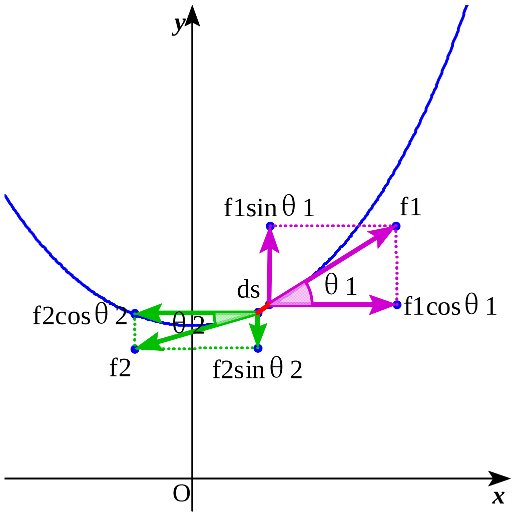
橋げたの質量が無視できるときの吊り橋の形　懸垂曲線（つり合いの関係から）



カテナリーの任意の点におけるつり合いの関係を考える。

曲線上の微小部分の長さを Δs とする。

その両端にかかる張力を f1，f2 とし，それぞれが水平方向となす角度をθ1，θ2 とする。吊り橋のロープが均一な材質からできているとすると，線密度を ρ として微小部分 Δs にかかる重力は，$\rho g \Delta s$ となるから，

水平方向のつり合いの関係は，

$$f1\cos\theta 1 = f2\cos\theta 2 \qquad \cdots①$$

垂直方向のつり合いの関係は，

$$f1\sin\theta 1 = f2\sin\theta 2 + \rho g\Delta s = f2\sin\theta 2 + \rho g\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x \qquad \cdots②$$

②÷①より $f1$，$f2$ を消去して，

$$\tan\theta 1 = \tan\theta 2 + \frac{\rho g\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta dx}{f2\cos\theta 2} \qquad \left(k = \frac{\rho g}{f2\cos\theta 2}\ \text{とおく}\right)$$

$$\tan\theta 1 - \tan\theta 2 = y_1' - y_2' = k\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x$$

両辺を Δx で割って，

$$\frac{y_1' - y_2'}{\Delta x} = k\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

$\Delta x \to 0$ とすると，

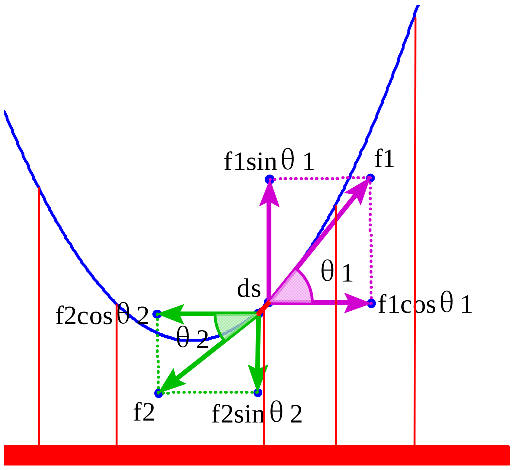
$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = k\sqrt{1+y'^2}$$

これを，$x = \pm x_0$ で $y = y_0$，$x = 0$ で $y = 0$ として解く（積分する）と，

$$y = \frac{1}{k}(\cosh kx - 1)$$

（終）

橋げたの質量が大きくロープの質量が無視できるときの吊り橋の形　放物線（つり合いの関係から）



ロープ(放物線)上の任意の点におけるつり合いの関係を考える。

曲線上の微小部分の長さを Δs とする。

その両端にかかる張力を f1，f2 とし，それぞれが水平方向となす角度をθ1，θ2 とする。橋げたが均一な材質からできているとすると, 線密度を ρ としてロープの微小部分 Δs にかかる重力は，$\rho g \Delta x$ となるから,

水平方向のつり合いの関係は,

$$f1\cos\theta 1 = f2\cos\theta 2 \qquad \cdots①$$

垂直方向のつり合いの関係は,

$$f1\sin\theta 1 = f2\sin\theta 2 + \rho g \Delta x \qquad \cdots②$$

②÷①より $f1$，$f2$ を消去して,

$$\tan\theta 1 = \tan\theta 2 + \frac{\rho g \Delta x}{f2\cos\theta 2}$$ よって，$$y_1' = y_2' + k\Delta x$$

式を変形して両辺 Δx で割って，$$\frac{y_1' - y_2'}{\Delta x} = k$$

$\Delta x \to 0$ として，$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = k$$

積分して,

$$y = \frac{k}{2}x^2 + c_1 x + c_2$$

$x = \pm x_0$ で $y = y_0$，$x = 0$ で $y = 0$ とすると,

$$y = \frac{k}{2}x^2$$ (終)