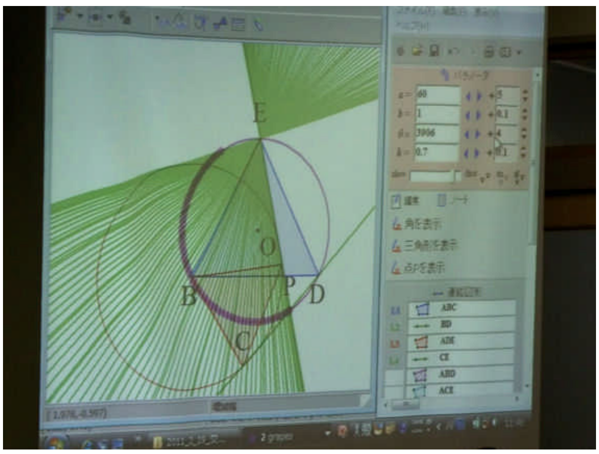


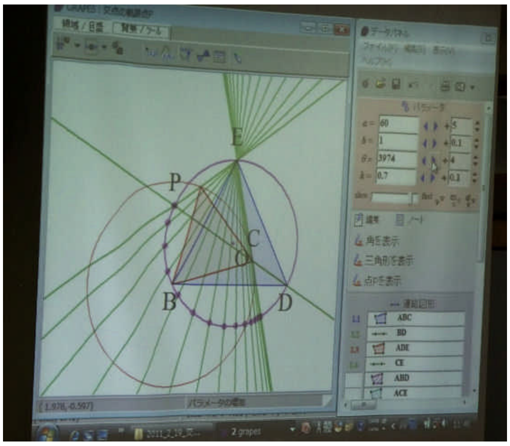




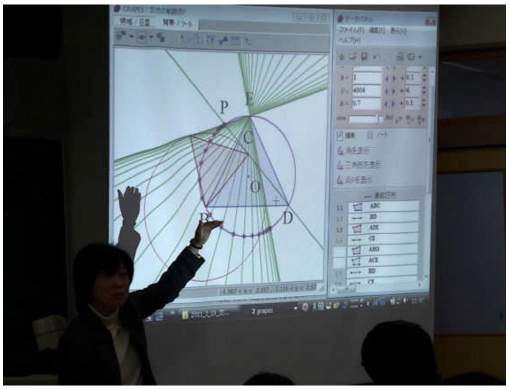


○25 直線 AE の残像を残して△ABC を動かす

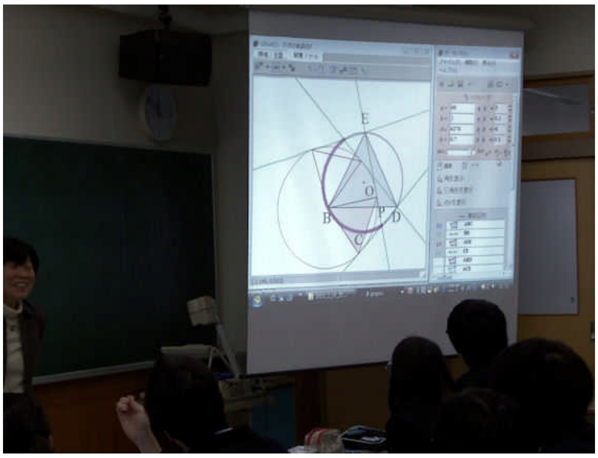




交点 P は円周上のどこまで動くか



直線 AE が中心 B 半径 BA の円の接線になるところまで

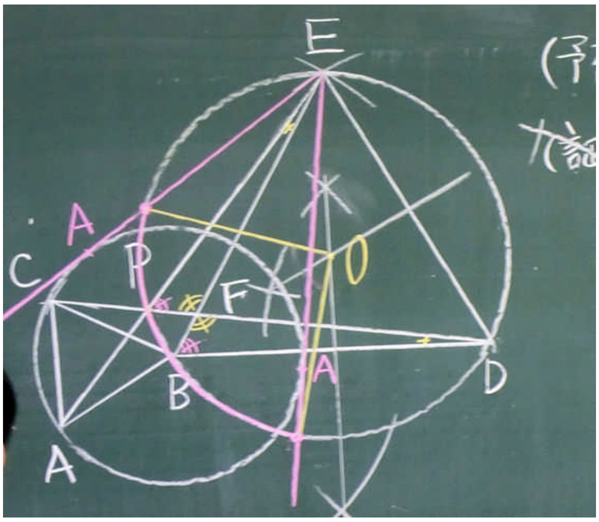


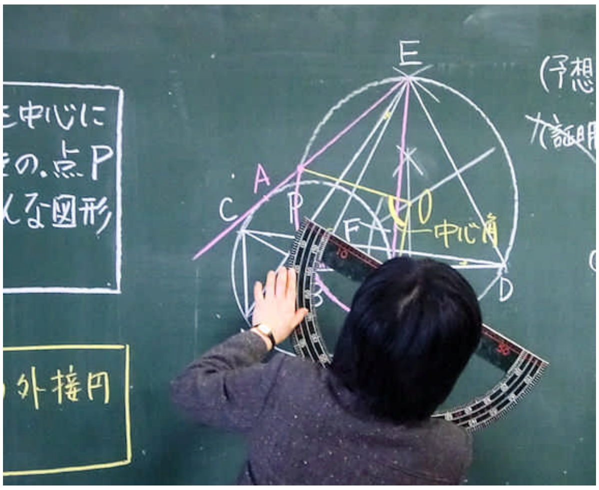
点 P の動く範囲についてわかった人？（2 度目の確認）

○26

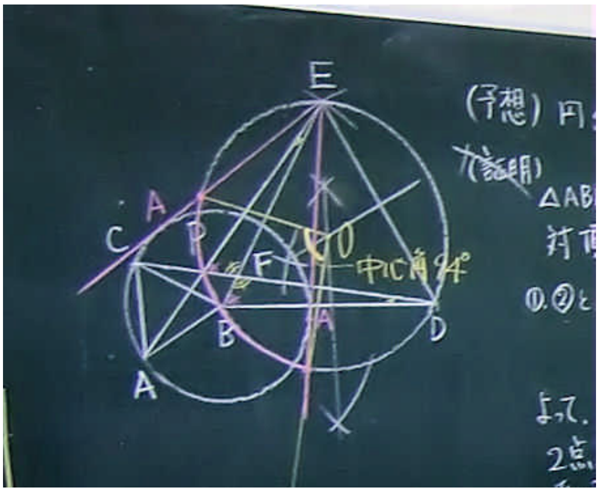
点 P の動く周上の範囲を太線で表わす

