

以下の問題に対し、

- a. 微積を知っている高校生として解け。
- b. 微積を忘れた大学生として解け。

- 1** a を正の実数とする。たて $a - x$ ，よこ $a + x$ ，たかさ x の直方体の体積を最大にする x を求めよ。もちろん $0 < x < a$ である。
- 2** 球に内接する円柱で体積最大のものを求めよ。
- 3** 1 辺が 12cm の正方形の厚紙の四すみから，合同な正方形を切り取った残りで，ふたのない直方体の箱を作る。箱の容積を最大にするには，どのようにすればよいか。
- 4** 底面の直径と高さの和が 18cm である直円柱の体積が最大となるのは，高さが何 cm のときか。
- 5** 底面の半径 r ，高さ h の直円錐に，右の図（図は省略）のように内接する直円柱のうちで，体積が最大であるものの底面の半径と高さを求めよ。

[出典など]

- 1 独自問題。といっても問題 2 を手直ししただけ。おもしろくなくなったかも。
- 2 Miodrag S. Petković, Famous Puzzles of Great Mathematicians, American Mathematical Society, 2009, pp 94–95. このような円柱の直径と高さの比を求めよというのが Kepler の問題。
- 3, 4, 5 高等学校教科書「数学 II」，数研出版。

3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, $a^2 > 3b$ を考える。

$$\alpha_{-2} = \frac{-a - 2\sqrt{a^2 - 3b}}{3}, \quad \alpha_{-1} = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 3b}}{3}, \quad \alpha_0 = -\frac{a}{3},$$

$$\alpha_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 3b}}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{-a + 2\sqrt{a^2 - 3b}}{3}$$

とおくと,

$$y = (x - \alpha_1)^2(x - \alpha_{-2}) + \alpha_1^2\alpha_{-2} + c \quad \cdots \cdots (1)$$

$$y = (x - \alpha_{-1})^2(x - \alpha_2) + \alpha_{-1}^2\alpha_2 + c \quad \cdots \cdots (2)$$

と書ける。ここで

$$\alpha_1^2\alpha_{-2} = \frac{1}{27} (a(2a^2 - 9b) - 2(a^2 - 3b)^{3/2}),$$

$$\alpha_{-1}^2\alpha_2 = \frac{1}{27} (a(2a^2 - 9b) + 2(a^2 - 3b)^{3/2})$$

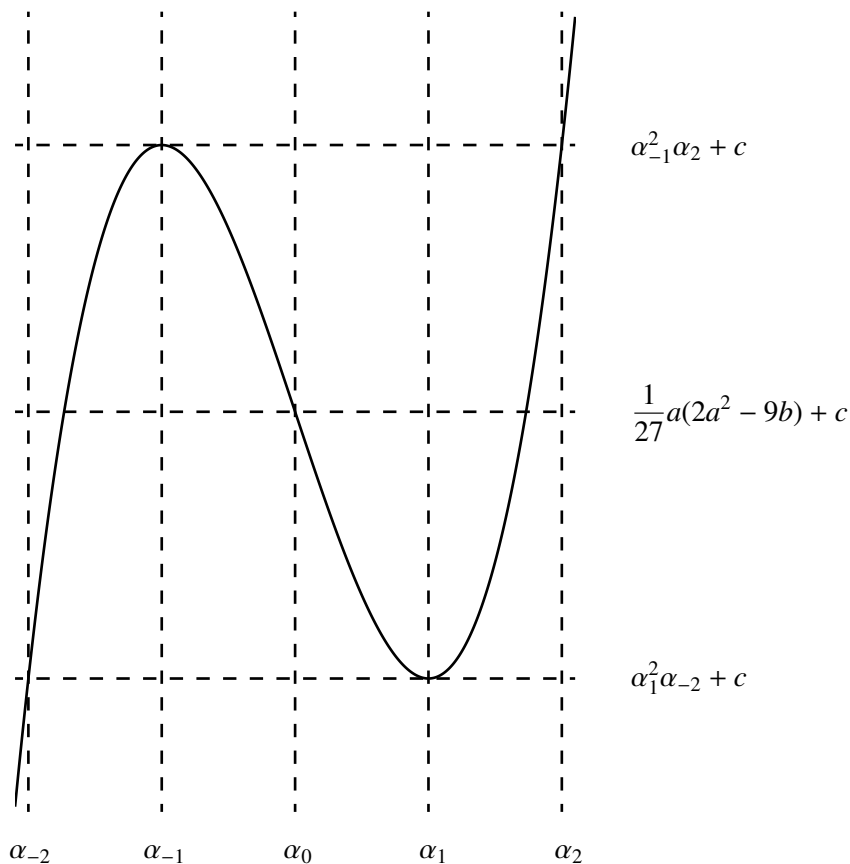
である。

なお $\alpha_{-2} < \alpha_{-1} < \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_1^2\alpha_{-2} + c < \frac{1}{27}a(2a^2 - 9b) + c < \alpha_{-1}^2\alpha_2 + c$ となっている。

(1)より $x > \alpha_{-2}$ のとき $y \geq \alpha_1^2\alpha_{-2} + c$ であり, $x = \alpha_1$ で極小値 $\alpha_1^2\alpha_{-2} + c$ をとる。

(2)より $x < \alpha_2$ のとき $y \leq \alpha_{-1}^2\alpha_2 + c$ であり, $x = \alpha_{-1}$ で極大値 $\alpha_{-1}^2\alpha_2 + c$ をとる。