点 P の動く範囲を中心角を測って表わそう。中心角の大きさは各自の図によって異なるので，自分の図で値を求める。

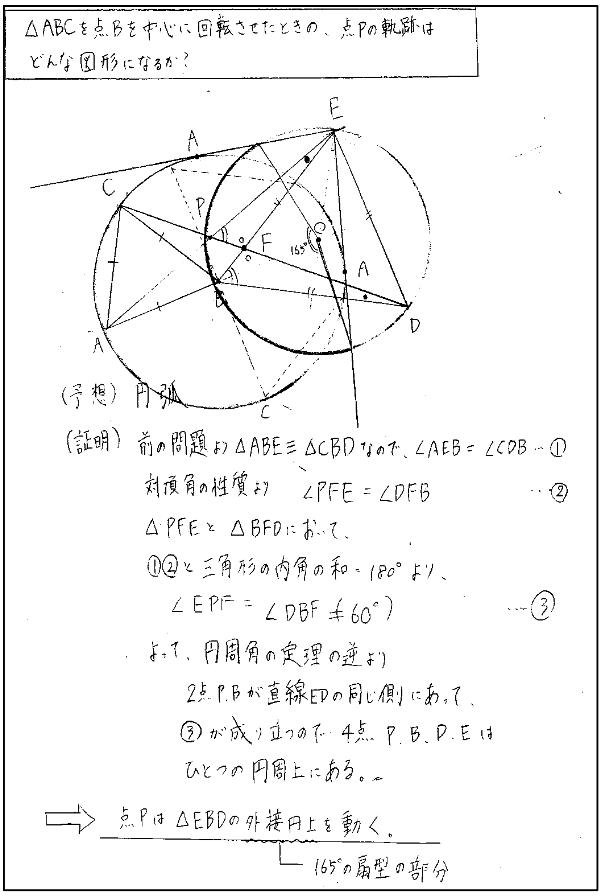


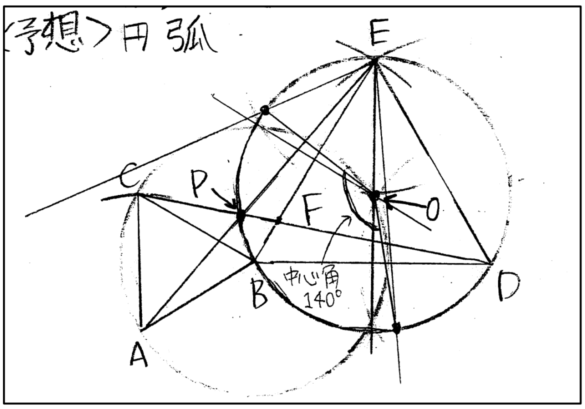


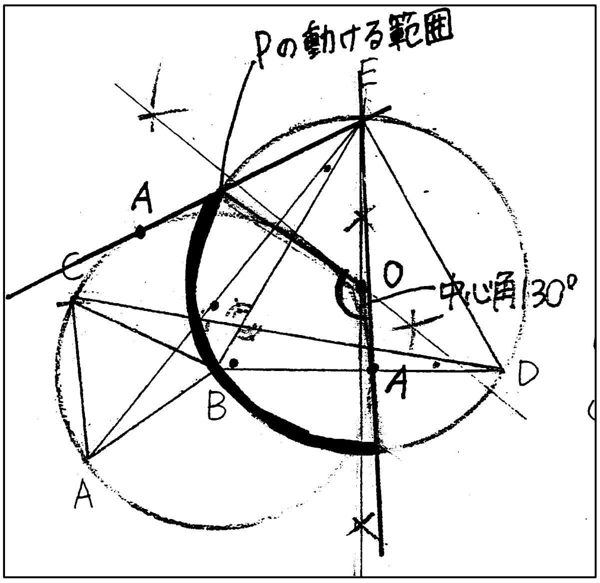
黒板の図では点 P が動く範囲の弧の中心角は 94°

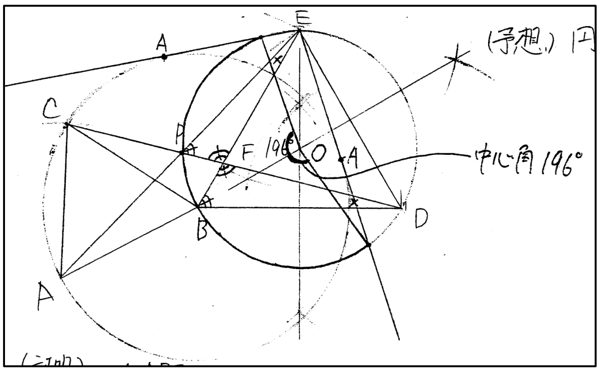


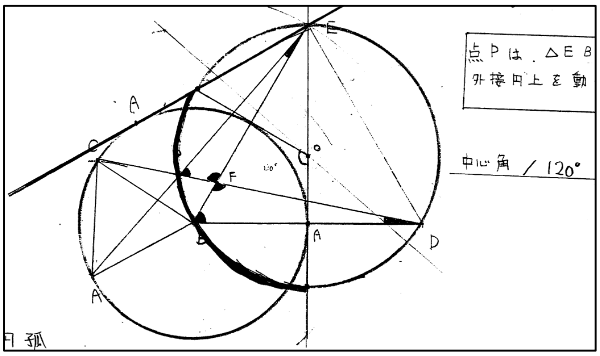
2　生徒のワークシート（2 時間目）











Ⅶ　謝辞

大阪教育大学附属高等学校池田校舎の友田勝久先生には，本授業2時間目の問題の幾何的な解法を示して頂き，筆者が行った解析的な解法に対しても有益なご助言を頂きました。幾何的な解法は，授業でGRAPESを用いて示したものです。この場をお借りして深く感謝を申し上げます。

また，神奈川県立横浜平沼高等学校の石谷優行先生には，公開授業の写真記録を詳細に撮っていただきました。本文中の写真は，石谷先生のご了解をいただき，都合上筆者が画像を加工して使わせて頂きました。コンピュータ画面を提示したスクリーンの記録と，黒板の記録を1ステップごとに撮っていただき，授業を振り返る際に大変参考に

なりました。心より感謝を申し上げます。ありがとうございました。

〔参考文献〕

[1]この問題の背景と授業実践報告，筆者が行った計算による解の詳細は下記 URL の資料（3.5MB ご覧になれないときは，一度ファイルをパソコンに保存をしてから開いてください）をご参照ください。
http://www.u-gakugei.ac.jp/~onodakk/math/soujitokiseki/haikei.pdf

[2]大阪教育大学附属高等学校池田校舎の友田勝久先生が作成された関数グラフ描画ソフト。下記 URL からダウンロードをすることができます。
http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/