この 3 次関数のグラフは以下のようにになっている。



(1) の式から (2) の式に, あるいはその逆の変形は容易にできる。

$$y = (x - \alpha)^2(x - \beta) + (\text{定数})$$

とする。計算すると

$$y = x^3 - (2\alpha + \beta)x^2 + \alpha(\alpha + 2\beta)x + (\text{定数})$$

となる。

ここで

$$\alpha' = \frac{\alpha + 2\beta}{3}, \quad \beta' = \frac{4\alpha - \beta}{3}$$

とおくと,

$$2\alpha' + \beta' = 2\alpha + \beta$$

$$\alpha'(\alpha' + 2\beta') = \alpha(\alpha + 2\beta)$$

となるので

$$y = (x - \alpha')^2(x - \beta') + (\text{定数})$$

と書ける。

なお $h = \frac{\alpha - \beta}{3}$ とおくと $\alpha' = \beta + h$, $\beta' = \alpha + h$ となっていることに注意 (前ページの図参照)。

解答例

1. 直方体の体積 V は

$$V = (a - x)(a + x)x, \quad \text{ただし } 0 < x < a.$$

展開すると $V = -(x^3 - a^2x)$ となる。

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}a, \quad \alpha_{-2} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}a, \quad \alpha_1^2\alpha_{-2} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$$

より

$$V = -\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2\left(x + \frac{2\sqrt{3}}{3}a\right) + \frac{2\sqrt{3}}{9}a^3.$$

$0 < x < a$ のとき $x + \frac{2\sqrt{3}}{3}a > 0$ だから $V \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$ であり, $x = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ で最大値 $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$ をとる。

2. 球の半径を R , 内接する円柱の底面の半径を r , 高さを $2x$ とする。 $r = \sqrt{R^2 - x^2}$ だから, 円柱の体積 V は, $0 < x < R$ として

$$V = \pi r^2 \cdot 2x = 2\pi(R^2 - x^2)x = -2\pi(x^3 - R^2x) = -2\pi\left(\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}R\right)^2\left(x + \frac{2\sqrt{3}}{3}R\right) - \frac{2\sqrt{3}}{9}R^3\right).$$

$0 < x < R$ のとき $x + \frac{2\sqrt{3}}{3}R > 0$ だから $V \leq \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi R^3$ であり, $x = \frac{\sqrt{3}}{3}R$ で最大値 $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi R^3$ をとる。

このとき, 直径 $= 2r = 2\sqrt{R^2 - x^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$ で 高さ $= 2x = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$ だから $\frac{\text{直径}}{\text{高さ}} = \sqrt{2}$.

3. 切り取る正方形の 1 辺の長さを x cm とすると, 箱の容積 V は

$$V = (12 - 2x)^2x = 4(x - 6)^2x, \quad \text{ただし } 0 < x < 6.$$

$\frac{6-0}{3} = 2$, $0+2=2$, $6+2=8$ より $V = 4(x-2)^2(x-8) + 128$. なお定数項は計算した。

$0 < x < 6$ のとき $x-8 < 0$ だから $V \leq 128$ であり, $x = 2$ で最大値 128 をとる。

4. 高さを h cm とすると、底面の半径は $\frac{18-h}{2}$ cm だから、円柱の体積 V は

$$V = \pi \left(\frac{18-h}{2} \right)^2 h = \frac{\pi}{4} (h-18)^2 h, \quad \text{ただし } 0 < h < 18.$$

$\frac{18-0}{3} = 6$, $0+6=6$, $18+6=24$ より $V = \frac{\pi}{4} ((x-6)^2(x-24) + 864)$. なお定数項は計算した。

$0 < h < 18$ のとき $x-24 < 0$ だから $V \leq \frac{\pi}{4} \cdot 864 = 216\pi$ であり, $h=6$ で最大値 216π をとる。

5. 直円柱の底面の半径を x , 高さを y とすると, $\frac{y}{r-x} = \frac{h}{r}$ が成り立つので, $y = \frac{h}{r}(r-x)$ となる。よって円柱の体積 V は

$$V = \pi x^2 y = \pi x^2 \frac{h}{r} (r-x) = -\frac{\pi h}{r} x^2 (x-r), \quad \text{ただし } 0 < x < r.$$

$$\frac{0-r}{3} = -\frac{r}{3}, \quad r - \frac{r}{3} = \frac{2r}{3}, \quad 0 - \frac{r}{3} = -\frac{r}{3} \quad \text{より} \quad V = -\frac{\pi h}{r} \left(\left(x - \frac{2r}{3} \right)^2 \left(x + \frac{r}{3} \right) - \frac{4r^3}{27} \right).$$

$0 < x < r$ のとき $x + \frac{r}{3} > 0$ だから $V \leq -\frac{\pi h}{r} \left(-\frac{4r^3}{27} \right) = \frac{4}{27} \pi r^2 h$ であり, $x = \frac{2r}{3}$ で最大値 $\frac{4}{27} \pi r^2 h$ をとる。

このとき円柱の高さは $y = \frac{h}{r} \left(r - \frac{2r}{3} \right) = \frac{h}{3}$ である。

ひとりごと

微積を忘れた大学生がこんな式変形できるのかな？

微分すればスマートに解けるものを。

(滝沢 清)